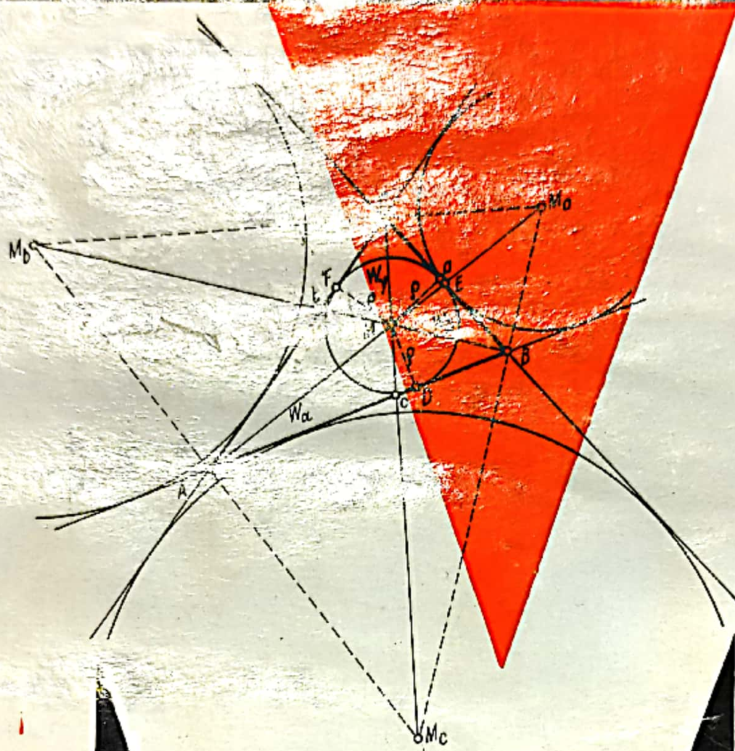
dicționar de matematici generale



eer

Dicționarul de matematici generale face parte din seria de mici dicționare de specialitate, inițiată de Editura enciclopedică română. Răspunzînd necesității de a pune la îndemîna elevilor, studenților, profesorilor din învățămîntul mediu, precum și tuturor celor interesați terminologia și conceptele fundamentale ale matematicii, expuse sintetic, el este un util instrument de lucru și de informare rapidă.

DICŢIONAR DE MATEMATICI GENERALE



Editura enciclopedică română
1974

Lucrarea a fost elaborată de:

Vasile BOBANCU, profesor

Au colaborat:

Nicolae MIHĂILEANU, profesor universitar

Ştefan GHEORGHIŢĂ, profesor universitar

Alexandru BREZULEANU, cercetător ştiinţific

Anton ŞTEFĂNESCU, asistent universitar

Tudor BĂLĂNESCU, matematician-programator

Coordonare generală
acad. Caius IACOB

Redactor coordonator
Ion MOGA

Redactor lexicograf
Rodica CHIRIACESCU

Coperta şi supracoperta
Gheorghe MOTORA

Macheta
Olimpiu POPA

CUVÎNT ÎNAINTE

Dicţionarul de matematici generale conţine aproape 1 300 de articole care tratează principalele noţiuni prevăzute în programa analitică a învăţămîntului liceal, noţiuni de algebră modernă, analiză matematică, geometrie diferenţială clasică (ce depăşesc nivelul circumscris de programă) şi prezintă personalităţi marcante ale matematicii româneşti şi universale. O atenţie deosebită a fost acordată aplicaţiilor matematicii şi, în special, celor ale teoriei probabilităţilor, ale teoriei programării calculatoarelor electronice şi ale calculului diferenţial şi integral (ceea ce explică prezenţa în dicţionar a unor termeni de mecanică, unde aplicaţiile acestuia sînt numeroase).

Deşi în ceea ce priveşte tehnica lexicografică s-au adoptat soluţiile cele mai simple, sînt necesare cîteva precizări. Astfel, cuvîntul titlu este urmat, de obicei, de etimologie (în paranteze drepte) şi eventual, de o precizare suplimentară (în paranteze rotunde) sau de simbol (de asemenea, în paranteze rotunde); în cazul în care cuvîntul titlu este urmat atît de precizarea suplimentară cît şi de simbol (date în aceeaşi paranteză), acestea sînt despărţite prin „;". Dacă un cuvînt titlu are mai multe sensuri, acestea sînt numerotate cu cifre arabe. Atunci cînd în cadrul unui articol sînt definite unele noţiuni, care se raportează la noţiunea desemnată de cuvîntul titlu, denumirea acestora este scrisă cu caractere cursive. Acolo unde a fost necesar, la numele proprii s-a indicat (în paranteze drepte) pronunţarea corectă.

În locul formelor *hexagon*, *hexaedru*, *mijlocuri* etc. (recomandate de *Îndreptarul ortografic, ortoepic şi de punctuaţie*) au fost preferate formele *exagon*, *exaedru*, *mijloace* etc., folosite cu precădere în literatura de specialitate.

Dicţionarul pe care îl prezentăm — primul de acest fel în literatura noastră matematică — a fost conceput de prof. V. Bobancu, căruia i se datorează majoritatea articolelor precum şi desenele; la definitivarea lucrării, s-au folosit sugestii şi articole ale colaboratorilor — contribuţiile fiecărora purtînd iniţialele numelor. Articolul privind *secţiunea de aur* şi selecţia planşelor aferente au fost realizate de prof. univ. Adrian Gheorghiu.

Publicarea **Dicţionarului de matematici generale** răspunde necesităţii de a pune la îndemîna elevilor, studenţilor, profesorilor din învăţămîntul liceal, precum şi tuturor celor interesaţi, terminologia şi conceptele fundamentale ale matematicii, expuse sintetic.

Editura enciclopedică română

A

abac [gr. *abax*: *a* „fără", *bax* „bază sprijin"; ebr. *abak* „pulbere, nisip"], instrument pentru calcule aritmetice. Este constituit dintr-o ramă cu vergele orizontale (atîtea cîte cifre există la cel mai mare număr folosit în calcule) pe care alunecă cîte zece bile ce servesc la efectuarea socotelilor. La origine, termenul abac ilustrează vechea formă a acestuia: o planşetă prevăzută cu şănţuleţe paralele (de obicei trasate pe nisipul presărat pe planşetă) ce conţin cîte zece pietricele folosite pentru calcule. Cunoscut din antichitate, este folosit şi astăzi pe scară largă în unele ţări, de exemplu în Japonia, unde se utilizează o variantă a abacului numită *soroban*. *(V.B.)*

abatere standard (a unei variabile aleatoare), radicalul dispersiei acestei variabile: $\delta = \sqrt{D^2(X)}$. Ca şi dispersia este un indicator al împrăştierii valorilor variabilei aleatoare. Ex.: în cazul legii de repartiţie normală, un binecunoscut rezultat stabileşte că, cu o probabilitate mare (aproximativ 0,9974), valorile variabilei se găsesc într-un interval de lungime egală cu şase abateri standard, avînd centrul în valoarea medie $M(X)$. Se mai numeşte *abatere medie pătratică*, după propunerea lui I. Didion (1848/49). *(V.B., A.S.)*

Abel, Niels Henrik (1802—1829), matematician norvegian. În pofida unei vieţi scurte, contribuţiile sale în algebră şi teoria funcţiilor sînt deosebit de importante: a demonstrat imposibilitatea rezolvării, cu ajutorul radicalilor, a ecuaţiilor algebrice de grad mai mare ca patru, în forma lor generală; a cercetat un tip de integrale care îi poartă numele; a creat, concomitent cu K. Jacobi, teoria funcţiilor eliptice, cărora le-a stabilit dubla periodicitate şi teorema de adiţiune; a considerat un anumit tip de ecuaţii funcţionale şi ecuaţiile algebrice abeliene. Contribuţiile sale sînt cuprinse în cîteva memorii (unele apărute postum): *Mémoire sur les équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'equation générale du cinquième degré*, 1824; *Recherches sur les fonctions elliptiques*, 1827. *(V.B.)*

Abramescu, Nicolae (1884—1947), matematician român. Studii la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti (doctor, 1921). Profesor la Universitatea din Cluj (agregat din 1923, titular din 1926). Membru al Societăţii Române de Ştiinţe, precum şi al unor instituţii din străinătate: Société mathématique de France, Circolo matematico di Palermo, Deutsche Matematiker Vereinigung. Contribuţii în domeniul algebrei (ecuaţii algebrice), al geometriei (în special geometrie afină), al analizei matematice (serii de polinoame de variabilă complexă) şi al mecanicii. Autor al unor manuale de liceu, cu o largă circulaţie în învăţămînt. Op. pr.: *Introducere elementară în studiul analitic al geometriilor neeuclidiene şi noţiuni elementare de geometrie vectorială. Geometrie analitică*, 1927. *(V.B.)*

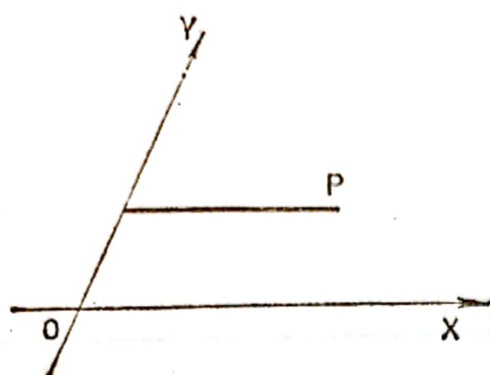


Fig. 1

abscisă [lat. *abscissa* „linie tăiată"] **1.** (Pentru un punct de pe o axă). Numărul care indică lungimea şi orientarea segmentului cuprins între originea axei şi punctul considerat, determinînd poziţia acestuia. **2.** (Pentru un punct din plan, raportat la reperul format de axele concurente Ox şi Oy). Prima coordonată carteziană a punctului respectiv, măsurată pe segmentul dus din punct, paralel cu axa Ox, pînă la axa Oy (fig. 1). **3.** (Pentru un punct din spaţiu, raportat la reperul format din axele necoplanare Ox, Oy, Oz). Prima coordonată carteziană a punctului respectiv, măsurată pe segmentul dus din acest punct, paralel cu axa Ox, pînă în planul yOz. Definiţia acestei coordonate, după ideea lui Apollonius (sec. 3 î.e.n.), a fost dată de P. Fermat şi s-a statornicit datorită, mai ales, lui R. Descartes (1637), care a introdus şi notaţia prin litera x. Denumirea a fost propusă de G. Leibniz (1675) şi s-a fixat în terminologia matematică prin lucrările lui F. Lahire (1709) şi Cl. Rabuel (publicate postum în 1730). *(V.B.)*

absorbţie [lat. *absorptio* „înghiţire"], proprietate a unei perechi de operaţii $f, g: M \times M \to M$, notate $f(x, y) = x \circ y$ şi $g(x, y) = x \perp y$, astfel încît pentru orice $x, y \in M$:

$$x \circ (y \perp x) = x \text{ şi } x \perp (y \circ x) = x.$$

Într-o latice, conjuncţia şi disjuncţia au proprietatea de absorbţie. În corpul numerelor reale, înmulţirea şi împărţirea nu au această proprietate. *(V.B., A.B.)*

Abul Vefa, Mahomed ben Mahomed (940—998), matematician şi astronom arab. A scris: *Cartea despre ceea ce trebuie să cunoască grămăticii, oamenii de afaceri şi alţii în ştiinţa matematică*, care cuprinde operaţiile cu numere întregi şi fracţionare (printre care şi regula aducerii la acelaşi numitor), măsurarea figurilor plane şi a corpurilor, probleme de aritmetică practică; *Cartea despre ceea ce îi este necesar unui meseriaş care lucrează cu construcţii geometrice*, consacrată geometriei practice (construcţii în topometrie, geodezie, arhitectură, construcţii geometrice cu rigla şi compasul); *Cartea perfectă*, tratat de astronomie în care sînt expuse bazele trigonometriei. *(V.B.)*

acceleraţie [lat. *acceleratio* „grabă"] ($\mathbf{a}$, γ), vectorul definit ca derivata vectorului viteză $\mathbf{v}$ în raport cu timpul: $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt$. Ecuaţia dimensională a acceleraţiei este: $[a] = LT^{-2}$, astfel încît unitatea de măsură pentru ea este egală cu unitatea de măsură pentru lungime împărţită la pătratul unităţii de măsură pentru timp. Suportul lui $\mathbf{a}$, la un moment dat, se află în planul osculator la traiectorie; în acel plan, a găsindu-se de aceeaşi parte a tangentei ca şi versorul normalei principale. Componentele lui $\mathbf{a}$ sînt două, una de-a lungul tangentei la traiectorie, numită *acceleraţie tangenţială*, şi alta de-a lungul normalei principale, numită *acceleraţie normală*. În funcţie de abscisa curbilinie a punctului material, prima are expresia $\ddot{s}$, iar a doua $\dot{s}^2/\varrho$, ϱ fiind raza de curbură. În mişcarea plană, folosind coordonatele polare (r, θ) şi vectorii corespunzători $\mathbf{e}_r$ şi $\mathbf{e}_\theta$, se găseşte că: $\mathbf{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\,\mathbf{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} +$

$+ r\ddot{\theta}) e_\theta$. Proiecţiile lui **a** pe e_r şi e_θ, adică $\ddot{r} - r\dot{\theta}^2$ şi $2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$, se numesc *acceleraţie radială* şi, respectiv, *acceleraţie transversală*. Factorul $\ddot{\theta}$ se numeşte *acceleraţie unghiulară* şi se măsoară în radiani pe secundă la pătrat. — *Acceleraţie absolută* (a_a), acceleraţia unui punct material în raport cu un sistem de referinţă fix. — *Acceleraţie relativă* (a_r), acceleraţie calculată în mişcarea punctului material faţă de un reper mobil. — *Acceleraţie de transport* (a_t), acceleraţia unui punct solidar cu reperul mobil. — *Acceleraţie complementară* (a_c), produsul vectorial dintre dublul vitezei unghiulare ω şi viteza relativă v_r. Se mai numeşte *acceleraţia lui Coriolis*. Acceleraţia absolută a unui punct material este egală cu suma vectorială a acceleraţiei relative, a acceleraţiei de transport şi a acceleraţiei lui Coriolis: $a_a = a_r + a_t + a_c$. *(Şt. G.)*

acceleraţie gravitaţională terestră *(g)*, acceleraţia imprimată unui punct material de către atracţia Pămîntului, cînd punctul material se poate mişca fără nici o rezistenţă. Ea variază cu latitudinea λ şi cu înălţimea h, măsurată de la nivelul mării: în m/s² ea este $g = 9{,}806059 - 0{,}025028 \cos 2\lambda - 10^{-6} h$, deci la nivelul mării la ecuator $g = 9{,}781$ m/s², iar la poli $g = 9{,}831$ m/s². *(Şt. G.)*

acces, proprietate a sistemelor de memorie de a permite înregistrarea şi regăsirea informaţiei. — *Acces direct*, acces pentru care timpul necesar înregistrării sau regăsirii informaţiei este independent de poziţia pe mediul suport a datei solicitate şi a datei adresate anterior. Caracterizează memoriile de tip static, cum ar fi cele cu miezuri de ferită, cu circuite integrate de comutaţie etc. Se mai numeşte *acces aleatoriu*. — *Acces secvenţial*, metodă de acces, opusă accesului direct, în care timpul necesar memorării sau citirii datelor depinde de poziţia datei solicitate şi a datei adresate anterior. E întîlnit frecvent la memoriile cu propagare şi la cele cinematice. De exemplu, în cazul utilizării benzii magnetice datele sînt disponibile în ordine secvenţială, pe măsură ce banda se deplasează prin dreptul dispozitivului magnetic de scriere sau citire a informaţiei. *(T.B.)*

acoperire liniară (a unei submulţimi M dintr-un spaţiu vectorial V), mulţimea tuturor combinaţiilor liniare cu elemente din M; ea coincide cu cel mai mic subspaţiu vectorial al lui V care include mulţimea M. Noţiunea de acoperire liniară a lui M coincide cu noţiunea de subspaţiu vectorial generat de M. Ex.: în spaţiul $\mathbb{R}^3$ acoperirea liniară a mulţimii $M = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ este planul xOy. *(A.B.)*

aderenţă (a unei mulţimi, într-un spaţiu topologic) → **punct aderent**

adresă 1. Nume sau număr de ordine ce identifică o locaţie de memorie sau un dispozitiv de la care se primeşte sau la care se transmite informaţie. **2.** Parte a unei instrucţiuni ce specifică locaţia unui operand. *(T.B.)*

adunare 1. (Pentru numere naturale; $a + b$). Operaţie care constă în reunirea într-un singur număr (numit *sumă*) a tuturor unităţilor conţinute în alte numere. **2.** Operaţie algebrică definită pe o mulţime M prin analogie cu adunarea numerelor naturale. Ex.: adunarea numerelor raţionale → *număr raţional*, adunarea polinoamelor → *inel de polinoame*, adunarea matricilor → *matrice*, adunarea vectorilor → *vector*. Este o operaţie asociativă şi comutativă. De obicei mulţimea M este grup comutativ faţă de adunare. Simbolul adunării „ + " (plus) apare tipărit pentru prima dată într-o lucrare a lui J. Widmann (*Behende und hübsche Rechung auf allen Kaufmann-*

schaft, 1489), dar este întîlnit și în manuscrisele lui Leonardo da Vinci. În terminologia matematică românească denumirea a fost introdusă de T. Iancovici (1777), fiind frecvent folosită de G. Obradovici (1805), Gh. Șincai (1806), Gh. Lazăr (1821) ș.a., datorită cărora s-a impus sub această formă. *(V.B.)*

afix [lat. *affixus* „atașat, fixat la"], numărul complex $z = a + bi$, atașat punctului din plan care, raportat la un sistem de axe coordonate rectangulare, are abscisa a și ordonata b (fig. 2). Denumirea a fost propusă de A. Cauchy (1821). *(V.B.)*

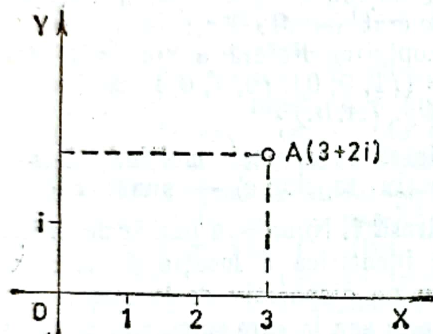


Fig. 2

Alaci, Valeriu (1884—1955), matematician român. Studii la Facultatea de Științe din București (doctor, 1921). Profesor la Școala politehnică din Timișoara (din 1925). Cercetări referitoare la serii trigonometrice, funcții pătratice (denumire pe care a propus-o pentru o clasă de funcții periodice), ecuații funcționale. Op. pr.: *Trigonometria pătratică*, 1939. *(V.B.)*

algebră [arab. *al-djebr* „a strînge, a reuni"], ramură a matematicii care cuprinde rezolvarea ecuațiilor, a sistemelor de ecuații, teoria matricilor, a spațiilor vectoriale, teoria grupurilor, structurile abstracte. Ecuațiile de gradul întîi și doi erau rezolvate, prin indicarea verbală a operațiilor, cu circa 2 000 de ani î.e.n., de cînd datează documentele scrise egiptene și caldeene. În antichitatea greacă erau cunoscute unele identități algebrice, exprimate sub formă geometrică și erau rezolvate grafic unele ecuații de gradul al treilea și al patrulea, prin intersecții de conice. Diofant (sec. 3) utiliza litere speciale pentru operații și numere, inițiind notațiile simbolice. Ideile algebrice, conținute, în germene, în operele antichității, au fost dezvoltate de matematicienii indieni: Brahmagupta (598—660) a introdus numerele negative iar Bhaskara (?1114—1178) a extins notația simbolică. Algebra a fost cultivată mai ales de către matematicienii de limbă arabă: Al-Horezmi (?780—850) a formulat în cuvinte regula generală de grupare a termenilor și de trecere a lor dintr-o parte în alta, pentru rezolvarea ecuațiilor de gradul întîi; Omar Khayyam (1036—1123) a scris o carte importantă de algebră. Algebra s-a dezvoltat considerabil în Renaștere, fixîndu-se acum notația simbolică actuală: Nicolo Tartaglia (?—1557) a dat metoda generală de rezolvare a ecuației de gradul al treilea și Ludovico Ferrari (1522—1565) a ecuației de gradul al patrulea; François Viète (1540—1603) a efectuat calcule algebrice cu formule literale și a dat relațiile dintre rădăcini și coeficienții unei ecuații; John Neper (1550—1617) a inventat logaritmii; René Descartes (1596—1650) a ridicat calculul algebric la semnificația lui generală, abstractă, și a dat o limitare a numărului rădăcinilor pozitive ale unei ecuații algebrice; John Wallis (1616—1703) l-a exprimat pe π ca limită a unui șir de numere raționale; Isaac Newton (1642—1727) a extins formula puterii binomului pentru exponenți raționali, a dat o metodă de calcul prin aproximație a rădăcinilor iraționale, o formulă de interpolare, formula de recurență pentru suma puterilor rădăcinilor unei ecuații; Gottfried Wilhelm Leibniz (1646—1716) a stabilit criteriul

de convergență al seriilor numerice alternate; Michel Rolle (1652—1719) a dat o regulă de separare a rădăcinilor ecuațiilor algebrice. În secolul 18, James Stirling (?1696—1770) a dat formula de calcul prin aproximație a factorialului pentru valori mari ale numărului n, a adus contribuții în teoria diferențelor finite; Gabriel Cramer (1704—1752) a stabilit legea de scriere directă a soluției unui sistem de ecuații lineare, sub formă de cîturi de determinanți; Leonhard Euler (1707—1783) a exprimat cu ajutorul numerelor complexe funcțiile trigonometrice prin exponențiale și dezvoltările lor în serie, a dat procedee de rezolvare aproximativă a ecuațiilor prin dezvoltări în serie, a introdus noțiunea de determinant ortogonal; Étienne Bézout (1730—1783) a formulat o regulă de eliminare a necunoscutei între două ecuații; Eduard Waring (1734—1798) a dat o metodă pentru calculul funcțiilor simetrice de rădăcinile unei ecuații algebrice și formula clasică de interpolare prin polinoame; Théophile Vandermonde (1735—1796) a stabilit proprietățile determinanților; Joseph Lagrange (1736—1813) a sintetizat teoria ecuațiilor algebrice, a introdus formele pătratice, a dat, independent de Waring, formula de interpolare prin polinoame; Simon Laplace (1749—1827) a formulat regula dezvoltării determinanților după minori de diferite ordine. În secolul 19 s-au obținut rezultate remarcabile în teoria ecuațiilor algebrice prin lucrările lui Niels Abel (1802—1829) care a arătat că, în general, ecuațiile de gradul al cincilea și superior nu sînt rezolubile în radicali și Évariste Galois (1811—1832) care a stabilit condițiile în care o ecuație algebrică este rezolubilă în radicali. În ceea ce privește metodele de rezolvare prin aproximații, Charles Sturm (1803—1855) a dat o teoremă generală de determinare a numărului rădăcinilor reale într-un interval dat. În teoria numerelor complexe s-au dat reguli corecte de calcul: Karl Gauss (1777—1855) a dat reprezentarea numerelor complexe în plan; William Hamilton (1805—1865) le-a introdus axiomatic ca o pereche ordonată de numere reale, supuse unor reguli de calcul. S-au deschis domenii noi de cercetare în algebră. A fost inițiată teoria abstractă a operațiilor. Astfel Hamilton a scos în evidență proprietățile de comutativitate, asociativitate, distributivitate; Augustus De Morgan (1806—1871) a creat logica formală a operațiilor; Benjamin Peirce (1809—1880) a studiat diferite tipuri posibile de algebre pe baza operațiilor introduse axiomatic. S-a extins teoria numerelor complexe: W. Hamilton a introdus cuaternionii; Arthur Cayley (1821—1895) octavele; Hermann Grassmann (1809—1877) sistemele cu n unități; Eduard Kummer (1810—1893) numerele ideale, adică numere complexe de forma $a + b\varrho$, unde $\varrho^n = 1$; William Clifford (1845—1879) numerele duale, adică de forma $a + b\varepsilon$, unde $\varepsilon^2 = 0$, $\varepsilon \neq 0$. Tot W. Hamilton a pus bazele calculului vectorial. S-a creat teoria matricilor prin lucrările lui Augustin Cauchy (1789—1857) care a formulat regulile de calcul în cazul numerelor reale, iar A. Cayley le-a introdus sub formă abstractă prin regulile de calcul simbolic. Teoria formelor pătratice a fost definitivată de: K. Gauss care a dat o regulă practică de descompunere într-o sumă de pătrate de forme lineare independente; James Sylvester (1814—1897) a stabilit legea de inerție, conform căreia numărul pătratelor și semnele lor nu depind de modul de descompunere în real; A. Cauchy a dat regula reducerii la forma canonică prin transformări ortogonale; A. Cayley, George Boole (1815—1864), Alfred Clebsch (1833—1872) au studiat invarianții formelor de grad superior. S-a creat teoria grupurilor inițiată de E. Galois, continuată de A. Cauchy, care a studiat grupurile finite, de Enrico

Betti (1823—1892), Camille Jordan (1838—1922), Sophus Lie (1842—1899) care a studiat grupurile continui de transformări şi de Luigi Bianchi (1856—1928). În secolul 20 au obţinut rezultate remarcabile Frederic Riesz (1880—1956), Bartel van der Waerden (n. 1903), Henri Cartan (n. 1904), Aleksandr Kuroş (n. 1908), Claude Chevalley (n. 1909), Anatoli Malţev (1909—1967), Garret Birkhoff (n. 1911), Leonid Kantorovici (n. 1912), Izrail Gelfand (n. 1913), Alexander Grothendick, colectivul N. Bourbaki ş.a. În ţara noastră, contribuţii importante în domeniul algebrei au adus Aurel Angelescu (1886—1938), Dan Barbilian (1895—1961), Grigore Moisil (1906—1973), Tiberiu Popoviciu (n. 1906) ş.a. *(N.M.)*

algebră (peste un inel comutativ A), inel B dotat cu o lege de compoziţie externă notată multiplicativ, definită pe $A \times B$ cu valori în B, astfel încît: a) B cu structura de grup aditiv este modul unitar peste A; b) pentru orice $a \in A$ şi $x, y \in B$:

$$a\cdot(xy) = (a\cdot x)y = x(a\cdot y).$$

Ex.: inelul matricilor pătrate cu elemente reale este algebră peste corpul numerelor reale; inelul polinoamelor de o nedeterminată cu coeficienţi reali este algebră peste corpul numerelor reale. Structura de algebră (necomutativă) îşi are originea în lucrările lui W. Hamilton şi H. Grassmann, iar dezvoltările ei ulterioare se datorează, îndeosebi, lui L. Dickson şi E. Noether. *(V.B., A.B.)*

algebră booleană [după numele lui *G. Boole*], latice M, distributivă faţă de cele două legi de compoziţie $\wedge$ şi $\vee$ ale ei, cu prim şi ultim element, avînd în plus o lege unară, numită *negaţie* (notată cu —), care satisface axiomele:

$\overline{x\vee y} = \bar{x}\wedge\bar{y}$, $\overline{x\wedge y} = \bar{x}\vee\bar{y}$ (legea dualităţii);

$\bar{\bar{x}} = x$ (legea dublei negaţii);

$x\vee\bar{x} = 1$ (legea terţiului exclus);

$x\wedge x = 0$ (legea contradicţiei);

$\bar{0} = 1, \bar{1} = 0$ (legea complementării).

Ex.: mulţimea părţilor unei mulţimi M în care $\vee$ este operaţia de reuniune, $\wedge$ operaţia de intersecţie, negaţia este operaţia de complementare în raport cu M, elementul 0 este mulţime vidă şi elementul 1 este mulţimea M; în logica matematică mulţimea propoziţiilor este o algebră booleană. Studiul algebrelor booleene a fost iniţiat de G. Boole (1854). *(V.B.)*

algebră liniară, parte a algebrei care are ca obiect teoria funcţiilor liniare şi a sistemelor de funcţii liniare. Noţiunea de sistem de funcţii liniare are ca generalizare firească noţiunea de aplicaţie liniară între două spaţii liniare. Problemele algebrei liniare au apărut în legătură cu rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare. Operaţiile cu forme liniare (adunarea, înmulţirea cu un scalar, substituirea) conduc la operaţii cu matrici, obţinîndu-se astfel algebra matricilor peste un inel. Matricile, formînd un inel, prezintă asemănări, dar şi deosebiri, cu numerele, precum şi o structură mai bogată (înmulţirea nu este comutativă, nu orice matrice este inversabilă, ş.a.). Întrucît orice aplicaţie liniară este caracterizată printr-o matrice, teoria matricilor, parte importantă a algebrei liniare, constituie aparatul utilizat pentru formularea şi rezolvarea problemelor ei. Algebra liniară s-a dezvoltat şi prin analogie cu studiul vectorilor în plan sau în spaţiu, apărînd astfel noţiunea de produs scalar, legată de proprietăţi topologice, care, la rîndul ei, înzes-

trează spaţiul liniar cu o topologie naturală. Algebra liniară este utilizată de algebră, analiza matematică, geometrie, precum şi de fizică. *(A.B.)*

ALGOL [engl. *Algo*rithmic *L*anguage], limbaj de programare adecvat scrierii algoritmilor. A fost elaborat în 1959, dar cea mai răspîndită este versiunea *ALGOL-60*, adoptată în cadrul unei conferinţe internaţionale (Paris, 1960) şi perfecţionată ulterior de un grup de specialişti de la I.F.I.P. (International Federation for Information Processing). Îmbunătăţiri şi clarificări au mai fost făcute în 1962, la Roma. În formă completă, ALGOL-ul poate fi utilizat numai pe calculatoare numerice mari. Pentru calculatoare numerice medii, un colectiv de specialişti din ţările socialiste (printre care şi România) a elaborat o restricţie a ALGOL-ului recunoscută de I.F.I.P. sub denumirea *SUBSETALGOL-60*. *(T.B.)*

algoritm [după numele lui *Al-Horezmi*], succesiune determinată de prescripţii precise avînd ca obiectiv rezolvarea problemelor dintr-o anumită clasă, după un număr finit de paşi. Ex.: algoritmul lui Euclid (sec. 3 î.e.n.) de aflare a celui mai mare divizor comun a două numere întregi, extins pentru polinoame de S. Stevin (sec. 16), algoritmul de analiză sintactică a propoziţiilor dintr-o anumită clasă de limbaje formale etc. În matematică, noţiunea de algoritm nu este definită. Anumite specii de algoritmi şi anume: funcţiile recurente, maşina Turing, algoritmul normal al lui A.A. Markov, algoritmul operaţional al lui A.A. Leapunov au fost definite şi s-a demonstrat echivalenţa lor. S-a emis ipoteza, încă neconfirmată, că oricare dintre aceste specii defineşte noţiunea de algoritm. *(T.B., V.B.)*

algoritmul lui Euclid, procedeu prin care este determinat cel mai mare divizor comun a două numere întregi a, b (respectiv a două polinoame cu coeficienţi într-un corp): conform teoremei împărţirii cu rest, există q_1 şi r_1 astfel ca: $a = bq_1 + r_1$ şi $0 \leqslant r_1 < |b|$ (respectiv $r_1 = 0$ sau grad $r_1 <$ grad b); există q_2 şi r_2 cu $b = r_1q_2 + r_2$ şi $0 \leqslant r_2 < r_1$ (respectiv $r_2 = 0$ sau grad $r_2 <$ grad r_1); există q_3 şi r_3 cu $r_1 = r_2q_3 + r_3$ şi $0 \leqslant r_3 < r_2$ (respectiv $r_3 = 0$ sau grad $r_3 <$ grad r_2) şi aşa mai departe. Primul element diferit de zero din şirul (finit) $b, r_1, r_2, r_3, \ldots$ este c.m.m.d.c. al elementelor a şi b. *(A.B.)*

Al-Horezmi → **Horezmi**

alunecare, deplasare relativă a unui corp faţă de altul, cu care se găseşte în contact, în planul tangent la suprafaţa comună (→*frecare*). *(Şt. G.)*

amplificare [lat. *amplificare* „a spori, a mări, a dezvolta"], înmulţire cu acelaşi număr (diferit de zero) a numitorului şi numărătorului unei fracţii, obţinîndu-se o fracţie egală cu cea iniţială. Se întrebuinţează pentru aducerea fracţiilor la acelaşi numitor. — *Amplificarea unui radical*, înmulţire cu acelaşi număr natural (diferit de zero) a indicelui radicalului şi a exponentului expresiei de sub radical, obţinîndu-se un radical egal cu cel iniţial:

$$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[np]{a^{mp}} \quad (p \neq 0).$$

Amplificarea fracţiilor (şi a radicalilor) este folosită pentru aducerea acestora la acelaşi numitor (respectiv, la acelaşi indice), după ideea lui Abul Vefa (sec. 10). *(V.B.)*

amplitudine → **oscilaţie**

anaglifă [gr. *ana* „în sus", *glyphos* „relief, sculptură"], desen liniar în două culori complementare — de exemplu, roşu şi albastru — redînd în plan figuri spaţiale, care, privite prin ochelari ce au vizorii de culori dife-

rite (aceleaşi culori ca ale desenului), apar în relief. Explicaţia vederii spaţiale, prin aceste anaglife, constă în faptul că fiecărui ochi al observatorului îi este destinată numai partea de desen de o anumită culoare (cea complementară culorii vizorului respectiv, întrucît razele ce vin de la desenul cu aceeaşi culoare ca a vizorului sînt absorbite de acesta), iar cele două imagini observate separat se contopesc şi dau imaginea spaţială a corpului desenat, uşurînd astfel intuirea acelor configuraţii. Primele anaglife au fost confecţionate de H. Richard (1900). *(V.B.)*

analiză combinatorie, capitol al matematicii care se ocupă de problemele în care este necesară numărarea diverselor posibilităţi de ordonare a unor elemente, după reguli date. Probleme de acest gen au fost rezolvate de Brahmagupta (sec. 1), Levi ben Gershon (sec. 13), I. Buteo (sec. 16), dar cercetări aprofundate în domeniul analizei combinatorii au început în secolele 17—18, fiind legate de numele lui P. Fermat, B. Pascal, A. De Moivre, J. Wallis, Jacques Bernoulli, L. Euler, Chr. Huygens, G. Leibniz. Astăzi analiza combinatorie cunoaşte o dezvoltare rapidă, apariţia unor metode noi fiind stimulată de utilizarea calculatoarelor electronice. Are aplicaţii în teoria probabilităţilor şi în alte capitole ale matematicii, precum şi în fizică, biologie, ştiinţe sociale. Denumirea provine de la titlul lucrării lui G. Leibniz *Dissertatio de arte combinatoria* (1666). *(V.B., A.B.)*

analiză matematică, ramură a matematicii bazată pe noţiunea de limită şi de funcţie. Cuprinde calculul diferenţial, calculul integral, studiul ecuaţiilor diferenţiale, al ecuaţiilor cu derivate parţiale, studiul seriilor, calculul variaţiilor, teoria funcţiilor de variabilă reală, de variabilă complexă, teoria ecuaţiilor integrale, analiza numerică, analiza funcţională, topologia. Calculul diferenţial şi integral s-a născut din probleme de geometrie, de rectificare a curbelor, de carare şi cubatură, de determinarea tangentei într-un punct la o curbă, de determinarea maximelor şi minimelor şi de probleme de mecanică, de exemplu, de calcularea vitezei. Astfel de probleme erau rezolvate prin metode particulare, utilizînd noţiunea de limită, de către Eudoxos (?408—355 î.e.n.), Arhimede (287—212 î.e.n.), Pappus (sec. 3), Al-Haisam (?965—1039), Paul Guldin (1577—1643), Gregoire de St. Vincent (1584—1667), Bonaventura Cavalieri (?1591—1647), René Descartes (1596—1650), Pierre Fermat (1601—1665), Gille Roberval (1602—1675), John Wallis (1616—1703), Nikolas Kaufmann (Mercator) (1620—1687), Blaise Pascal (1623—1662), Pietro Mengoli (?1626—1686), James Gregory (1638—1675) ş.a. care sînt precursorii analizei matematice. Calculul diferenţial şi integral a fost creat de Isaac Newton (1642—1727) şi Wilhelm Leibniz (1646—1716) care, în jurul anului 1670, au elaborat reguli generale de derivare şi de integrare pe care le-au aplicat în mecanică şi geometrie. Jean Bernoulli (1667—1748) a dat regula de calcul pentru formele nedeterminate, a integrat ecuaţia diferenţială omogenă, a dat ecuaţia diferenţială a geodezicelor unei suprafeţe şi primul exemplu de calcul variaţional arătînd că cicloida este o curbă brahistocronă. În secolul 18 s-a completat tabelul derivatelor funcţiilor elementare şi integralelor lor, exprimabile în funcţii elementare. Leonhard Euler (1707—1783) a introdus integrala dublă, funcţiile beta şi gama; Thomas Simpson (1710—1761) a dat formula de calcul aproximativ al unei integrale; Joseph Lagrange (1736—1813) a dat formula mediei şi a intro-

dus integrala triplă. S-au pus bazele teoriei seriilor; Brook Taylor (1685—1731) a dat, în 1712, dezvoltarea în serie de puteri a unei funcţii de o variabilă; Jean D'Alembert (1717—1783) a stabilit un criteriu de convergenţă al seriilor numerice; L. Euler a iniţiat teoria seriilor trigonometrice, a introdus funcţiile cilindrice, a dat o formulă asimptotică pentru seria armonică; J.L. Lagrange a dat formula restului seriei Taylor, a extins formula Taylor la n variabile; Adrien Legendre (1752—1833) a introdus polinoamele care-i poartă numele; Joseph Fourier (1768—1830) a dat dezvoltarea unei funcţii periodice în serie trigonometrică. S-au rezolvat problemele fundamentale în teoria ecuaţiilor diferenţiale: Jacopo Riccati (1676—1754) a integrat o ecuaţie particulară prin transformări algebrice; L. Euler a studiat ecuaţia Riccati generală, a dat metoda de integrare a ecuaţiilor diferenţiale lineare omogene cu coeficienţi constanţi, a introdus noţiunea de integrală generală şi particulară; Alexis Clairaut (1713—1765) a integrat o ecuaţie diferenţială, care-i poartă numele, scoţînd în evidenţă o integrală singulară, a stabilit condiţia în care o expresie este diferenţială exactă, a dat proprietatea caracteristică a factorului integrant; D'Alembert a integrat sistemele lineare de ecuaţii diferenţiale, a dat o metodă de reducere a ecuaţiei diferenţiale de ordin superior la un sistem de ecuaţii diferenţiale de primul ordin, a generalizat ecuaţia Clairaut iar J.L. Lagrange a dat metoda variaţiei constantelor pentru obţinerea unei integrale particulare a unei ecuaţii diferenţiale, metoda de reducere a ordinului unei ecuaţii diferenţiale cunoscînd un număr de integrale particulare, o metodă de integrare aproximativă prin dezvoltări în serie. Simon Laplace (1749—1827) a introdus funcţiile sferice ca soluţii ale unei ecuaţii diferenţiale şi a arătat că orice funcţie este desfăşurabilă după funcţii sferice. A fost iniţiat studiul ecuaţiilor cu derivate parţiale: D'Alembert a integrat o ecuaţie particulară de ordinul doi a coardelor vibrante, arătînd că soluţia depinde de funcţii arbitrare; J.L. Lagrange a dat o metodă generală de integrare a ecuaţiei cu derivate parţiale, de ordinul întîi, în trei variabile, metoda multiplicatorilor pentru determinarea extremelor unei funcţii de mai multe variabile, o metodă de integrare aproximativă prin dezvoltări în serie; Gaspard Monge (1746—1816) a dat o interpretare geometrică a soluţiilor ecuaţiilor cu derivate parţiale, indicînd o metodă geometrică de integrare, a dat metoda caracteristicelor; S. Laplace a studiat unele ecuaţii cu derivate parţiale de ordinul al doilea, a introdus laplacianul:

$$\Delta\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}$$

care se anulează pentru funcţiile armonice; A. Legendre a introdus transformările de contact şi a completat metoda lui S. Laplace, referitoare la integrarea ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea. Au fost rezolvate acum problemele fundamentale de calcul variaţional prin lucrările lui L. Euler, J.L. Lagrange, A. Legendre. Tot în secolul 18 au fost iniţiate unele domenii noi: D'Alembert a considerat primul exemplu de funcţie de variabilă complexă iar L. Euler a dat condiţiile de monogenitate şi a studiat funcţiile elementare de variabilă complexă. A. Legendre a studiat integralele eliptice. D'Alembert a dat un exemplu de ecuaţie funcţională. În secolul 19 au fost continuate problemele rămase deschise. Convergenţa seriilor a fost studiată de Karl Gauss (1777—1855), Augustin Cauchy (1789—1857), Niels Abel (1802—1829), Augustus De

Morgan (1806—1871), Eduard Kummer (1810—1893), Joseph Bertrand (1822—1900), Ernesto Cesaro (1859—1906). Integralele curbilinii şi de suprafaţă au fost studiate de K. Gauss, A. Cauchy, George Green (1793—1841), Mihail Ostrogradski (1801—1861), George Stokes (1819—1903). Au adus noi contribuţii în teoria ecuaţiilor diferenţiale K. Gauss, Simeon Poisson (1781—1840), A. Cauchy, Karl Jacobi (1804—1851), Joseph Liouville (1809—1882), Lazarus Fuchs (1833—1902). Au dezvoltat teoria ecuaţiilor cu derivate parţiale Friedrich Pfaff (1765—1825), K. Jacobi, Hermann Grassmann (1809—1877), Gaston Darboux (1842—1917), Sofia Kovalevski (1850—1891). Calculul variaţional a fost continuat de K. Gauss, S. Poisson, K. Jacobi, Hermann Schwarz (1843—1921). În teoria interpolării au adus noi contribuţii K. Gauss, Friedrich Bessel (1784—1846), A. Cauchy. Funcţiile sferice au fost cercetate de K. Gauss, S. Poisson, Fr. Bessel, K. Jacobi, Lejeune Dirichlet (1805—1859). Seriile Fourier au fost cercetate de A. Cauchy, L. Dirichlet. Secolul 19 reprezintă punctul de vedere al fundamentării riguroase a analizei prin lucrările lui K. Gauss, Bernhard Bolzano (1781—1848), A. Cauchy. Au fost studiate problemele de existenţă ale integralelor ecuaţiilor diferenţiale şi cu derivate parţiale de către A. Cauchy, Otto Lipschitz (1832—1903), Emmile Picard (1856—1941). S-au deschis apoi numeroase domenii noi. A. Cauchy a studiat sistematic ecuaţiile funcţionale pe care Vito Volterra (1860—1940) le-a reluat din punct de vedere modern. Au fost introduse ecuaţiile integrale prin lucrările lui V. Volterra, David Hilbert (1862—1943), Ivar Fredholm (1866—1927). S-a creat teoria mulţimilor prin lucrările lui B. Bolzano, Eduard Heine (1821—1882), Georg Cantor (1845—1918). Îndeosebi în secolul 19, a fost trasată teoria funcţiilor de variabilă complexă, prin lucrările fundamentale ale lui A. Cauchy, continuate de Pierre Laurent (1813—1854), Karl Weierstrass (1815—1897), Karl Neumann (1832—1925), Gosta Mittag Leffler (1846—1927). Funcţiile eliptice au fost studiate de K. Gauss, N. Abel, K. Jacobi, Joseph Liouville (1809—1882), K. Weierstrass, C.A. Briot (1817—1882), J.C. Bouquet (1819—1885), Charles Hermite (1882—1901), Max Eisenstein (1823—1852), Enrico Betti (1823—1892), Bernhard Riemann (1826—1866), Faa de Bruno, H. Schwarz, Paul Appell (1855—1930). Funcţiile algebrice au fost studiate de N. Abel, K. Jacobi, K. Weierstrass, Victor Puiseux (1820—1883), Ch. Hermite, B. Riemann. În secolul 20 au obţinut rezultate remarcabile: Edouard Goursat (1858—1936), Aleksei Krîlov (1863—1945), Jacques Hadamard (1865—1963), Felix Hausdorff (1868—1942), Emile Borel (1871—1956), Constantin Caratheodory (1873—1950), René Baire (1874—1932), Henri Lebesgue (1875—1941), Paul Montel (n. 1876), Maurice Frechet (n. 1878), Serghei Bernstein (1880—1968), Nikolai Luzin (1883—1950), Arnauld Denjoy (n. 1884), Nikolai Mushelişvili (n. 1891), Ştefan Banach (1892—1945), Kazimirz Kuratowski (n. 1896), Stanislas Saks (1897—1942), Mihail Levrentiev (n. 1900), Jean Dieudonné (n. 1906), Izidor Natanson (1906—1964), Aleksei Markuşevici (n. 1908), Nikolai Bogoliubov (n. 1909), Aleksei Liapunov (n. 1911), colectivul N. Bourbaki. În ţara noastră importante contribuţii în domeniul analizei matematice au adus: Dimitrie Pompeiu (1873—1954), Constantin Popovici (1879—1958), Traian Lalescu (1882—1929), Simion Stoilow (1887—1961), Alexandru Froda (n. 1895), Mihail Ghermănescu

(1899—1962), Dumitru V. Ionescu (n. 1901), Alexandru Ghica (1902—1964), Gheorghe Călugăreanu (n. 1902), Nicolae Ciorănescu (1903—1957), Miron Nicolescu (n. 1903), Grigore Moisil (1906—1973), Tiberiu Popoviciu (n. 1906), Mendel Haimovici (1906—1973), Nicolae Teodorescu (n. 1908), Caius Iacob (n. 1912), Gheorghe Marinescu (n. 1919) ş.a. *(N.M.)*

analiză numerică, capitol al matematicii avînd ca obiect rezolvarea efectivă a ecuaţiilor, a sistemelor de ecuaţii, a ecuaţiilor diferenţiale etc., care apar în ştiinţele tehnice sau în alte domenii ce utilizează matematica. Pentru rezolvarea aproximativă a unor ecuaţii de forma $f(x) = 0$ se poate utiliza, de exemplu, metoda coardei sau metoda tangentei. În ultimele decenii, analiza numerică a căpătat o dezvoltare deosebită şi s-a îmbogăţit cu aspecte noi datorită apariţiei şi perfecţionării calculatoarelor electronice. Şcoala românească de analiză numerică îşi datorează dezvoltarea lui Gr. C. Moisil şi Tiberiu Popoviciu. Se mai numeşte *calcul numeric*. *(V.B.)*

Angelescu, Aurel (1886—1938), matematician român. Studii la Paris (doctor la Sorbona, 1916). Profesor la Universitatea din Cluj (agregat din 1919, titular din 1922) şi Bucureşti (din 1930). Contribuţii privind diferite clase de polinoame şi funcţiile lor generatoare (generalizînd polinoamele lui Legendre, Hermite, Appell, Laguerre), integrarea ecuaţiilor diferenţiale liniare, seriile trigonometrice. Op. pr.: *Lecţiuni de calcul diferenţial*, 1927. *(V.B.)*

Angheluţă, Theodor (1882—1964), matematician român. Studii la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti (doctor, 1922) şi la Facultatea de Ştiinţe din Paris, unde îl are ca profesor pe E. Picard. Profesor la Universitatea din Cluj (din 1923) şi la Institutul politehnic din Cluj (din 1955). Contribuţii în domeniul teoriei funcţiilor, al ecuaţiilor integrale, al ecuaţiilor funcţionale (dînd ecuaţia funcţională ce caracterizează polinoamele şi care îi poartă numele) şi al ecuaţiilor algebrice (referitoare la modulele rădăcinilor). Op. pr.: *Curs de algebră superioară* (vol. I, 1940; vol. II, 1943), *Curs de teoria funcţiilor de o variabilă complexă* (1940); *Funcţii analitice* (1945). *(V.B.)*

antilogaritm [gr. *anti* „contrar, opus"; *logaritm*] (al unui număr), număr al cărui logaritm este egal cu numărul dat. Ex.: antilogaritmul lui 0,30103 este 2 (deoarece $\log_{10} 2 = 0{,}30103$). *(V.B.)*

antiparalele → drepte antiparalele

antipodară, curbă (C') a cărei podară în raport cu un punct P este o curbă dată (C). Ex.: antipodara unui cerc cu centrul în O în raport cu un punct P (care nu aparţine cercului) este o elipsă sau o hiperbolă, după cum punctul P este interior sau exterior cercului, acestea avînd ca focare punctul P şi simetricul acestuia faţă de centrul O al cercului dat. Conceptul de antipodară i se datorează lui C. Maclaurin (1720), iar denumirea lui O. Terquem (1848). *(V.B.)*

anulare, faptul că o expresie matematică (funcţie, polinom), depinzînd de anumite variabile (respectiv nedeterminate), devine egală cu zero prin înlocuirea variabilelor (respectiv nedeterminatelor) cu anumite valori (respectiv elemente). *(A.B., V.B.)*

apartenenţă, relaţie între un element a şi mulţimea A, din care el face parte, ceea ce se scrie: $a \in A$ (citindu-se „a aparţine lui A"). Faptul că a nu aparţine lui A se notează: $a \notin A$. Semnul apartenenţei „$\in$" a fost introdus de G. Peano (1897). *(V.B.)*

aplicarea ariilor, metodă antică de rezolvare, cu ajutorul ariilor patrulaterelor simple, a unor probleme care, în limbaj modern, revin la rezolvarea unor ecuații. Trei probleme rezolvate prin această metodă, și incluse în *Elementele* lui Euclid (sec. 3 î.e.n.), au dus, datorită lui Apollonius (sec. 3 î.e.n.), la denumirea de parabolă, elipsă, hiperbolă, pentru conice: a) fiind date un segment de lungime p și o arie egală cu y^2, să se construiască un segment x, în așa fel încît dreptunghiul construit pe laturile p și x să aibă aria y^2, ceea ce conduce la ecuația unei parabole $y^2 = px$ [gr. *parabole* „comparare"]; b) fiind date segmentele a și y și un număr real m să se construiască un segment x, astfel încît aria pătratului de latură y să fie egală cu aria dreptunghiului de laturi a și x, mai puțin aria pătratului de latură mx, ceea ce conduce la ecuația unei elipse, $y^2 = ax - mx^2$ [gr. *elleipsis* „lipsă"]; c) fiind date segmentele a și y, să se construiască un segment x, astfel încît aria pătratului de latură y să fie egală cu aria dreptunghiului de laturi a și x plus aria pătratului de latură x, ceea ce conduce la ecuația unei hiperbole $y^2 = ax + x^2$ [gr. *hyperbole* „exces"]. *(V.B.)*

aplicație [lat. *applicatio* „acțiunea de a lega] → **funcție**

aplicație liniară, funcție $f: M \to N$, unde M și N sînt module peste un inel A, avînd proprietățile:
a) pentru orice $x, y \in M$: $f(x + y) = f(x) + f(y)$ (aditivitate);
b) pentru orice $x \in M$ și $a \in A$: $f(ax) = af(x)$ (omogenitate). *(A.B., V.B.)*

apogeu [gr. *apo* „departe", *ge* „pămînt"], punctul cel mai depărtat de Pămînt al traiectoriei unui corp (de ex. Luna sau un satelit artificial) care se mișcă sub influența preponderentă a acestuia. *(Șt. G.)*

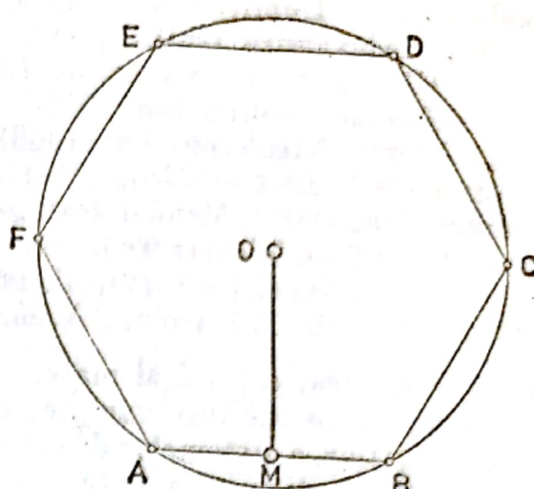


Fig. 3

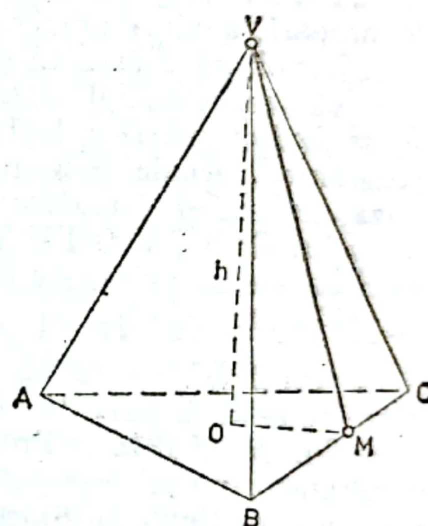


Fig. 4

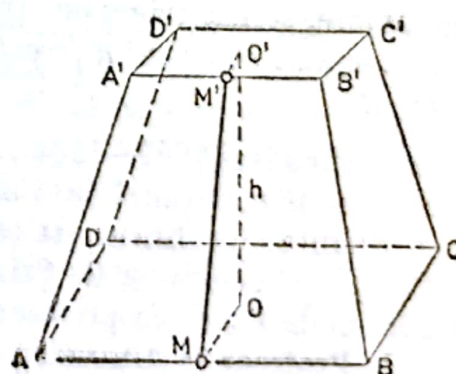


Fig. 5

Apollonius (c. 262—c. 200 î.e.n.), geometru şi astronom grec. A trăit cea mai mare parte a vieţii sale în Alexandria. Este considerat al treilea şi ultimul mare matematician din perioada elenistică, alături de Arhimede şi Euclid. Opera sa fundamentală, în opt volume, *Conica* (din care s-au păstrat primele şapte volume) numără 387 de propoziţii; aici, pentru prima dată apar denumirile celor trei conice — elipsa, hiperbola, parabola — şi sînt prezentate numeroase dintre proprietăţile lor, precum şi unele noţiuni noi ca: vîrfurile secţiunii conice, diametrii, axe, focare, normale. În această lucrare, Apollonius, utilizînd algebra geometrică, anticipează metoda geometriei analitice, prin folosirea liniilor de coordonate. Alte lucrări (citate de Pappus, sec. 3): *Locuri plane*, unde sînt definite întîia oară omotetia şi inversiunea; *Despre secţionarea într-un raport dat*; *Despre tangente*; *Okytokion*, în care este dată o valoare aproximativă a numărului π cu patru zecimale exacte $\left(\pi = \frac{62832}{20000}\right)$; *Despre oglinzile incendiatoare*. *(V.B.)*

apotemă [gr. *apotithenai* „a coborî"] **1.** (Pentru un poligon regulat). Segmentul de dreaptă care uneşte centrul poligonului cu mijlocul unei laturi (fig. 3). **2.** (Pentru o piramidă regulată). Segmentul de dreaptă care uneşte vîrful piramidei cu mijlocul uneia dintre laturile bazei (fig. 4). **3.** (Pentru un trunchi de piramidă regulată). Segmentul de dreaptă care uneşte mijloacele a două laturi ale poligoanelor bazelor, de pe o aceeaşi faţă laterală (fig. 5). Denumirea a fost propusă de Eutokios (sec. 6 î.e.n.). *(V.B.)*

Appell, Paul (1855—1930), matematician şi mecanician francez. Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Paris. Membru al Academiei Franceze de Ştiinţe şi membru de onoare al Academiei Române (1914). Activitatea sa ştiinţifică a fost consacrată mecanicii (unde a dat ecuaţiile care-i poartă numele, pentru studiul sistemelor neolonome) şi analizei matematice (metodă de calcul aproximativ pentru integrale duble, serii de polinoame care-i poartă numele, cosinusurile Appell ce intervin în teoria ecuaţiilor funcţionale). Op. pr.: *Traité de Mécanique Rationelle*, 5 vol., 1893—1903; *Eléments d'Analyse Mathématique*; *Théorie des fonctions algébriques et leurs intégrales*, 1929 (în colab.). *(V.B.)*

aproximare [lat. *approximare* „a apropia"], operaţie de determinare a unui element dintr-un spaţiu metric a cărui distanţă faţă de un element dat să fie mai mică decît un număr pozitiv dat. Ex.: 1,41 este o aproximare pentru $\sqrt{2}$ cu o eroare mai mică decît 10^{-2}; o integrală definită poate fi aproximată prin metoda trapezelor (→ *integrare*); o funcţie continuă $f(x)$: $[a, b] \to \mathbf{R}$ poate fi aproximată printr-un polinom $P(x)$, $|f(x) - P(x)| < \varepsilon$, pentru orice $\varepsilon > 0$ şi $x \in [a, b]$. Aproximarea se desemnează prin simbolul $\approx$, propus de A. Kratzer (1923). — *Metoda aproximaţiilor succesive*, metodă de aproximare a soluţiei F a unei ecuaţii prin construirea unui şir convergent către F. Metoda se bazează pe aplicarea unor teoreme de punct fix. Ex.: soluţia ecuaţiei $f(x) = x$, unde $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ este o funcţie cu proprietatea: $|f(x) - f(y)| \leqslant \alpha |x - y|$ $(0 < \alpha < 1)$, pentru orice $x, y \in \mathbf{R}$, este dată de limita şirului de aproximaţii succesive $x_1 = f(x_0)$, $x_{n+1} = f(x_n)$, $n = 1, 2, \ldots$, unde x_0 este arbitrar. Metoda este folosită (după exemplele iniţiate de J. Liouville, E. Picard şi Tr. Lalescu) la demonstrarea teoremelor de existenţă a soluţiei pentru ecuaţiile diferenţiale, cu derivate parţiale sau integrale. *(A.B., V.B.)*

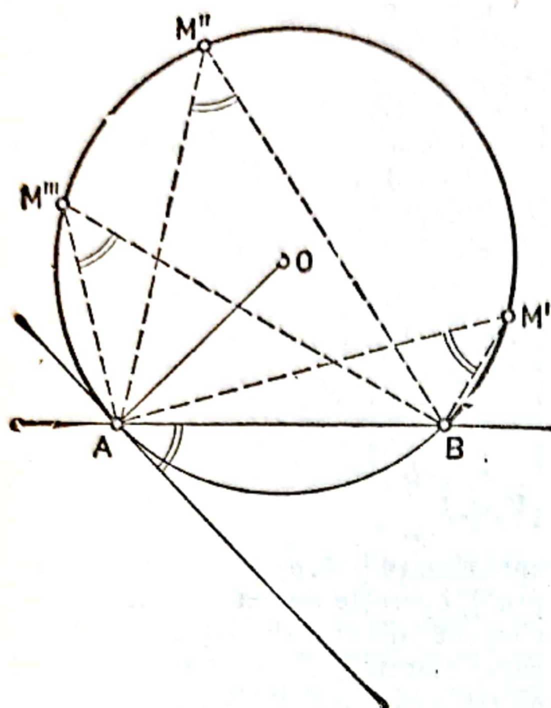


Fig. 6

aranjamente de n luate cîte k (n şi k numere naturale şi $n \geqslant k$; A_n^k), numărul aplicaţiilor injective ale unei mulţimi cu k elemente, într-o mulţime cu n elemente. Se calculează după formula:

$$A_n^k = n(n-1) \dots (n-k+1)$$

sau

$$A_n^k = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

A_n^k este egal cu numărul grupelor ordonate de cîte k elemente distincte ce se pot forma cu n elemente. — *Aranjamente cu repetiţie de n luate cîte k* (n şi k numere naturale, $\bar{A}_n^k$), numărul aplicaţiilor unei mulţimi cu k elemente într-o mulţime cu n elemente. Se calculează cu formula $\bar{A}_n^k = n^k$. Reprezintă numărul grupelor ordonate de cîte k elemente (distincte sau nu), ce se pot forma cu n elemente. Cu studiul aranjamentelor s-a ocupat pentru prima dată Jacques Bernoulli (*Ars conjectandi*, 1713), căruia i se datorează şi denumirea. Simbolul A_n^k a fost introdus de E. Netto (1901). *(V.B.)*

arc capabil de unghi dat, locul geometric al punctelor dintr-un semiplan din care un segment dat se vede sub un unghi constant. Este un arc de cerc cu aceleaşi extremităţi ca şi ale segmentului dat (fig. 6). *(V.B.)*

arc de curbă, porţiune dintr-o curbă cuprinsă între două puncte ale ei. Pentru o curbă dată de ecuaţiile parametrice $x = f(t), y = g(t), (a \leqslant t \leqslant b)$, unde $f(t)$ şi $g(t)$ sînt funcţii cu prima derivată continuă, lungimea arcului este (după A. Cauchy):

$$L_{(ab)} = \int_a^b \sqrt{f'^2(t) + g'^2(t)}\, dt.$$

— *Arc de cerc* ($\widehat{AB}$), porţiune de cerc cuprinsă între două puncte ale sale. Lungimea unui arc de cerc este:

$$L_{AB} = \frac{r \cdot n^\circ}{180^\circ} = r \cdot m^{\mathrm{rd}},$$

unde n° şi m^{rd} reprezintă măsura arcului exprimată în grade sexagesimale, respectiv în radiani, iar r este raza cercului. Notaţia $\widehat{AB}$ a unui arc de cerc avînd extremităţile A şi B a fost folosită iniţial de Plato Tivoli (1116) şi s-a statornicit datorită lui P. Hérigone (1644). *(V.B.)*

argument [lat. *argumentum* „dovadă, semn, indiciu"] **1.** (Pentru o funcţie) → *funcţie*. **2.** (Pentru un număr complex). Unghi orientat, format de axa Ox şi raza vectoare a punctului ce reprezintă imaginea geometrică a numărului complex dat (fig. 7). Ex.: numărul complex $z = \sqrt{3} + i = 2(\cos 30^\circ + i \sin 30^\circ)$ are argumentul de 30°. *(V.B.)*

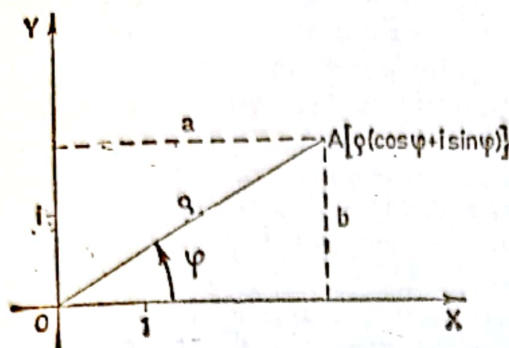


Fig. 7

Arhimede (c. 287—212 î.e.n.), matematician şi fizician grec. A trăit la Alexandria şi Siracuza. Unul dintre cei mai mari savanţi ai antichităţii. A inventat scripetele compus, şurubul fără sfîrşit, sisteme de pîrghii, oglinzile concave; a descoperit principiul fundamental al hidrostaticii, a introdus noţiunea de greutate specifică, a construit un planetarium ce reproducea fazele Lunii, mişcarea Pămîntului şi a planetelor, eclipsele. Lucrările sale cuprind o întinsă gamă de preocupări: *Despre echilibrul planelor*, în care sînt expuse principiile mecanicii teoretice, cu problema determinării centrelor de greutate; *Despre secţiunea conului dreptunghiular*, unde a făcut cuadratura parabolei, pentru care este considerat precursor al calculului integral; *Scrisoarea către Eratostene despre metoda mecanică de rezolvare a problemelor de geometrie*; *Despre sferă şi cilindru*; *Despre spirale*; *Despre conoizi şi sferoizi*; *Despre corpurile plutitoare*; *Măsurarea cercului*, în care dă o aproximare pentru π şi prezentarea în cuvinte a formulei lui Heron; *Numărarea grăunţelor de nisip*, unde este expus un procedeu de exprimare a numerelor foarte mari; *Despre pîrghii*; *Despre construirea sferei cereşti* ş.a. *(V.B.)*

arie [lat. *area* „loc pătrat, suprafaţă"], număr pozitiv asociat unui domeniu cu două dimensiuni, ca măsură a lui. Aria unui poligon este un număr pozitiv ataşat poligonului satisfăcînd următoarele axiome: a) două poligoane egale au arii egale; b) poligonului sumă a două poligoane îi corespunde suma ariilor celor două poligoane; c) aria pătratului cu latura egală cu unitatea de măsură a lungimilor este egală cu 1. Aceste axiome asigură că numărul care exprimă aria unui poligon există şi este unic. Pornind de la aria dreptunghiului, dedusă cu ajutorul axiomelor, ca fiind egală cu produsul dimensiunilor lui, şi folosind noţiunea de poligoane echivalente, se stabilesc ariile paralelogramului, triunghiului, rombului, trapezului, a unui poligon oarecare. Aria unui domeniu nepoligonal se defineşte printr-un proces de aproximare cu figuri poligonale. Unitatea de măsură pentru arie, în sistemul M.K.S., este metrul pătrat: m^2. Denumirea îşi are obîrşia în termenul babilonian *a-sa* „produs", ceea ce se justifică prin faptul că în calculul unei arii intervine produsul a două dimensiuni. *(V.B.)*

aritmetică [gr. *arithmos* „număr"], ramură a matematicii care studiază operaţiile şi proprietăţile numerelor; conţine teoria numerelor întregi, a numerelor raţionale, iraţionale şi diferite extinderi ale noţiunii de număr. Se referă la problemele de divizibilitate, teoria numerelor prime, rezolvarea ecuaţiilor în numere întregi etc. Continuarea aritmeticii pe un plan superior este *teoria numerelor*. Adunarea şi scăderea numerelor naturale era efectuată încă din antichitate după procedeele actuale, aşa cum reiese din cele mai vechi documente egiptene şi caldeene (2000 î.e.n.). Înmulţirea şi împărţirea, la egipteni, erau efectuate dublînd şi înjumătăţind mereu, iar la caldeeni, după tabele. Egiptenii utilizau şi fracţiile cu numărătorul 1 iar caldeenii, pe cele cu numitorul 60; ultimii aproximau pe $\sqrt{2}$ şi $\sqrt{3}$ la 1,41 respectiv 1,75, iar pe π la 3,16. Se cunoştea de asemenea

suma termenilor progresiilor aritmetice şi geometrice, precum şi calculul procentelor. Aritmetica a cunoscut o dezvoltare deosebită în Grecia antică. În şcoala lui Pitagora (580—500 î.e.n.) erau cunoscute numerele prime, cel mai mare divizor comun şi cel mai mic multiplu comun, era rezolvată în numere întregi ecuaţia $x^2 + y^2 = z^2$; Eudoxos (? 408—355 î.e.n.) a pus bazele teoriei numerelor raţionale iar Teetet (? 414—369 î.e.n) a numerelor iraţionale. Aceste rezultate au fost incluse în *Elementele* lui Euclid (sec. 3 î.e.n.), care a completat teoria divizibilităţii, dînd algoritmul de obţinere prin împărţiri succesive a celui mai mare divizor comun şi descompunerea în factori primi. Arhimede (287—212 î.e.n.) a dat valoarea aproximativă 3,14 pentru π precum şi regula scrierii numerelor foarte mari. Eratostene (? 275—194 î.e.n.) a dat un procedeu de construire a unui tabel de numere prime. Teon (sec. 2 î.e.n.) a dat primele exemple de teoreme sub formă negativă, specifice în teoria numerelor, afirmînd că nu există pătrate perfecte de formele $3n + 2$, $4n + 2$, $4n + 3$. Nicomah (sec. 1) a arătat că orice pătrat perfect este suma a două numere triunghiulare. Diofant (sec. 3) a dovedit o deosebită abilitate în rezolvarea sistemelor lineare prin eliminarea verbală succesivă a necunoscutelor, a rezolvat în numere raţionale ecuaţii lineare, pătrate şi de ordin superior, a afirmat că orice număr natural este suma a cel mult patru pătrate perfecte etc. În evul mediu, indienii aveau un cult deosebit pentru proprietăţile numerelor naturale. Ariabhata (475 —?) a dat, în cartea lui, regula extragerii rădăcinii pătrate şi cubice, regula de trei, proba prin 9, a calculat suma pătratelor şi cuburilor numerelor naturale; Brahmagupta (598—660) a introdus cifra zero şi opera cu numere iraţionale complicate; Bhaskara (? 1114—1178) a rezolvat în numere întregi ecuaţii lineare şi pătratice. În ţările de limbă arabă s-au introdus simboluri speciale pentru fiecare cifră; Al-Horezmi (? 780—850) a expus numeraţia poziţională şi regulile corespunzătoare de calcul; Abul Vefa (940—998) a dat reguli de calcul cu numere zecimale; Omar Khayyam (1036—1123) cunoştea coeficienţii puterii binomului; Al-Kaşi (sec. 14) relaţiile generale dintre coeficienţi; el a dat şi regulile de calcul cu puteri şi radicali. În Europa, Leonardo Pisano (Fibonacci) (? 1170—1240) a scris în 1202 o sinteză a cunoştinţelor de aritmetică, cu numeroase probleme proprii, introducînd şirul numerelor definit printr-o relaţie de recurenţă, care exprimă legea creşterii organice. În Renaştere, Antonio Cataldi (1552—1626) a introdus fracţiile continui; Pierre Fermat (1601—1665) a rezolvat în numere întregi unele ecuaţii pătratice, a arătat că dacă p este număr prim şi a prim cu p, atunci $a^{p-1} - 1 =$ mult. p., a enunţat că ecuaţia $x^n + y^n = z^n$ nu are soluţii în numere întregi pentru $n > 2$, teoremă încă nedemonstrată; John Wallis (1616—1703) a dat numărul şi suma divizorilor unui număr dat. În secolul 18, Cristian Goldbach (1690—1764) a enunţat, în 1742, teorema încă nedemonstrată că orice număr par este suma a două numere prime; Heinrich Lambert (1728—1777) a arătat că π nu este număr raţional, închizîndu-se astfel problema cuadraturii cercului; Eduard Waring (1734—1798) a enunţat teorema, încă nedemonstrată, că orice număr natural este o sumă de puteri de ordinul n de cel mult p numere naturale, p depinzînd de n; Adrien Legendre (1752—1833) a stabilit o formulă empirică pentru determinarea numărului numerelor prime dintr-un interval, a introdus funcţia discontinuă, parte întreagă a unui număr real. În secolul 19, Joseph Liouville (1809—1882) a introdus

numerele transcendente, iar Charles Hermite (1822—1901) şi Ferdinand Lindemann (1852—1939) au arătat că numerele e, respectiv π sînt transcendente. Georg Cantor (1845—1918) a introdus numerele transfinite. Joseph Bertrand (1822—1900), Lejeune Dirichlet (1805—1859), Bernhard Riemann (1826—1866), Pafnuti Cebîşev (1821—1894) au studiat distribuţia numerelor prime, Richard Dedekind (1831—1916), Karl Weierstrass (1815—1897), Cantor, Eduard Heine (1821—1882) au adîncit studiul numerelor iraţionale. Karl Gauss (1777—1855) a introdus congruenţele şi numerele complexe întregi. Dirichlet a iniţiat teoria analitică a numerelor, iar Hermann Minkowschi (1866—1909) teoria geometrică. În secolul 20 au obţinut rezultate remarcabile Harold Hardy (1877—1947), Waclaw Sierpinski (1882—1970), Scrinivasa Ramanujan (1887—1920), L. J. Mordell (1888—1963), Lev Snirelman (1905—1938), Aleksandr Gelfond (1906—1968). În ţara noastră, au adus contribuţii importante în teoria numerelor Dan Barbilian (1895—1961), Gabriel Sudan (n. 1899) ş.a. *(N.M.)*.

aritmograf [gr. *arithmos* „număr", *graphein* „a scrie"], aparat care efectuează mecanic şi totodată înregistrează operaţii aritmetice. Primele aritmografe se datorează lui E. F. Gattey (1810). *(V.B.)*

aritmometru [gr. *arithmos* „număr", *metron* „măsură"], aparat pentru efectuarea operaţiilor aritmetice elementare, folosit în special în geodezie. Inventat de B. Pascal (1642) şi folosit pentru efectuarea operaţiilor de adunare şi scădere, este perfecţionat de G. Leibniz (1671), pentru a efectua cele patru operaţii aritmetice, şi ulterior, de Th. de Colmar (1820). *(V.B.)*

asamblor [fr. *assembleur*], program ce prelucrează instrucţiunile scrise într-un limbaj simbolic orientat către calculator, schimbîndu-le în coduri ale limbajului maşină. Această traducere se realizează de obicei în raport de unu la unu, fiecare instrucţiune din limbajul simbolic de programare fiind tradusă într-o singură instrucţiune în limbajul maşină. *(T.B.)*

asemănare [lat. (as)*similis* „asemenea"], corespondenţă biunivocă între punctele a două figuri, astfel încît raportul dintre distanţa a două puncte ale unei figuri şi distanţa dintre cele două puncte omoloage ale celeilalte figuri să fie un număr constant k, numit *raport de asemănare*. Figurile asemenea au unghiurile corespunzătoare egale, iar laturile omoloage sînt proporţionale. Raportul dintre perimetrele, ariile, volumele a două figuri asemenea poate fi exprimat în funcţie de raportul de asemănare:

$$\frac{P(F')}{P(F)} = k, \quad \frac{A(F')}{A(F)} = k^2,$$

$$\frac{V(F')}{V(F)} = k^3.$$

Notaţia relaţiei de asemănare este, după propunerea lui G. W. Leibniz, semnul „ ∼" („tilda" amintind iniţiala S a cuvîntului *similis)*. Considerarea figurilor asemenea (iniţial, a triunghiurilor) se datorează lui Tales (sec. 6 î.e.n.). *(V.B.)*

asimptotă [gr. *a* „fără", *simptotos* „a se contopi, a coincide"], dreaptă asociată unei curbe plane, cu puncte în domeniul de la infinit, astfel încît, atunci cînd un punct al curbei se deplasează spre domeniul de la infinit, distanţa lui pînă la dreaptă tinde către zero. Noţiunea de asimptotă (la hiperbola echilateră) se întîlneşte iniţial la Menechmus (sec. 4 î.e.n.); termenul a fost propus de Autolykos (sec. 4 î.e.n.). (→ *curbă asimptotă, plan asimptot)*. — *Asimptotă verticală a graficului unei funcţii*, dreapta

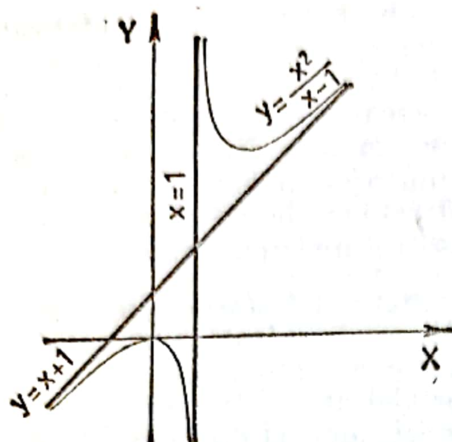


Fig. 8

$x = a$, dacă cel puţin una din limitele laterale ale funcţiei în punctul a este infinită. Pentru existenţa asimptotei verticale nu este necesar ca funcţia să fie definită şi în a. — *Asimptotă oblică a graficului unei funcţii la ramura spre* $+\infty$, dreapta $y = mx + n$, dacă distanţa între dreaptă şi grafic, măsurată pe verticală, tinde către 0 cînd x tinde către $+\infty$:

$$\lim_{x\to\infty} (f(x) - mx - n) = 0, \text{ (fig. 8).}$$

Determinarea coeficienţilor m şi n se face cu ajutorul formulelor:

$$m = \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{x}; \quad n = \lim_{x\to\infty} (f(x) - mx).$$

Dacă $m = 0$, dreapta $y = n$ este *asimptotă orizontală. Asimptota oblică a graficului unei funcţii la ramura spre* $-\infty$ se defineşte analog, înlocuind limitele la $+\infty$ cu limite la $-\infty$. *(V.B.)*

asociativitate [lat. *associare* „a uni, a împreuna"], proprietate a unei operaţii binare $f: M \times M \to M$, notată $f(x, y) = x \circ y$, de a satisface relaţia:

$$x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z,$$

pentru orice $x, y, z \in M$. Proprietatea se poate extinde, prin inducţie, la un număr finit de elemente şi exprimă faptul că prin aplicarea operaţiei unui şir de elemente se obţine acelaşi rezultat, independent de gruparea elementelor şirului. Ex.: adunarea şi înmulţirea numerelor reale, adunarea şi înmulţirea matricelor pătratice, adunarea vectorilor, reuniunea şi intersecţia mulţimilor, compunerea funcţiilor sînt operaţii asociative; scăderea şi împărţirea numerelor reale, produsul vectorial nu sînt asociative. Termenul a fost introdus de W. Hamilton (1837). *(V.B., A.B.)*

astroidă [gr. *astrom* „astru, stea", *eidos* „înfăţişare, formă"], curbă plană, loc geometric al unui punct de pe un cerc care se rostogoleşte (fără alunecare) în interiorul altui cerc fix care are raza a de patru ori mai mare decît a celui mobil. Astroida este o hipocicloidă particulară. Ecuaţiile parametrice ale astroidei sînt:

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t,$$

unde t este unghiul format de raza mobilă a cercului fix, dusă din punctul de tangenţă, cu axa Ox (reperul cartezian, avînd originea în centrul cercului fix, este astfel ales încît pentru $t = 0$ punctul ce descrie astro-

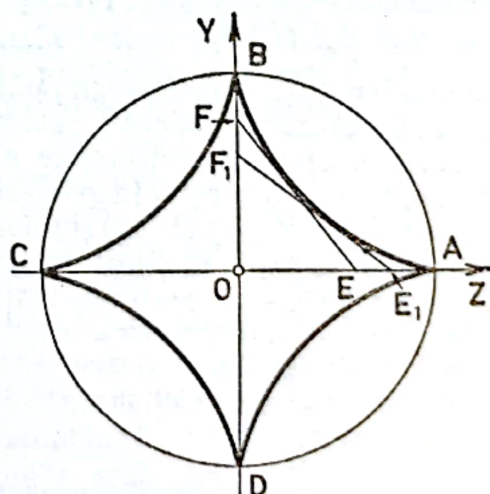


Fig. 9

ida să coincidă cu punctul de tangență) (fig. 9). Ecuația carteziană a astroidei este:

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Lungimea totală a arcului de astroidă este: $6a$, iar aria astroidei este egală cu: $\frac{3\pi a^2}{8}$. Astroida este înfășurătoarea unui segment de mărime constantă care se sprijină cu capetele pe axe. Astroida a fost considerată prima oară de G. Leibniz (1715). *(V.B.)*

automorfism [gr. *autos* „însuși", *morphe* „formă"] → **omomorfism**

axă centrală, locul geometric al punctelor pentru care momentul rezultant al unui sistem de forțe este minim. Notînd X, Y, Z și L, M, N proiecțiile, pe axele unui reper cartezian triortogonal, ale rezultantei și, respectiv, ale momentului rezultant față de originea reperului, ecuațiile axei centrale sînt:

$$\frac{L - yZ + zY}{X} = \frac{M - zX + xZ}{Y} = \frac{N - xY + yX}{Z}. \quad (\text{Șt. G.})$$

axă de coordonate [lat. *axis* „osie"], dreaptă orientată pe care se alege un punct fix, originea, și o unitate de măsură. Denumirea a fost folosită pentru prima dată în această accepție de I. Barrow (1670). *(V.B.)*

axă de rotație, dreaptă în jurul căreia se efectuează o mișcare de rotație. Ex.: înălțimea unui cilindru circular drept, dusă prin centrele bazelor, astfel încît un segment paralel cu ea, prin rotație, generează cilindrul. *(V.B.)*

axă de simetrie → **simetrie (2)**

axă instantanee de rotație (pentru mișcarea paralelă cu un plan a unui solid rigid), normala la acel plan pentru care punctele solidului au viteza zero. *(Șt. G.)*

axă radicală a două cercuri, dreaptă ale cărei puncte au puteri egale față de două cercuri (coplanare, neconcentrice). Pentru două cercuri cu ecuațiile carteziene:

$$(C_1)\ x^2 + y^2 + m_1x + n_1y + p_1 = 0$$

$$(C_2)\ x^2 + y^2 + m_2x + n_2y + p_2 = 0,$$

ecuația axei lor radicale este:

$$(A_r)\ (m_1 - m_2)\,x + (n_1 - n_2)\,y + (p_1 - p_2) = 0.$$

Axa radicală este perpendiculară pe linia centrelor. Dacă cercurile sînt secante, axa radicală este secanta lor comună; dacă cercurile sînt tangente, axa radicală este tangenta comună. Punctul P de intersecție a axei radicale cu linia centrelor cercurilor date, este determinat prin relația:

$$\frac{O_1P}{O_2P} = \frac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{d^2 - R_1^2 + R_2^2},$$

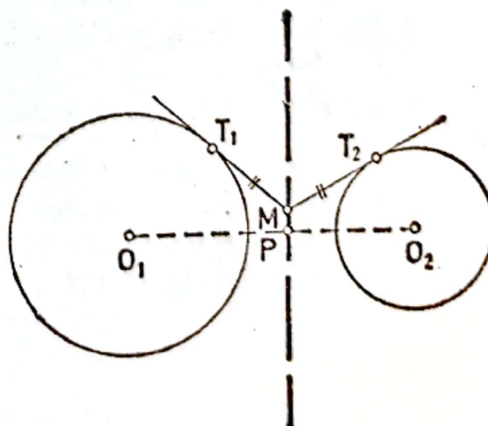


Fig. 10

unde O_1, O_2 sînt centrele cercurilor date, R_1, R_2 razele lor și $d = O_1O_2$ (fig. 10). Denumirea a fost propusă de L. Gaultier (1813). *(V.B.)*

axă radicală a trei sfere, dreaptă ale cărei puncte au puteri egale față de trei sfere (cu centrele necoliniare), fiind perpendiculară pe planul centrelor acestor sfere. Dacă ecuațiile carteziene ale sferelor sînt:

$$(S_1)\ x^2 + y^2 + z^2 + l_1x + m_1y + n_1z + p_1 = 0$$

$$(S_2)\ x^2 + y^2 + z^2 + l_2x + m_2y + n_2z + p_2 = 0$$

$$(S_3)\ x^2 + y^2 + z^2 + l_3x + m_3y + n_3z + p_3 = 0$$

ecuațiile axei radicale au forma:

$$(l_1 - l_2)\,x + (m_1 - m_2)\,y + (n_1 - n_2)\,z + (p_1 - p_2) = 0$$

$$(l_2 - l_3)\,x + (m_2 - m_3)\,y + (n_2 - n_3)\,z + (p_2 - p_3) = 0.$$ *(V.B.)*

axe principale de inerție (relative la un punct O), axele de simetrie ale elipsoidului de inerție corespunzător unui sistem de puncte materiale, față de punctul O. *(Șt. G.)*

axioma eliberării (în cazul unui punct material P): o legătură poate fi înlocuită cu o forță, numită forță de legătură sau reacțiune, sub acțiunea forțelor aplicate și a forței de legătură, P putînd fi tratat ca un punct material liber. Se mai numește *axioma legăturilor* sau *principiul forțelor de legătură*. *(Șt. G.)*

axioma lui Arhimede: oricare ar fi numerele reale $a > 0$ și b se poate găsi un număr natural n, încît $na > b$. Axioma este denumită cu numele lui Arhimede (sec. 3 î.e.n.), dar ea a jucat un rol esențial în lucrările lui Eudoxos (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

axiomă [gr. *axioma* „opinie, teză admisă"], enunț primar într-un sistem axiomatic. Inițial, axiomele au fost propoziții (enunțuri) al căror adevăr era socotit evident, adevăr care își avea originea în practică. Odată cu evoluția științelor, termenul axiomă a încetat să mai evoce ideea de adevăr evident din punct de vedere intuitiv, devenind o propoziție, care împreună cu alte propoziții fixate ale unui sistem axiomatic, permite deducerea tuturor teoremelor unei anumite teorii. Denumirea a fost folosită inițial de pitagoreeni (sec. 6—5 î.e.n.). *(V.B.)*

axonometrie [gr. *axon* „axă", *metron* „măsură"], metodă de reprezentare pe un plan, prin proiecție paralelă, a obiectelor spațiale, împreună cu sistemul de coordonate carteziene la care sînt raportate. Disciplina care are ca obiect studiul reprezentărilor axonometrice a fost întemeiată de W. Farish (1820), iar denumirea ei a fost propusă de M. Mayer (1870). *(V.B.)*

B

Bacaloglu, Emanoil (1830—1891), fizician, chimist și matematician român. Studii superioare la Leipzig și Paris. Profesor de matematică la Colegiul Sf. Sava (din 1861) și de fizică la Universitatea din București (din 1864). Membru al Academiei Române (din 1879). Autorul unor lucrări originale referitoare la curbele sincrone și la curbura suprafețelor, precum și al unor manuale (*Elemente de algebră*, 1866). *(V.B.)*

balistica cerească [fr. *balistique*], ramură a mecanicii care studiază mișcarea corpurilor lansate de pe Pămînt spre diferite obiective din sistemul solar sau din univers. *(Șt. G.)*

Banach, Ștefan (1892—1945), matematician polonez. Profesor la Universitatea din Lwow. Împreună cu Hugo Steinhauss, a întemeiat, în 1929, revista „Studia mathematica". Lucrări de teoria funcțiilor și de analiză funcțională; a introdus importanta noțiune de spațiu liniar normat complet (care îi poartă numele). Op. pr.: *Théorie des opérations linéaires*, 1931. *(V.B.)*

banda lui Möbius, model al unei suprafețe cu o singură față, obținut prin lipirea capetelor unei benzi dreptunghiulare, astfel încît vîrfurile de pe aceeași diagonală să se suprapună. A fost studiată inițial de A. Möbius (1858). Această suprafață prezintă unele particularități interesante, de exemplu: are o singură margine; dacă se taie după o linie mediană se obține un inel răsucit de 360° (nu două benzi). *(V.B.)*

bandă magnetică, suport de informație cu acces secvențial utilizat ca memorie auxiliară sau externă. Este o bandă de plastic, acoperită cu substanță magnetică, iar datele memorate sînt dispuse în mai multe piste paralele. *(T.B.)*

Barbilian, Dan (1895—1961), matematician și poet român (sub pseudonimul *Ion Barbu*). Studii la Facultatea de Științe din București (doctor, 1929) și la Göttingen. Profesor la Facultatea de Științe din București (din 1938). Membru al asociației Deutsche Mathematische Vereinigung. S-a afirmat prin valoroase cercetări privind fundarea axiomatică a geometriei, iar studiile sale asupra metrizării anumitor mulțimi au dus la considerarea unor spații, care îi poartă numele. A publicat lucrări de algebră modernă (teoria grupurilor și structurilor, teoria lui Galois), remarcabile prin originalitatea lor, precum și lucrări de teoria numerelor. Contribuții la axiomatizarea mecanicii. Lucrări de geometrie elementară. Op. pr.: *Teoria aritmetică a idealelor (în inele necomutative)*, 1956; *Grupuri cu operatori (Teoremele de descompunere ale algebrei)*, 1960. *(V.B.)*

baricentru [gr. *barus* „greu", *kentron* „indicator"] → **centru de greutate**

Barrow [bæròu], **Isaac** (1630 — 1677), matematician, filolog şi teolog englez. Profesor de matematică la Universitatea din Cambridge (în 1669 a cedat catedra lui I. Newton, în semn de admiraţie pentru talentul elevului său). Precursor al calculului diferenţial şi integral, fiind primul care a scos în evidenţă caracterul reciproc al problemei determinării tangentei la o curbă (a derivării) şi al problemei cuadraturilor (a integrării); este cel dintîi care a obţinut reducerea la o cuadratură a problemei inverse a tangentelor (determinarea unei curbe sau, cel puţin, a proprietăţilor ei pe baza proprietăţilor cunoscute ale tangentelor sale, ceea ce, în limbajul actual, revine la integrarea unei ecuaţii diferenţiale de ordinul întîi). În domeniul fizicii, Barrow a dat soluţia problemei teoretice a formării imaginilor în lunete. Op. pr.: *Lectiones geometricae*, 1668 — 1669. *(V.B.)*

baza unui sistem de logaritmi → **logaritm**

baza unui sistem de numeraţie → **sistem de numeraţie**

baza unui spaţiu liniar, sistem de generatori liniar independenţi. Orice element al spaţiului liniar poate fi exprimat, în mod unic, ca o combinaţie liniară a elementelor bazei. Ex.: în plan, doi vectori necoliniari sau în spaţiu, trei vectori necoplanari formează o bază. — *Bază ortogonală* (a unui spaţiu euclidian), bază pentru care oricare două elemente ale sale au produsul scalar nul. — *Bază ortonormală* (a unui spaţiu euclidian), bază ortogonală, ale cărei elemente au norma egală cu unitatea. Ex.: în $\mathbf{R}^3$ versorii **i, j, k** ai axelor unui sistem de coordonate carteziene ortogonal formează o bază ortonormală. *(V.B., A.B.)*

bază [lat. *basis* „bază, sprijin"] **1.** (Pentru un triunghi sau paralelogram). Una dintre laturile triunghiului sau paralelogramului, de obicei în poziţie orizontală, cu ajutorul căreia se calculează aria figurii respective. **2.** (Pentru un trapez) → *trapez.* **3.** (Pentru un cilindru) → *cilindru* (1). **4.** (Pentru un con) → *con* (1). **5.** (Pentru o piramidă) → *piramidă.* **6.** (Pentru o prismă) → *prismă.* **7.** (Pentru un trunchi de con) → *trunchi de con.* **8.** (Pentru un trunchi de piramidă) → *trunchi de piramidă. (V.B).*

bază (în mişcarea plană a unui corp solid rigid), locul geometric al centrului instantaneu de rotaţie în raport cu un sistem de referinţă fix. Dacă se notează cu $\mathbf{r}_0 = a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ vectorul de poziţie al originii unui sistem de referinţă $O_1x_1y_1$ solidar legat de corp, cu θ unghiul dintre Ox şi O_1x_1 la un moment dat, şi vectorul de poziţie al centrului instantaneu prin $X\mathbf{i} + Y\mathbf{j}$, cunoscînd pe a şi b ca funcţii de θ, ecuaţiile parametrice ale bazei sînt: $X = a - \frac{db}{d\theta}$ şi $Y = b + \frac{da}{d\theta}$. Dacă se poate elimina θ între aceste două relaţii, ecuaţia bazei se obţine sub forma $F(X, Y) = 0$. *(Şt. G.)*

Bernoulli [bernuli], **Daniel** (1700—1782), matematician, mecanician şi fizician elveţian (fiul lui Jean Bernoulli). Profesor de matematică la Petersburg şi la Basel, unde a predat anatomia şi botanica, apoi fizica. Pentru lucrările sale valoroase în domeniul hidrodinamicii, fiind considerat unul din creatorii acesteia, ca şi în domeniul seriilor trigonometrice şi al teoriei probabilităţilor (unde a aplicat cel dintîi calculul infinitezimal) a obţinut de zece ori premiul Academiei de Ştiinţe din Paris. Op. pr.: *Hydrodynamica*, 1738. *(V.B.)*

Bernoulli [bernuli], **Jacques** (1654—1705), matematician elveţian. Profesor de matematică la Basel. Membru al Academiei de Ştiinţe din Paris. A fost unul dintre primii care a dezvol-

tat calculul diferențial și integral de la nivelul lăsat de I. Newton și G. Leibniz, și l-a aplicat la probleme noi (lui datorîndu-i-se și denumirea „integrală"). Contribuții la dezvoltarea teoriei probabilităților (a formulat legea numerelor mari). A descoperit lemniscata și proprietățile spiralei logaritmice. Op. pr.: *Ars conjectandi* (publicată postum, 1713). *(V.B.)*

Bernoulli [bernuli], **Jean** (1667—1748), matematician elvețian. Profesor la Groningen și, după moartea fratelui său Jacques, la Basel (unde a avut ca elevi pe L. Euler, G. Cantor, A. Clairaut). Membru al Academiei de Științe din Paris și al Academiei de Științe din Petersburg. Lucrări de teoria ecuațiilor diferențiale (ecuațiile de tip Bernoulli); a contribuit, alături de G. Leibniz, la răspîndirea calculului diferențial și integral și a introdus metoda de integrare a funcțiilor raționale. Împreună cu Jacques Bernoulli, a inițiat cercetări care au condus la apariția calculului variațional (problema izoperimetrelor, descoperirea cicloidei). Lucrări de mecanică (principiul deplasărilor virtuale), astronomie (elaborînd o teorie despre maree), chimie, optică. A scris primul manual de calcul integral *Lectiones mathematicae de methodo integralium aliisque* (1742), precum și unul de calcul diferențial *Lectiones de calculo differentialium* (1691—1692, manuscris descoperit abia în anul 1920 și publicat în 1923). *(V.B.)*

Bézout [bezu], **Étienne** (1730—1783), matematician francez. Membru al Academiei Franceze de Științe. Cunoscut prin cercetările sale asupra teoriei ecuațiilor și a sistemelor de ecuații algebrice de grad superior (teorema lui Bézout). Op. pr.: *Théorie générale des équations algébriques*, 1779. *(V.B.)*

bibliotecă de sistem, colecție organizată de programe standard verificate pe calculator și păstrate într-un fișier cu acces aleatoriu sau secvențial. Cuprinde rutine de diagnosticare, programe de serviciu și programe monitoare livrate de constructor pentru a facilita utilizarea calculatorului, precum și programe scrise de utilizator pentru o aplicație determinată. *(T.B.)*

bicuaternion [lat. *bis* „de două ori", *cuaternion*], element al algebrei pe corpul numerelor complexe, avînd aceeași tablă de înmulțire ca și corpul cuaternionilor. Noțiunea și denumirea au fost introduse de W. Hamilton (1844). *(V.B.)*

bijecție → funcție bijectivă

bilion, număr natural egal cu 10^{12} (în R.S. România, Anglia, R.D.G., R.F.G.) sau cu 10^9 (în S.U.A., U.R.S.S., Franța). Conceptul și denumirea se datoresc lui N. Chuquet (1484). *(V.B.)*

bimediană [lat. *bis* „de două ori", *mediană*] **1.** (Pentru un patrulater). Segmentul de dreaptă care unește mijloacele laturilor opuse. **2.** (Pentru un tetraedru). Segmentul de dreaptă

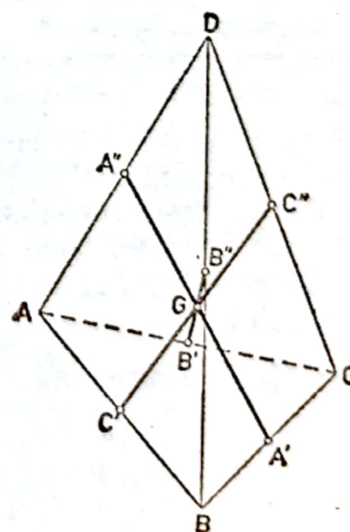


Fig. 11

care unește mijloacele muchiilor opuse (fig. 11). Bimedianele unui tetraedru sînt concurente în centrul său de greutate, care le împarte în părți egale. *(V.B.)*

binom [lat. *bis* „cu, din doi", gr. *nome* „diviziune, parte"], polinom cu doi termeni. *(V.B.)*

binomul lui Newton, formula care dă dezvoltarea puterii unui binom:

$$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + \dots + C_n^k a^{n-k}b^k + \dots + C_n^n b^n.$$

Formula era cunoscută de Omar Khayyam (c. 1100) pentru $n \in \mathbf{N}$, iar I. Newton (1665) și J. Gregory au extins-o asupra exponenților reali. A. Cauchy a generalizat formula binomului pentru b complex, iar N. Abel a considerat cazul cînd și n este complex. *(V.B.)*

binormală [lat. *bis* „de două ori", *normală*], normala la o curbă, într-un punct dat, perpendiculară pe planul osculator al curbei în acel punct. Pentru o curbă dată prin ecuațiile parametrice: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, ecuațiile binormalei sînt:

$$\frac{X-x}{y'z''-z'y''} = \frac{Y-y}{z'x''-x'z''} = \frac{Z-z}{x'y''-y'x''},$$

unde x, y, z și derivatele lor sînt luate în punctul considerat. Noțiunea de binormală a fost introdusă de L. Euler (1782), iar denumirea a fost propusă de Barré de St. Venant (1845). *(V.B.)*

biraport → **raport anarmonic**

bisectoare [lat. *bis* „în două", *secare* „a tăia"] (a unui unghi), semidreaptă, cu originea în vîrful unghiului, care îl împarte în două părți egale. Ecuațiile bisectoarelor unghiurilor formate de două drepte cu ecuațiile carteziene $(D_1) A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $(D_2) A_2x + B_2y + C_2 = 0$ sînt:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \pm \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}.$$

Bisectoarele unghiurilor formate de două drepte în spațiu:

$$\frac{x-a}{l_1} = \frac{y-b}{m_1} = \frac{z-c}{n_1},$$

$$\frac{x-a}{l_2} = \frac{y-b}{m_2} = \frac{z-c}{n_2}$$

sînt date prin ecuațiile:

$$x = a + \left(\frac{l_1}{D_1} \pm \frac{l_2}{D_2}\right)t,$$

$$y = b + \left(\frac{m_1}{D_1} \pm \frac{m_2}{D_2}\right)t,$$

$$z = c + \left(\frac{n_1}{D_1} \pm \frac{n_2}{D_2}\right)t,$$

unde $D_1 = \sqrt{l_1^2 + m_1^2 + n_1^2}$,

iar $D_2 = \sqrt{l_2^2 + m_2^2 + n_2^2}$.

— *Bisectoarele unui triunghi*, cele trei bisectoare interioare (bisectoarele unghiurilor interioare) și cele trei bisectoare exterioare (bisectoarele unghiurilor exterioare). Ecuațiile bisectoarelor unui triunghi ABC, dat prin coordonatele vîrfurilor $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ sînt:

$$\frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \end{vmatrix}}{b} \pm \frac{\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix}}{c} = 0,$$

unde semnele + și — se referă la bisectoarea exterioară, respectiv in-

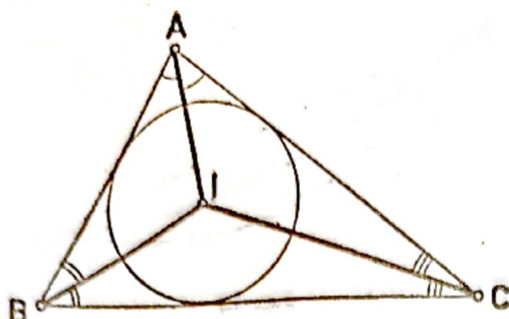


Fig. 12

terioară, corespunzătoare unghiului A. Ecuații analoage se obțin și pentru bisectoarele unghiurilor B și C. Lungimile bisectoarelor interioare l_a, l_b, l_c sînt date de formulele:

$$l_a = \frac{2}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)},$$

$$l_b = \frac{2}{c+a}\sqrt{cap(p-b)},$$

$$l_c = \frac{2}{a+b}\sqrt{abp(p-c)},$$

iar pentru bisectoarele exterioare l'_a, l'_b, l'_c (presupunînd $a > b > c$) se folosesc formulele:

$$l'_a = \frac{2}{b-c}\sqrt{bc(p-b)(p-c)},$$

$$l'_b = \frac{2}{a-c}\sqrt{ac(p-a)(p-c)},$$

$$l'_c = \frac{2}{a-b}\sqrt{ab(p-a)(p-b)}.$$

Bisectoarele interioare ale unui triunghi sînt concurente într-un punct I (care este centrul cercului înscris triunghiului) (fig. 12); bisectoarea unui unghi interior, de exemplu A, și bisectoarele unghiurilor exterioare neadiacente, B și C, sînt concurente în punctul I_a (care este centrul cercului exînscris triunghiului). — *Teorema bisectoarei*: orice bisectoare a unui triunghi împarte latura opusă în segmente proporționale cu celelalte două laturi (F. Schooten). *(V.B.)*

bisectoarea unui triedru, semidreaptă, cu originea în vîrful triedrului, intersecție a planelor bisectoare ale celor trei diedre formate de fețele triedrului. *(V.B.)*

bit [engl. *b*inary „binar", dig*it* „cifră"], unitate de măsură a gradului de nedeterminare, nedeterminare pe care o conține un cîmp de probabilitate format din două evenimente egal probabile; este unitatea de măsură a cantității de informație. Originea denumirii se explică prin faptul că, potrivit unei convenții, o informație unitate se indică printr-una din cifrele 0 sau 1 (care alcătuiesc un sistem binar), fiecare numindu-se cifră binară. Ex.: un șir de 5 semnale elementare formate din impulsii (1) sau pauze (0) — ca: 11000, care reprezintă litera *a* în codul telegrafic — conține o informație de 5 biți. Noțiunea și denumirea au fost introduse de C. E. Shannon *(A mathematical theory of communication*, 1948). *(V.B.)*

Bolyai [boioi], **Janos** (1802—1860), matematician maghiar din Transilvania. A studiat de timpuriu matematica sub îndrumarea tatălui său Farkaş Bolyai, profesor la Colegiul din Tg. Mureş. A urmat cursurile Academiei tehnice militare de la Viena. A creat (independent de N. Lobacevski) prima geometrie neeuclidiană, înlocuind postulatul paralelelor lui Euclid cu axioma: printr-un punct exterior unei drepte se pot duce două paralele la aceasta. A publicat această descoperire ca o anexă, intitulată *Appendix*, la tratatul tatălui său *Tentamen* (1832). *(V.B.)*

Bolzano [bolțano], **Bernhard** (1781—1848), matematician și filozof ceh. Profesor de matematică și istoria religiilor la Universitatea din Praga. Cea mai mare parte a lucrărilor sale a rămas în manuscris; astfel impor-

tanta lucrare *Tratat despre funcţii* a fost tipărită abia după 100 de ani (în 1930). Aici, Bolzano a dat primul exemplu de funcţie continuă care nu este derivabilă în nici un punct. Contribuţii la fondarea analizei matematice moderne; a introdus o serie de noţiuni şi teoreme ale analizei matematice chiar înaintea lui A. Cauchy, K. Weierstrass şi G. Cantor (teorema Bolzano-Weierstrass). Este primul care a considerat mulţimi arbitrare, echivalenţa lor etc., în lucrarea *Paradoxien des Unendlichen* (publicată postum, 1851). *(V.B.)*

Boole [bul], **George** (1815—1864), matematician irlandez. Profesor la Queen's College din Cork. Unul dintre întemeietorii logicii matematice. Lucrări de calcul diferenţial. Op. pr.: *An investigation of the laws of thought, on which are founded the mathematichal thories of logic and probabilities*, 1854. *(V.B.)*

Borel, Émile (1871—1956), matematician francez. Profesor la Sorbona şi director ştiinţific al Şcolii Normale Superioare din Paris. Membru al Academiei Franceze de Ştiinţe. Lucrări de teorie a funcţiilor reale (fiind unul dintre fondatorii acesteia), a funcţiilor complexe, de teoria mulţimilor, de calculul probabilităţilor, de mecanică statistică, de fizică. Op. pr.: *La théorie des fonctions*, 1897—1922; *Traité du calcul des probabilités et ses applications*, 1924—1934. *(V.B.)*

brahistocronă [gr. *brahistos* „cel mai scurt", *chronos* „timp"], curbă aşezată în plan vertical, de-a lungul căreia un punct material, care se mişcă fără frecare sub acţiunea gravitaţiei, par-

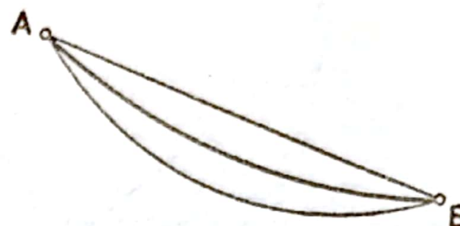


Fig. 13

curge în cel mai scurt timp distanţa între două puncte date (fig. 13). Cicloida este o curbă brahistocronă. Brahistocronele au fost considerate iniţial de Jean Bernoulli (1696), studiul lor constituind germenul apariţiei calculului variaţional. *(V.B)*

Brahmagupta (598—660), matematician indian. Opera sa, *Ştiinţa perfecţionată a lui Brahma* (c.628), scrisă în versuri, conţine în două cărţi (din cele 20), probleme de matematică; aici Brahmagupta formulează în cuvinte regula generală pentru rezolvarea ecuaţiilor de gradul al doilea, regulile de adunare şi scădere cu numere pozitive, negative şi zero, introduce dubla valoare a rădăcinilor pătrate din numere pozitive, expune metoda, numită ulterior ciclică, pentru rezolvarea unor ecuaţii pătratice nedeterminate, extinde (fără demonstraţie) formula lui Heron pentru aria patrulaterelor inscriptibile, se ocupă cu formulele numerelor pitagoreice raţionale. *(V.B.)*

buclă [fr. *boucle*], porţiune finită dintr-o curbă plană mărginită de un punct dublu al curbei (care nu este punct de înapoiere). Ex.: bucla la foliul lui Descartes, la lemniscata lui Bernoulli. *(V.B.)*

C

cadran [lat. *quadrans* „a patra parte"], fiecare dintre cele patru regiuni în care două drepte perpendiculare împart planul. *(V.B.)*

calculator, ansamblu de sisteme mecanice, electromagnetice şi electronice destinat prelucrării informaţiei. În secolul 17, J. Neper (1614), B. Pascal (1662) şi G. Leibniz (1671) au inventat primele dispozitive mecanice de calcul. În secolul 19, Ch. Babbage a imaginat prima maşină de calcul la care datele de lucru şi operaţiile de executat erau memorate înainte de începerea calculului, viteza de lucru devenind independentă de manevrele operatorului. După 1940, introducerea elementelor electronice a impulsionat tehnica construcţiei calculatoarelor. Începînd cu 1945 s-au construit *calculatoare din prima generaţie* cu tuburi electronice şi memorie pe tambur magnetic, primul fiind ENIAC (*E*lectric *N*umerical *I*ntegrator *A*utomatic *C*omputer) pus în funcţiune la Universitatea din Pennsylvania (S.U.A.). După 1955 apar *calculatoare din generaţia a doua*, cu tranzistoare şi memorie cu ferite sau peliculară, iar în 1964—1968 se construiesc primele *calculatoare din a treia generaţie*, cu circuite microminiaturizate sau integrate, cu memorie de ferite sau monolit şi structură modulară. În ţara noastră, primul calculator este CIFA-1 (*C*alculator al *I*nstitutului de *F*izică *A*tomică) construit în 1957. În 1961, este realizat calculatorul MECIPT (*M*aşina *E*lectronică de *C*alcul a *I*nstitutului *P*olitehnic din *T*imişoara). A doua generaţie de calculatoare e reprezentată la noi de calculatorul DACICC (*D*ispozitiv de *C*alcul al *I*nstitutului de *C*alcul din *C*luj). Începînd cu 1968, ţara noastră importă calculatoare din generaţia a treia, iar din 1971, pentru a asigura necesarul de echipament modern de prelucrare a datelor pentru economia naţională, s-a trecut la fabricarea calculatorului modern Felix-256. — *Calculator analogic*, calculator fără memorie, care operează cu date sub formă de cantităţi fizice continuu variabile, cum ar fi presiunea, temperatura etc. — *Calculator numeric*, calculator cu memorie ce prelucrează informaţia sub formă cuantificată şi rezolvă problemele în conformitate cu anumiţi algoritmi. Schema de principiu a unui calculator numeric este dată în fig. 14. Se mai numeşte *calculator cifric, calculator digital, calculator electronic* sau *maşina electronică de calcul.* — *Calculator cu virgulă fixă*, calculator numeric care lucrează numai cu numere reale mai mici în valoare absolută decît 1. Pentru rezolvarea problemelor, datele de intrare, datele de ieşire, precum şi toate rezultatele intermediare trebuie făcute subunitare în valoare absolută, alegînd în mod corespunzător unităţile de măsură sau împărţind la un număr convenabil ales. — *Calculator cu virgulă mobilă*, calculator numeric ce lucrează cu numere reale în care

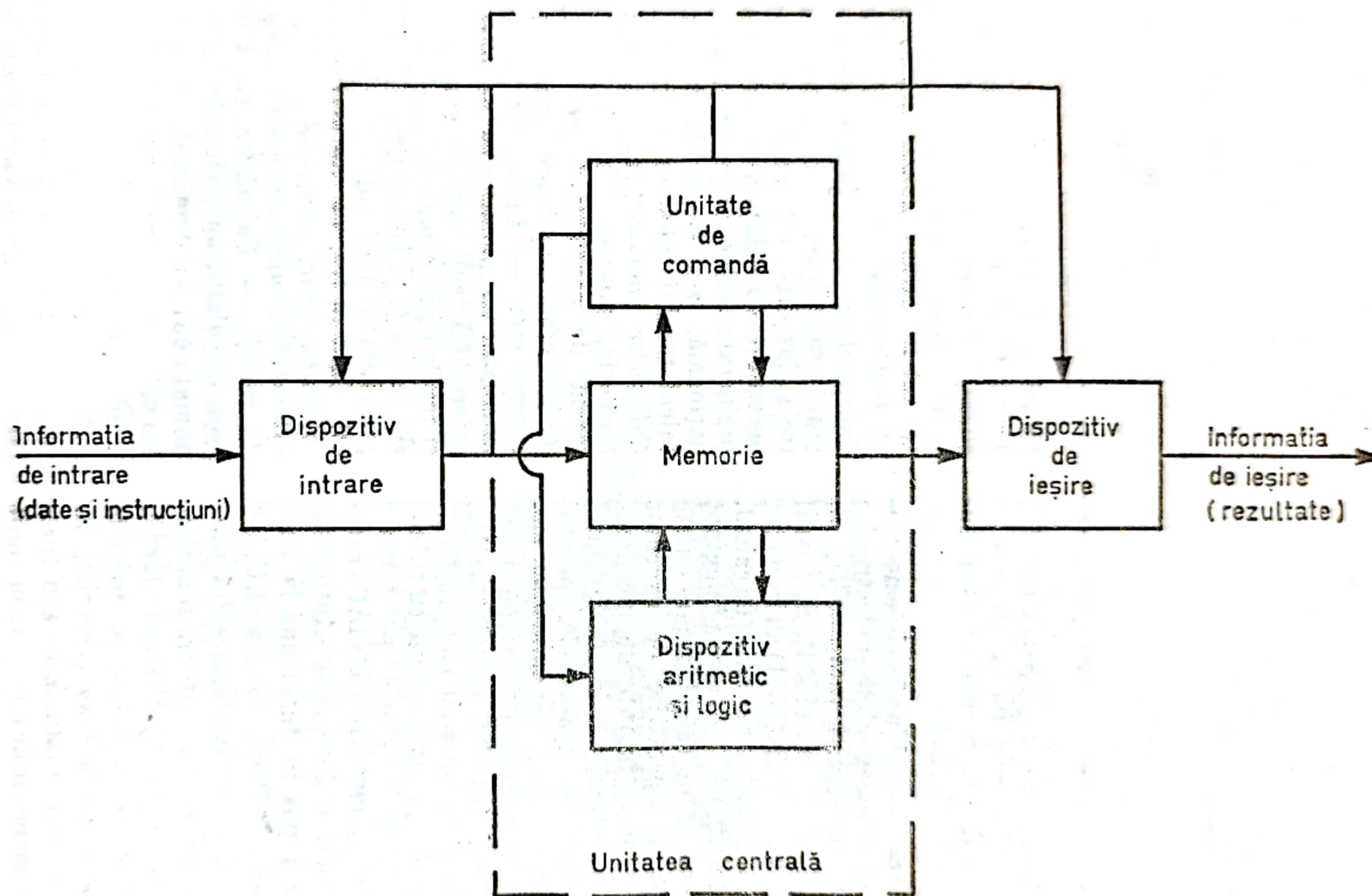

Informatia
de intrare
(date și instrucțiuni)
Dispozitiv
de
intrare
Unitate
de
comandă
Memorie
Dispozitiv
aritmetic
și logic
Unitatea centrală
Dispozitiv
de
ieșire
Informatia
de ieșire
(rezultate)

Fig. 14

la stînga virgulei pot fi diferite de zero numai cifrele pînă la un anumit rang, m. Scrierea unui astfel de număr este:

$$\pm a_{-m}a_{-(m-1)} \cdots a_0, a_1 a_2 \cdots$$

şi se reprezintă în calculator sub forma $b^p \cdot c$, unde b este baza sistemului de numeraţie, c un număr real mai mic în valoare absolută decît 1, iar p este număr întreg ce verifică relaţia:

$-(m+1) \leqslant p \leqslant m+1$. *(T.B.)*

calcul diferenţial, capitol al analizei matematice avînd ca obiect studiul derivatelor şi diferenţialelor funcţiilor. Denumirea a fost propusă de G. Leibniz (1684). *(V.B.)*

calcul infinitezimal, denumire tradiţională a calculului diferenţial şi integral. *(V.B.)*

calcul integral, capitol al analizei matematice în care se studiază integralele funcţiilor şi aplicaţiile lor. Denumirea a fost propusă de Jacques Bernoulli (1690). *(V.B.)*

calcul matricial, capitol al algebrei avînd ca obiect studiul matricilor şi operaţiilor cu matrici. Este folosit la studiul sistemelor de ecuaţii liniare, aplicaţiile lui întîlnindu-se în electronică, mecanică cuantică ş.a. Crearea calculului matricial, impus de problema transformărilor liniare, iniţiate de J. Binet (1813) şi A. Cauchy (1815), se datorează lui A. Cayley (1858). *(V.B.)*

calcul numeric → **analiză numerică**

calcul operaţional, capitol al matematicii avînd ca obiect rezolvarea ecuaţiilor diferenţiale şi integrale prin transformarea acestora în ecuaţii algebrice. Metodele calculului operaţional au fost introduse de M. E. Vaşcenko-Zaharenko (1862) şi O. Heaviside (1892), căpătînd ulterior o largă dezvoltare, fiind aplicate în fizică şi tehnică. *(V.B.)*

calcul tensorial, parte a matematicii în care se studiază operaţiile cu tensori. Apariţia calculului tensorial a fost pregătită în secolul trecut de cercetările legate de mecanica mediilor continue deformabile şi de dezvoltarea geometriei diferenţiale. G. Ricci-Curbastro a creat calculul tensorial începînd din 1886 şi a dat o expunere sistematică, împreună cu T. Levi-Civita, în *Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications* („Mathematische Annalen", 1901), în care se indică aplicaţii la mecanică, fizică teoretică şi geometrie riemanniană. Calculul tensorial a permis o formulare concisă a teoriei relativităţii generale, şi a devenit astăzi un instrument indispensabil în studiul problemelor ridicate de ştiinţă şi tehnică. *(V.B., Şt. G.)*

calcul variaţional, capitol al analizei matematice care are ca obiect studiul problemelor de determinare a extremelor unei funcţionale. Printre problemele care au generat apariţia calculului variaţional se numără problema izoperimetrelor şi problema brahistocronei (Jean Bernoulli, 1696). Denumirea şi fundamentarea calculului variaţional i se datorează lui L. Euler (1744). J. Lagrange (1760) a introdus noţiunea de variaţie şi a dat o metodă de determinare a extremelor unei funcţionale. Calculul variaţional are aplicaţii în mecanica sistemelor, hidrodinamică, teoria elasticităţii, optică geometrică. *(V.B.)*

calcul vectorial, capitol al matematicii în care se studiază operaţiile făcute cu vectori. Primele lucrări de calcul vectorial aparţin lui W. Hamilton (1843) şi H. Grassmann (1844), care au pornit de la ideea de a da o descriere adecvată operaţiilor cu mărimile fizice caracterizate prin valoare numerică, direcţie şi sens. Noţiunea de vector a fost pusă în evidenţă însă de S. Stevin (c. 1600); un real aport la apariţia calculului

vectorial îl constituie unele lucrări asupra numerelor complexe, inițiate de K. Wessel (1799). Calculul vectorial și-a dovedit utilitatea în mecanică, geometrie, algebra liniară; prin cercetările unor fizicieni (J. C. Maxwell, J. Gibbs, P. Langevin) el a fost pus în slujba teoriei electricității și a magnetismului. La noi, lucrări în această direcție a elaborat N. Teodorescu (1954). *(V.B.)*

calculul probabilităților → **teoria probabilităților**

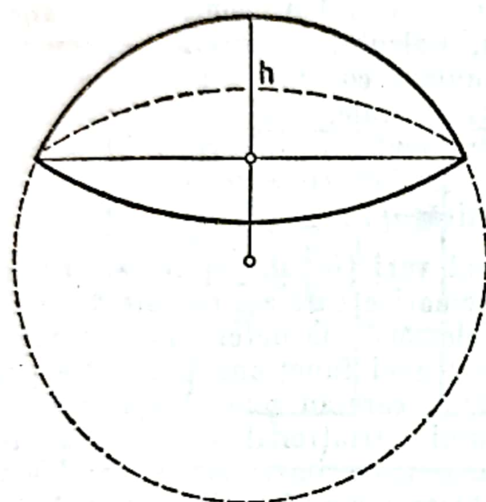


Fig. 15

calotă sferică [fr. *calotte* „boltă"], fiecare dintre cele două părți ale unei sfere obținute prin secționarea ei cu un plan (fig. 15). Aria calotei sferice și volumul mărginit de ea sînt date de formulele:

$$A = 2\pi Rh,$$

$$V = \frac{\pi h^2}{3}(3R - h) = \frac{\pi h}{6}(3r^2 + h^2),$$

unde R este raza sferei, r raza calotei, h înălțimea ei. *(V.B.)*

canal de intrare/ieșire, echipament de circulație a fluxului de informație între unitatea centrală a unui calculator și echipamentul periferic. — *Canal multiplexor,* canal de intrare/ieșire care asigură conectarea simultană a mai multor dispozitive periferice ce lucrează alternativ. — *Canal selector,* canal de intrare/ieșire destinat lucrului cu un singur periferic, la un moment dat. Este utilizat cu dispozitive periferice ce au viteză de lucru mare. *(T.B.)*

Cantor, Georg (1845—1918), matematician german. Profesor la Universitatea din Halle. Este fondatorul teoriei mulțimilor, unde a introdus multe noțiuni, denumiri și notații: cardinalele transfinite, echivalența mulțimilor, denumirile de mulțime numărabilă și de puterea continuului, mulțimi deschise, închise, total ordonate, noțiunile de șir fundamental, de punct de acumulare, de produs cartezian; a aprofundat noțiunea de infinit. Lucrări referitoare la seriile trigonometrice și teoria numerelor. Op. pr.: *Mengenlehre,* 1874; *Grundlagen einer allgem. Mannigfaltigkeitslehre,* 1883; *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre,* 1895—1897. *(V.B.)*

cantitate de mișcare → **impuls**

caracteristica unui corp K, zero, dacă corpul K conține un corp izomorf cu corpul $\mathbf{Q}$ al numerelor raționale, iar în caz contrar numărul prim p, pentru care $\underbrace{e + \ldots + e}_{\text{de } p \text{ ori}} = 0$, unde e este elementul neutru la înmulțire din K. Caracteristica unui corp K se determină astfel: se consideră omomorfismul de inele $f: \mathbf{Z} \to K$, definit prin: $f(1) = e$ (deci $f(-1) = -e$ și $f(n) = \underbrace{e + \ldots + e}_{\text{de } n \text{ ori}}$ pentru $n > 0$, iar $f(n) = \underbrace{-e - \ldots - e}_{\text{de } -n \text{ ori}}$ pentru $n < 0$) și nucleul său, care, fiind un subgrup în $\mathbf{Z}$, are forma $p\mathbf{Z}$, cu p întreg pozitiv. Dacă $p = 0$, atunci $\mathbf{Q} \subset K$, deci K are caracteristica zero. Dacă $p \neq 0$, atunci p

este un număr prim și caracteristica lui K este p. *(A.B.)*

caracteristică (a unui logaritm), parte întreagă a logaritmului. Ex.: la logaritmul zecimal al unui număr întreg sau zecimal supraunitar, caracteristica este egală cu numărul cifrelor întregilor mai puțin una, iar la logaritmul unui număr zecimal subunitar, caracteristica este negativă și reprezintă numărul zerourilor anterioare. Denumirea a fost propusă de H. Briggs (1617). *(V.B.)*

cardinalul unei mulțimi [lat. *cardinalis* „principal"] ($\overline{\overline{M}}$, card M), număr atașat unei mulțimi M și clasei mulțimilor echivalente ei. Dacă M este o mulțime finită cardinalul său reprezintă numărul elementelor mulțimii. Mulțimea vidă are cardinalul zero. Cardinalul mulțimilor infinite este un *număr transfinit*, de exemplu: $\overline{\overline{N}} = \aleph_0$ (alef zero, prima literă a alfabetului ebraic) cardinalul mulțimii numerelor naturale sau $\overline{\overline{R}}$, cardinalul mulțimii numerelor reale, numit *puterea continuului*. Folosirea celor două liniuțe de supra-liniere în notația cardinalului unei mulțimi se motivează ca fiind sugestia faptului că în definirea lui se face o dublă abstracție: de natura elementelor mulțimii și de ordinea lor. Noțiunea și notațiile au fost introduse de G. Cantor (1879). Se mai numește *puterea mulțimii M*. *(V.B.)*

cardioidă [gr. *kardia* „inimă", *eidos* „aspect, înfățișare"], curbă plană descrisă de un punct dat al unui cerc, care se rostogolește, fără alunecare, pe un cerc fix, exterior și de aceeași rază. Cardioida este o epicicloidă. Dacă se prelungesc coardele mobile care trec printr-un punct al unui cerc cu un segment egal cu diametrul cercului, capătul liber descrie o cardioidă; deci o cardioidă este un *melc al lui Pascal*. Ecuația carteziană a cardioidei este:

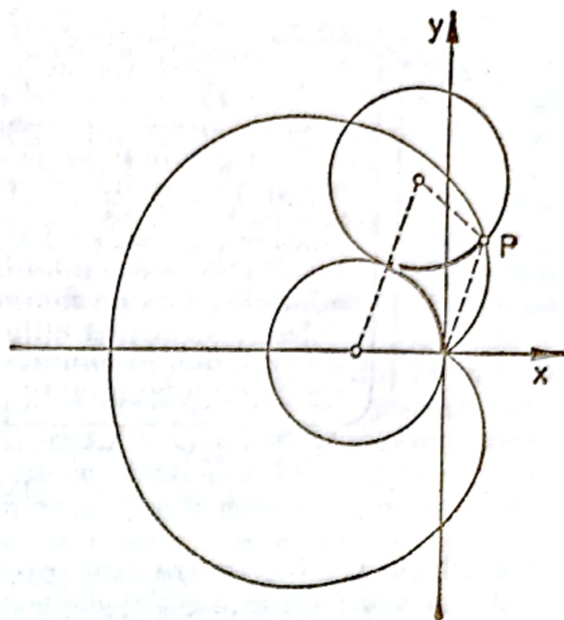


Fig. 16

$$(x^2 + y^2 - ax)^2 = a^2(x^2 + y^2),$$

unde a este diametrul cercului mobil. Ecuația în coordonate polare este:

$$r = a\ (1 + \cos\theta),$$

polul fiind în punctul de întoarcere al cardioidei (în originea axelor) (fig. 16). Lungimea cardioidei este egală cu: $8a$, iar aria domeniului mărginit de curbă este: $\frac{3}{2}\ \pi a^2$. Cardioida a fost descoperită de J. Koërsma (c. 1700); denumirea a fost propusă de G. Castilion (1741). *(V.B.)*

Cartan [cartã], **Elie** (1869—1951), matematician francez. Profesor la Sorbona și membru al Academiei de Științe din Paris. Contribuții însemnate în geometria diferențială, în teoria sistemelor de ecuații cu diferențiale totale, în teoria grupurilor Lie. A introdus noțiunile de: diferențială exterioară, spațiu cu conexiunea afină, spațiu cu conexiune conformă, spații simetrice, grupuri de olonomie (în cadrul clasificării grupurilor Lie). A introdus metoda reperului mobil în geometria diferențială proiectivă, a

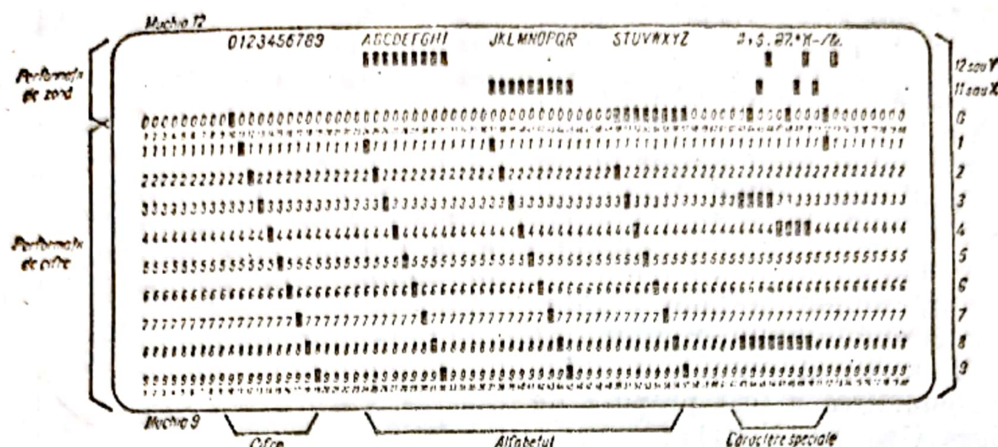


Fig. 17

construit geometriile pentru care grupul de transformări este cel al deplasărilor, cel proiectiv sau cel conform. Op. pr.: *Les espaces à connexion projectives*, 1937; *Leçon sur la géométrie projective complexe*, 1931. *(V.B.)*

cartelă, mediu suport de lungime fixă pentru păstrarea codificată a informației, utilizat pentru transmiterea datelor și instrucțiunilor către mașină sau pentru extragerea rezultatelor. Pentru a asigura corectitudinea rezultatelor și funcționarea corespunzătoare a mașinii, cartelele se confecționează în limitele unor condiții riguroase de dimensiune și calitate. — *Cartelă magnetică*, cartelă la care informația este memorată sub forma unor porțiuni magnetizate, dispuse în piste paralele. Capacitatea de memorare este foarte mare: o cartelă cu dimensiunea 35,5 cm × × 8,9 cm, cu 7 piste, poate memora 21 700 caractere. — *Cartelă perforată*, cartelă construită din carton, la care informația este memorată sub formă de șiruri de caractere codificate printr-un sistem de perforații în corpul cartelei. Cel mai răspîndit tip este cartela IBM cu 80 de coloane și perforații dreptunghiulare (fig. 17). Există și cartele cu 90 de coloane, dispuse în două zone orizontale și cu perforații circulare. *(T.B.)*

catenoidă [lat. *catena* „lanț", gr. *eidos* „înfățișare"], suprafață generată prin rotirea lănțișorului în jurul bazei lui. Ecuația carteziană a catenoidei este:

$$x^2 + y^2 = a^2 \mathrm{ch}^2 \frac{z}{a},$$

unde a este ordonata minimă a lănțișorului (ordonata vîrfului). Primele studii asupra catenoidei se datorează lui L. Euler (1744). *(V.B.)*

catetă [gr. *kathetos* „perpendiculară"], fiecare dintre laturile unghiului drept al unui triunghi dreptunghic (fig. 18). Denumirea, bazată pe faptul că într-un triunghi dreptunghic acestea sînt perpendiculare, a apărut inițial în lucrările lui Autolykos (sec. 4 î.e.n.) și s-a statornicit în literatura matematică datorită, mai ales, lui Euclid (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

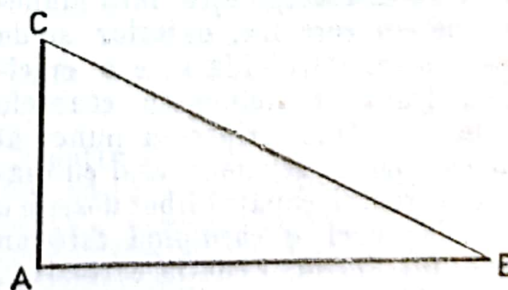


Fig. 18

Cauchy [coşi], **Augustin Louis** (1789—1857), matematician şi mecanician francez. Profesor la Paris şi Torino. Membru al Academiei Franceze de Ştiinţe. Activitate bogată cuprinsă în 789 de memorii cu subiecte din toate domeniile matematicii, din mecanică, astronomie, fizică. Unul dintre fondatorii analizei matematice moderne şi al teoriei funcţiilor de variabilă complexă. A formulat primele teoreme de existenţă din teoria ecuaţiilor diferenţiale şi a ecuaţiilor cu derivate parţiale. Lucrări de mecanică referitoare la teoria elasticităţii şi propagarea undelor. Op. pr.: *Théorie des ondes*, 1815; *Cours d'analyse algébrique*, 1821; *Leçon sur les applications du calcul infinitésimal à la géométrie*, vol. I, 1826; vol. II, 1828. *(V.B.)*

Cayley [cheili], **Arthur** (1821—1895), matematician englez. Profesor la Cambridge. Membru în Royal Society. Cercetările, sale publicate în 966 memorii, privesc teoria invarianţilor, teoria matricilor şi a determinanţilor (unde a introdus calculul simbolic), teoria funcţiilor eliptice, teoria grupurilor, ecuaţiile diferenţiale, astronomia sferică. Op. pr.: *Collected mathematical papers*, 14 volume, 1891—1898. *(V.B.)*

Călugăreanu, Gheorghe (n. 1902), matematician român. Studii la Universitatea din Cluj şi la Paris (doctor la Sorbona, 1928). Profesor la Universitatea din Cluj (din 1942). Membru al Academiei R. S. România (din 1963; membru corespondent din 1955). Membru în Société mathématique de France. Cercetări privind, în special, teoria funcţiilor de o variabilă complexă (problema determinării ecuaţiilor diferenţiale care admit soluţii poligene, problema singularităţilor funcţiilor analitice etc.), geometria diferenţială şi topologia. Op. pr.: *Elemente de teoria funcţiilor de o variabilă complexă*, 1963. *(V.B.)*

Cebîşev, Pafnuti Lvovici (1821—1894), matematician rus. Profesor la Moscova şi Petersburg. Membru al Academiilor de Ştiinţe din Petersburg, Berlin, Paris şi în Royal Society din Londra. Fondatorul şi animatorul şcolii de matematică de la Petersburg. Creatorul teoriei celei mai bune aproximări a funcţiilor. Lucrări în domeniile teoriei numerelor (formula pentru aproximarea numărului de numere prime mai mici ca un număr dat), teoriei interpolării (polinoame ortogonale), teoriei probabilităţilor (inegalitatea care îi poartă numele), mecanicii (teoria mecanismelor şi balistică). Op. pr.: *Opît elementarnovo analiza teorii veroiatnostei*, 1845; *Teoria sravnenii*, 1849. *(V.B.)*

centru [gr. *kentron* „indicator"] (al unei figuri), punct avînd proprietatea că printr-o simetrie faţă de el figura rămîne neschimbată. *(V.B.)*

centru de asemănare (a două figuri asemenea), punctul de intersecţie a dreptelor ce unesc extremităţile segmentelor omoloage a două figuri asemenea. Denumirea, precum şi considerarea acestei noţiuni i se datorează lui L. Euler. *(V.B.)*

centru de greutate, punctul în care acţionează rezultanta forţelor de atracţie gravitaţională, pentru orice poziţie a sistemului de puncte materiale $P_j (j = 1, 2, \ldots, n)$ considerat. Acest punct există numai dacă dimensiunile sistemului sînt neglijabile faţă de distanţele punctelor materiale pînă la centrul O al Pămîntului, adică $|\mathbf{P}_i\mathbf{P}_j| \ll |\mathbf{P}_j\mathbf{O}|$ $(i \neq j)$. Vectorul de poziţie $\mathbf{R}$ al centrului de greutate are expresia:

$$\mathbf{R} = \sum_{1}^{n} m_j \mathbf{r}_j \Big/ \sum_{1}^{n} m_j.$$

Pentru corpuri omogene de o formă geometrică simplă, centrul de greutate se poate determina prin mijloace

elementare. Ex.: o placă triunghiulară subţire are centrul de greutate la intersecţia medianelor, iar conul circular drept are acest punct pe înălţime, la distanţa $h/4$ de bază, h fiind lungimea înălţimii conului. Se mai numeşte *baricentru*. *(Şt. G.)*

centrul forţelor paralele, punctul prin care trec axele centrale ale unui sistem de forţe paralele cînd acestea, fără să-şi schimbe punctele lor de aplicaţie şi nici mărimile lor scalare, se rotesc, devenind paralele cu o altă axă. Dacă $\mathbf{r}_j$ este vectorul de poziţie al originei forţei $\mathbf{F}_j (j = 1,2, ..., n)$, atunci vectorul de poziţie al centrului forţelor paralele se defineşte prin expresia:

$$\sum_1^n \mathbf{r}_j F_j \Big/ \sum_1^n F_j. \quad (\text{Şt.G.})$$

centrul maselor (pentru un sistem de puncte materiale de mase m_j, $j = 1, ..., n$, plasate în punctele de vectori de poziţie $\mathbf{r}_j$), punctul definit prin formula $\sum_1^n m_j \mathbf{r}_j \Big/ \sum_1^n m_j$. Prin acest punct trece rezultanta tuturor forţelor de inerţie cînd sistemul are o mişcare de translaţie rectilinie neuniformă. *(Şt. G.)*

centru radical (a trei cercuri), punctul care are aceeaşi putere faţă de trei cercuri coplanare, cu centrele necoliniare. Este situat la intersecţia axelor radicale ale cercurilor respective. Noţiunea de centru radical a fost introdusă de L. Gaultier (1813). *(V.B.)*

cerc [lat. *circus* „cerc"], curbă plană, loc geometric al punctelor situate la aceeaşi distanţă r (numită raza cercului) de un punct fix O (centrul cercului). Faţă de un reper cartezian ortogonal, cercul cu centru $C(a, b)$ şi rază r are ecuaţia:

$$x^2 + y^2 - 2ax - 2by + (a^2 + b^2 - r^2) = 0;$$

ecuaţia generală a unui cerc este:

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0.$$

Ecuaţiile parametrice ale cercului sînt:

$$x = a + r \cos t$$
$$y = b + r \sin t,$$

în care t este unghiul făcut de raza vectoare a unui punct al cercului cu semiaxa pozitivă a absciselor (fig.

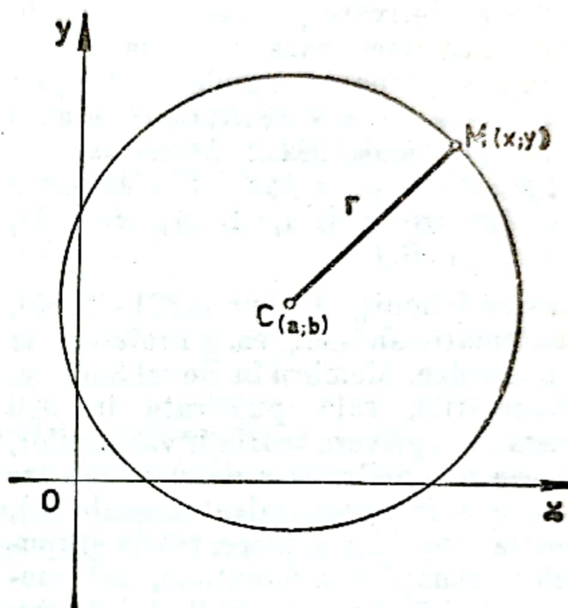


Fig. 19

19). În coordonate polare cu polul în centru ecuaţia cercului are forma: $\varrho = a$. Lungimea cercului este:

$$L = 2\pi r,$$

iar aria domeniului mărginit de cerc se determină prin formula:

$$A = \pi r^2.$$

Definiţia cercului a fost formulată iniţial de către Euclid (sec. 3 î.e.n.). Se mai numeşte *circumferinţă*. *(V.B.)*

cerc circumscris unui poligon [lat. *circum* „împrejur", *scribere* „a scrie"], cercul care trece prin toate vîrfurile poligonului. Cercul circumscris unui triunghi are centrul la intersecţia mediatoarelor laturilor (fig. 20). Pen-

tru calculul razei cercului circumscris unui triunghi ABC, se folosesc relaţiile:

$$R = \frac{a \cdot b \cdot c}{4S} = \frac{a}{2 \sin A} = \frac{b}{2 \sin B} = \frac{c}{2 \sin C},$$

unde S este aria triunghiului, iar a, b, c laturile lui. Folosirea literei O pentru notarea centrului cercului circumscris unui triunghi, ca şi a

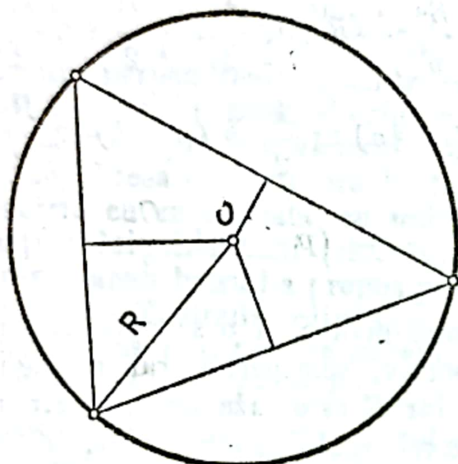


Fig. 20

literei R pentru raza acestuia a fost propusă de E. Lemoine (1882). *(V.B.)*

cerc de curbură [lat. *curvatura* „îndoitură"] (al unei curbe într-un punct dat M), cercul limită către care tinde cercul dus prin trei puncte M, N, P, ale curbei, cînd punctele N şi P tind către M. Acest cerc aproximează curba în vecinătatea punctului M. Se mai numeşte *cerc osculator*. *(V.B.)*

cerc director (al elipsei sau hiperbolei), cerc cu centrul într-un focar avînd raza egală, în cazul elipsei, cu axa mare, iar în cazul hiperbolei, cu axa transversală. Este locul geometric al simetricelor unui focar faţă de o tangentă mobilă a conicei considerate. *(V.B.)*

cercetare operaţională, colecţie de metode şi teorii ştiinţifice care analizează problemele ce se ivesc în planificarea şi conducerea economiei, în domeniul militar, precum şi într-o serie de alte domenii ale activităţii sociale, analiză care se face, de regulă, prin intermediul unui model matematic, concluziile obţinute servind apoi drept bază pentru elaborarea unei maniere de acţiune cît mai convenabilă în procesul concret, respectiv. Comportînd un aparat matematic foarte diversificat, modelele cercetării operaţionale au stimulat, totodată, dezvoltarea diferitelor capitole ale matematicii, ajungîndu-se în unele cazuri, la teorii închegate, construite pe baze axiomatice. Datorită preponderenţei modelelor nedeterministice, o largă aplicare îşi găsesc diferitele capitole ale teoriei probabilităţilor şi statisticii matematice. Deşi unele probleme proprii cercetării operaţionale au fost observate încă cu secole în urmă, epoca de dezvoltare a acestei ramuri ştiinţifice începe o dată cu secolul nostru, în preajma celui de al doilea război mondial. Apărute iniţial, datorită unor imperative de ordin militar (de unde şi originea denumirii), primele cercetări în acest domeniu au fost foarte repede generalizate şi diversificate, astfel că, în momentul de faţă, aproape toate ramurile activităţii conştiente sînt reprezentate de numeroase şi variate modele. Dintre problemele şi metodele cercetării operaţionale putem cita: modele de aşteptare, probleme de stocaj, diverse tipuri de probleme de programare matematică, probleme de întreţinere şi înlocuire a utilajelor, probleme de teoria jocurilor strategice, etc. *(A.Ş.)*

cerc exînscris unui triunghi [lat. *ex* „în afară", *scribere* „a scrie"], cerc tangent unei laturi a unui triunghi şi prelungirilor celorlalte laturi. Are centrul la intersecţia bisectoarei interioare a unui unghi cu bisectoarele

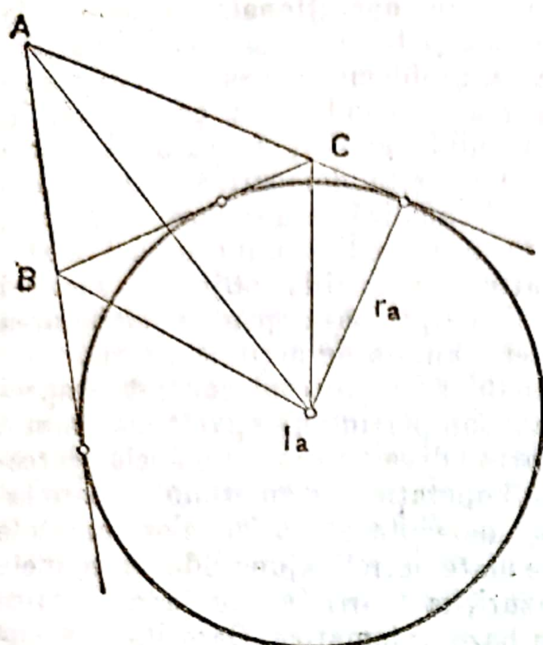


Fig. 21

exterioare ale celorlalte două unghiuri (fig. 21). Razele cercurilor exînscrise unui triunghi ABC se pot determina prin formulele:

$$r_a = \frac{S}{p-a} = \sqrt{\frac{p(p-b)(p-c)}{p-a}} = p \operatorname{tg} \frac{A}{2};$$

$$r_b = \frac{S}{p-b} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-c)}{p-b}} = p \operatorname{tg} \frac{B}{2};$$

$$r_c = \frac{S}{p-c} = \sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)}{p-c}} = p \operatorname{tg} \frac{C}{2},$$

unde S și p sînt aria și, respectiv, semiperimetrul triunghiului dat. Denumirea acestor cercuri a fost dată de S. Lhuilier (1810), iar notarea razelor lor prin perechile de litere r_a, r_b, r_c, s-a impus datorită lui E. Lemoine (1882). *(V.B.)*

cerc înscris unui poligon [lat. *in* „în", *scribere* „a scrie"], cercul căruia toate laturile poligonului îi sînt tangente. Cercul înscris unui triunghi are centrul la intersecția bisectoarelor unghiurilor triunghiului (fig. 22); raza acestui cerc se notează cu litera r (E. Lemoine, 1882). Lungimea razei cercului înscris într-un triunghi ABC se determină prin formulele:

$$r = \frac{S}{p} = 4R \sin\frac{A}{2} \sin\frac{B}{2} \sin\frac{C}{2} = (p-a) \operatorname{tg}\frac{A}{2} = (p-b) \operatorname{tg}\frac{B}{2} = (p-c) \operatorname{tg}\frac{C}{2},$$

în care prin S și p se notează aria, respectiv, semiperimetrul triunghiului, iar R este raza cercului circumscris triunghiului considerat. *(V.B.)*

cerc mare al unei sfere, cercul obținut prin intersecția sferei cu un plan ce trece prin centrul ei. *(V.B.)*

cerc mic al unei sfere, cercul rezultat din intersecția sferei cu un plan care nu trece prin centrul ei. *(V.B.)*

cerc ortotomic [gr. *orthos* „drept", *tome* „tăietură"] → **cercuri ortogonale**

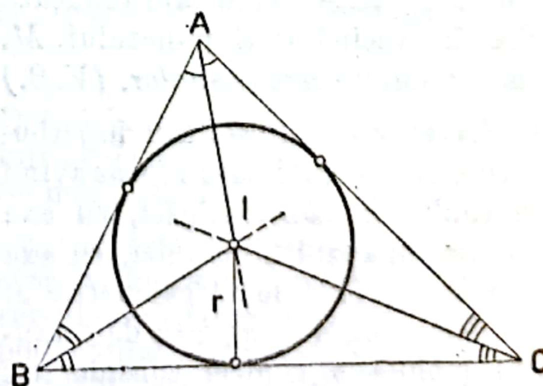


Fig. 22

cerc osculator → **cerc de curbură**

cerc principal (al unei elipse sau hiperbole), cerc concentric cu conica dată avînd raza egală, în cazul elipsei, cu semiaxa mare, iar în cazul hiperbolei, cu semiaxa transversală. Este locul geometric al proiecțiilor unui focar al conicei respective pe tangentele ei. *(V.B.)*

cerc trigonometric, cerc cu rază egală cu unitatea, pe care s-a stabilit o origine A (de unde începe măsurarea arcelor) și un sens antiorar, de parcurs. Acest cerc este folosit pentru studiul funcțiilor trigonometrice, fiind împărțit în patru cadrane de doi diametri perpendiculari, dintre care unul trece prin punctul-origine A, fără ca ei să aparțină vreunui cadran (fig. 23). Ideea folosirii cercului trigonometric cu raza egală cu unitatea aparține lui Al-Biruni (sec. 10); în Europa, acest lucru l-a propus pentru prima oară T. Bradwardinus (sec. 14) și s-a impus datorită, îndeosebi, lui L. Euler (1784). *(V.B.)*

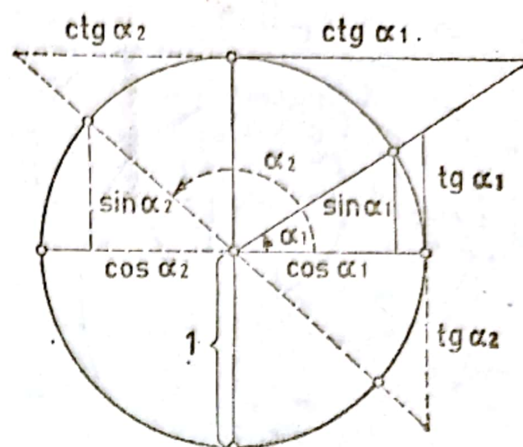


Fig. 23

cercul celor nouă puncte, cercul care trece prin mijloacele laturilor unui triunghi, prin picioarele înălțimilor, precum și prin mijloacele segmentelor cuprinse între vîrfuri și ortocentru; centrul acestui cerc se găsește la mijlocul segmentului HO, determinat de ortocentru și centrul cercului circumscris, și are raza jumătate din raza cercului circumscris (fig. 24). Se mai numește *cercul lui Euler*. *(V.B.)*

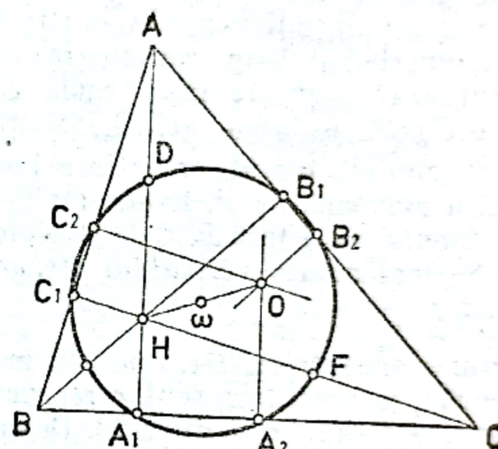


Fig. 24

cercul lui Apollonius, locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor la două puncte fixe este constant. Cercul are centrul situat pe dreapta celor două puncte. Bisectoarele unghiului format unind un punct mobil al locului geometric cu punctele fixe taie dreapta care le unește în puncte fixe, la capetele unui diametru al cercului. Într-un triunghi, cercurile lui Apollonius care corespund celor trei laturi au două puncte comune. Denumirea a fost propusă de J. Neuberg (1885). *(N.M.)*

cercul lui Euler → **cercul celor nouă puncte**

cercul lui Miquel, cercul care trece prin centrele cercurilor circumscrise celor patru triunghiuri care se formează atunci cînd se prelungesc, pînă la intersecție, laturile opuse ale unui patrulater (fig. 25). Introducerea acestui cerc se datorează lui J. Steiner (1827), iar denumirea lui S. Kantor (1878). *(V.B.)*

cercul lui Monge → **cercul ortoptic**

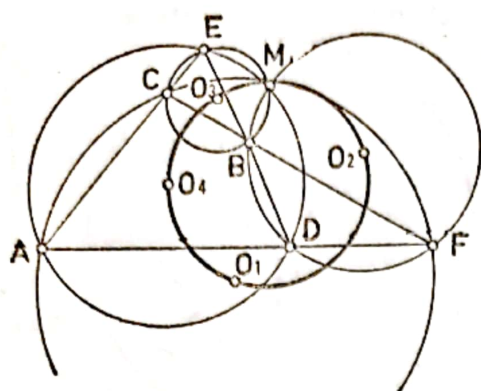


Fig. 25

cercul ortoptic [gr. *orthos* „drept“, *optikos* „vedere“], cerc, loc geometric al punctelor din care se pot duce tangente perpendiculare la o elipsă sau hiperbolă. Este concentric cu aceste conice şi are raza egală cu $\sqrt{a^2 + b^2}$, respectiv $\sqrt{a^2 - b^2}$. În cazul elipsei, cercul ortoptic a fost pus în evidenţă de E. Lahire (1685), iar denumirea a fost dată de G. Monge. Se mai numeşte *cercul lui Monge*. *(V.B.)*

cercuri concentrice [lat. *con* „cu, împreună“, *centrum* „centru“], cercuri cu acelaşi centru (şi raze diferite). Denumirea a fost dată de N. Oresme (c. 1370), dar considerarea lor se datoreşte lui Eudoxos (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

cercurile adjuncte ale unui triunghi [lat. *adjunctus* „care sînt împreună“], fiecare dintre cele şase cercuri care trec printr-un vîrf al unui triunghi şi sînt tangente în alt vîrf laturii opuse, ceea ce se notează: *(AB)*, *(BC)*, *(CA)*, şi *(BA)*, *(CB)*, *(AC)*, unde *(AB)*, de pildă, este cercul ce trece prin *A* fiind tangent în *B* laturii *BC*, iar *(BA)* desemnează cercul care trece prin *B* tangent în *A* laturii *AC*. *(V.B.)*

cercurile lui Carnot, fiecare dintre cele trei cercuri care trec prin ortocentrul şi prin două vîrfuri ale unui triunghi dat (fig. 26). *(V.B.)*

cercurile lui Chasles, cercuri concentrice cu o elipsă, avînd razele egale cu suma şi cu diferenţa dintre semiaxele elipsei. Denumirea acestor cercuri a fost dată de către E. N. Barisien (1895). *(V.B.)*

cercurile lui Malfatti, cele trei cercuri tangente între ele două cîte două şi tangente laturilor unui triunghi (în interiorul căruia se găsesc) (fig. 27). Problema construcţiei acestor cercuri a fost propusă de G. Malfatti (1803) şi a atras atenţia multor matematicieni. *(V.B.)*

cercuri ortogonale [gr. *orthos* „drept“, *gonia* „unghi“], cercuri care se taie sub un unghi drept. Dacă ecuaţiile carteziene a două cercuri sînt:

$$(C_1)\ x^2 + y^2 + m_1x + n_1y + p_1 = 0$$

$$(C_2)\ x^2 + y^2 + m_2x + n_2y + p_2 = 0,$$

condiţia ca aceste cercuri să fie ortogonale este:

$$m_1m_2 + n_1n_2 - 2(p_1 - p_2) = 0.$$

Cercurile ortogonale au fost studiate de către L. Gaultier (1813), iar denumirea se datorează lui J. Plücker (1830). — *Cerc ortotomic*, cercul care taie ortogonal trei cercuri date. Studii asupra cercului ortotomic au fost iniţiate de Ed. Dewulf (1858). *(V.B.)*

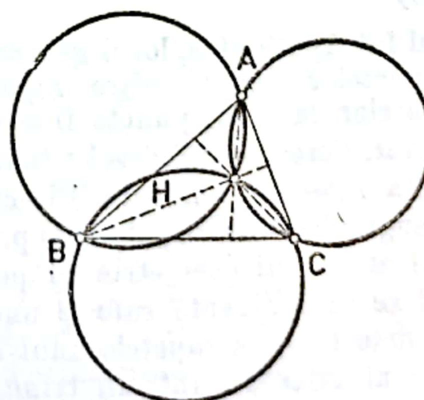


Fig. 26

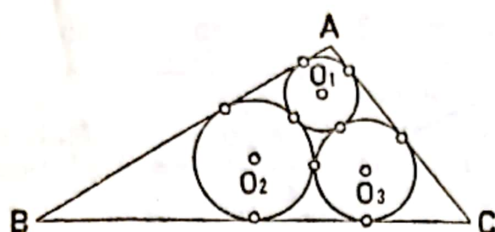


Fig. 27

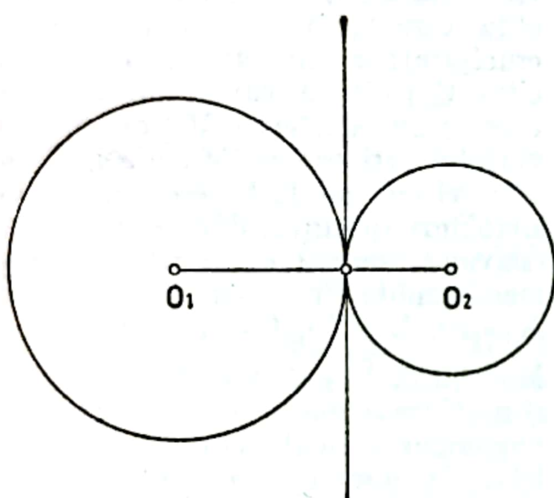


Fig. 28

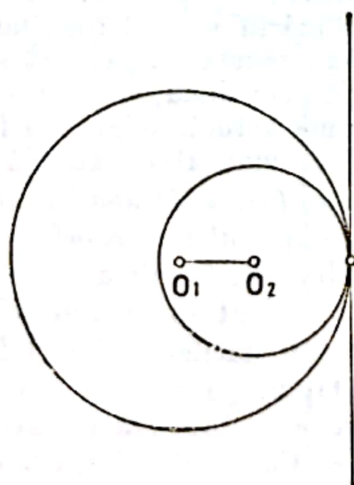


Fig. 29

cercuri secante [lat. *secare* „a tăia"], cercuri care se intersectează în două puncte distincte. *(V.B.)*

cercuri tangente [lat. *tangere* „a atinge"], cercuri care au un singur punct comun, putînd fi tangente exterior (fig. 28) sau tangente interior (fig. 29). *(V.B.)*

ceviană [după numele lui *G. Ceva*], dreapta ce uneşte un vîrf al unui triunghi cu un punct al laturii opuse. Ex.: într-un triunghi medianele, bisectoarele, înălţimile sînt ceviene. Termenul a fost propus de A. Poulain (1888). *(V.B.)*

Chasles [şa:l], **Michel** (1793—1880), geometru francez. Profesor de geodezie şi mecanică aplicată la Şcoala Politehnică (Paris) şi de geometrie la Sorbona. Membru al Academiei de Ştiinţe din Paris. Contribuţiile sale în geometrie se referă la: secţiunile conice confocale, perspectivele sau proiecţiile stereografice, dualitate şi omografie, atracţia unui elipsoid omogen, contactele curbelor şi suprafeţelor, curbele cu dublă curbură. Op. pr.: *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en géométrie*, 1837; *Traité de géométrie supérieure*, 1852; *Traité des sections coniques*, 1865; *Rapport sur les progrès de la géométrie*, 1871. *(V.B.)*

cicloidă [gr. *kyklos* „roată", *eidos* „aspect"], curbă plană descrisă de un punct fix al unui cerc, care se rostogoleşte fără alunecare pe o dreaptă fixă, situată în planul cercului. Ecuaţiile parametrice în raport cu sistemul de referinţă cartezian, avînd axa Ox pe dreapta fixă şi cu originea O într-una din poziţiile punctului considerat pe axă, sînt:

$$x = a\,(t - \sin t),\; y = a\,(1 - \cos t),$$

în care a este raza cercului, iar $t = \sphericalangle\,(CM,\ CN)$ (fig. 30). Lungimea arcului de cicloidă, pentru

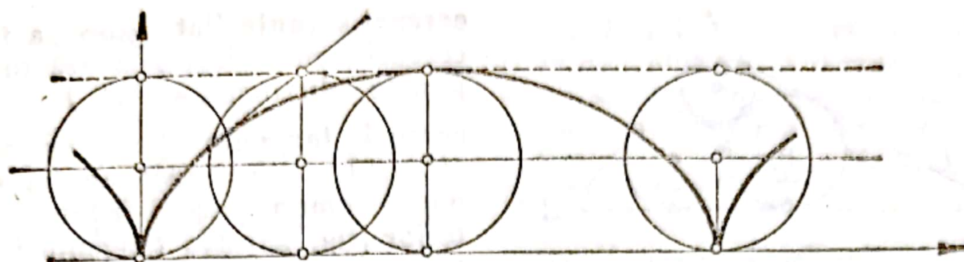


Fig. 80

$0 \leqslant t \leqslant 2\pi$, este egală cu $8a$, iar aria cicloidei, $A = 3\pi a^2$, a fost determinată (1636) de G.P. Roberval (utilizînd metoda indivizibilelor). Cicloida a fost considerată prima oară de Aristotel (sec. 4 î.e.n.), iar denumirea a fost introdusă de G. Galilei (1640). *(V.B.)*

cicloida lui Huygens, epicicloidă pentru care $r_0 = 2r$, unde r_0 este raza cercului fix şi r raza cercului mobil. Curba este formată din două arce egale avînd extremităţile în două puncte de înapoiere, diametral opuse pe cercul fix. Ecuaţiile parametrice sînt:

$$x = r(3 \cos t - \cos 3t)$$
$$y = r(3 \sin t - \sin 3t),$$

iar ecuaţia implicită are forma:

$$(x^2 + y^2 - 4r^2)^3 = 108\, r^4 y^2.$$

Aria domeniului mărginit de această cicloidă este: $A = 12\ \pi r^2$. Curbele cicloidale sînt utilizate în tehnică la trasarea profilelor dinţilor la roţile dinţate. *(V.B.)*

cifră [arab. *şifr* „gol, zero"], fiecare dintre cele zece simboluri grafice: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, care reprezintă numerele: zero, unu, doi, trei, patru, cinci, şase, şapte, opt, nouă. Încă din mileniul al 4-lea î.e.n., ca urmare a dezvoltării activităţii omeneşti, a apărut necesitatea înregistrării grafice a numerelor. Există trei moduri de provenienţă a cifrelor: a) din însemnări (trăsături, crestături — amintind numărarea pe degete), ca pentru I, II, III; b) din hieroglife, de exemplu (după ipotezele lui Th. Mommsen): cifra romană V (apărută prin hieroglifa ce reprezenta palma întinsă cu degetul mare răsfirat), cifra X (de la hieroglifa care arăta cele două mîini încrucişate); c) din litere, bunăoară: cifra C (iniţiala cuvîntului latinesc *centum* „sută"), cifra M (iniţiala cuvîntului latinesc *mille* „mie"). Ulterior, cifrele au fost desemnate prin simboluri specifice, dar şi prin litere (slavone, greceşti etc.), cele romane, menţinîndu-se pînă azi, I = 1, V = 5, X = 10, L = 50, C = 100, D = 500, M = 1 000, $\overline{\text{M}}$ = 10 000, $\overline{\overline{\text{M}}}$ = 100 000, sînt utilizate îndeosebi pentru redarea numerelor ordinale, la indicarea secolelor, la numerotarea capitolelor din cărţi ş.a. Cel mai vechi manuscris european care cuprinde semne asemănătoare cifrelor actuale s-a găsit în Spania (datînd din sec. 10), ceea ce denotă că cifrele în uz au fost aduse în Europa de către arabi (de aici şi denumirea de cifre „arabe"), ei împrumutîndu-le, probabil, de la indieni. Pînă în secolul 15, cînd aceste cifre s-au generalizat, ele au suferit o evoluţie continuă, statornicindu-se sub forma actuală odată cu folosirea tiparului, mai ales datorită lui J. Widmann (*Behende und hübsche Rechnung auf allen Kaufmannschaft*, 1489). La noi, folosirea cifrelor indo-arabe a început către anul 1750, deşi, sporadic, se întîlnesc şi mai înainte; de exemplu, pe pecetea lui Udrişte Năsturel anul 1623 era scris cu astfel de cifre. Cuvîntul cifră, derivat din cuvîntul sanscrit *sunya* „nimic, gol",

tradus de arabi prin *şifr*, a fost folosit în numeraţia verbală încă din secolul 5. Cînd numeraţia indo-arabă a fost introdusă în Europa (evul mediu), cuvîntul *şifr* a dat naştere la doi termeni diferiţi, fiindcă unii traducători (în special L. Fibonacci, 1202) l-au latinizat în *zephirum* „zero", iar alţii (de exemplu M. Planudes, c. 1300) l-au grecizat în *tziphra* „cifră", dar tot cu înţeles de zero („nimic"). Paralel cu acest înţeles, începînd din secolul 14, cuvîntul *cifră* s-a folosit şi pentru desemnarea celorlalte semne numerice, fapt statornicit definitiv abia în secolul 19. *(V.B.)*

cilindroid [gr. *kylindros* „cilindru", *eidos* „aspect"], corp mărginit de o suprafaţă cilindrică şi de două suprafeţe (una fiind plană) ce o intersectează. Este întîlnit, îndeosebi, în teoria integralelor multiple. *(V.B.)*

cilindru [gr. *kylindros* „butuc, tub"] **1.** (În geometria elementară). Corp mărginit de o suprafaţă cilindrică şi de două plane paralele (ale căror secţiuni în suprafaţa cilindrică sînt *bazele* cilindrului). — *Cilindru circular*, cilindrul cu bazele în formă de cerc (fig. 31). — *Cilindru drept*, cilindrul ale cărei generatoare sînt perpendiculare pe baze. — *Cilindru echilater*, cilindrul circular drept care are generatoarea egală cu diametrul bazei. Pentru un cilindru circular drept, cu raza cercului de bază r şi cu înălţimea h, aria laterală este dată de formula:

$$A_l = 2\pi rh,$$

iar volumul prin expresia:

$$V = \pi r^2 h.$$

Calculul volumului cilindrului era cunoscut în Egiptul antic (2000 î.e.n.). **2.** Suprafaţă generată de o dreaptă mobilă (numită generatoare), de direcţie dată, care se sprijină pe o curbă dată (numită directoare). Denumirea, la origine, a fost adoptată în accepţia geometrică de Democrit (sec. 5 î.e.n.). Se mai numeşte *suprafaţă cilindrică*. *(V.B.)*

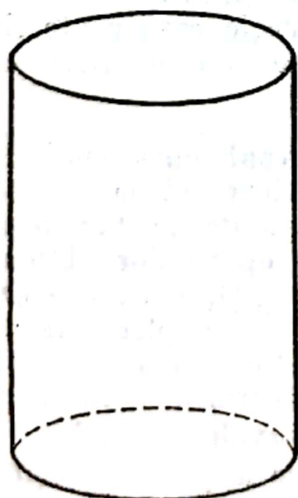


Fig. 31

cinci [lat. *quinque*], număr natural indicat prin cifra 5 (simbol statornicit, în Europa, după inventarea tiparului, în 1440, a cărui formă provine de la înfăţişarea unei mîini strînsă pumn cu degetul mare izolat şi îndoit), sau prin simbolul roman V (imaginea palmei întinse cu degetul mare răsfirat, amintind, ca şi cuvîntul sanscrit corespunzător *panca* „întinde mîna!", originea numărării cu ajutorul degetelor). *(V.B.)*

cinematica [gr. *kinema* „mişcare"], parte a mecanicii care studiază mişcarea sistemelor de puncte materiale, independent de forţele ce acţionează asupra acestora. Termenul a fost propus de André-Marie Ampère. *(Essai sur la philosophie et la classification des sciences)*. *(Şt. G.)*

Ciorănescu, Nicolae (1903—1957), matematician român. Studii la Universitatea din Bucureşti şi la Paris (doctor la Sorbona, 1929). Profesor la Institutul Politehnic din Bucureşti (din 1943). Membru al Societăţii Române de Ştiinţe. Lucrări în dome-

nul algebrei, analizei matematice (ecuații diferențiale și cu derivate parțiale, ecuații funcționale, teoria funcțiilor), mecanicii generale. Op. pr.: *Curs de algebră și analiză matematică*, 1955; *Tratat de matematici speciale*, ediție postumă, 1962. *(V.B.)*

circumferință [lat. *circum* „împrejur", *ferre* „a duce, a purta"] → cerc

cisoidă [gr. *kisos* „iederă"], curbă plană descrisă de un punct M de pe o secantă mobilă ce trece printr-un punct fix O al unui cerc, astfel încît, intersectînd cercul a doua oară în punctul N și tangenta la cerc dusă în punctul A, diametrul opus lui O, în P, să îndeplinească condiția $OM = NP$ (fig. 32). Ecuația carteziană a cisoidei raportată la un reper cartezian cu originea O și cu axa absciselor OA, este:

$$x(x^2 + y^2) - 2ay^2 = 0,$$

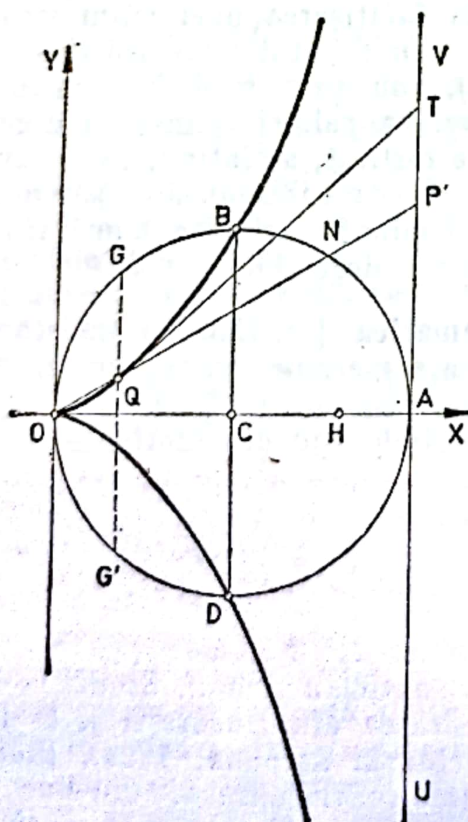


Fig. 32

unde a este raza cercului. Cisoida admite ca asimptotă dreapta $x = 2a$. Ecuația în coordonate polare este:

$$r = \frac{2a \sin^2 \theta}{\cos \theta}.$$

Aria domeniului cuprins între cisoidă și asimptota ei este: $A = 3\pi a^2$. Cisoida a fost descoperită de Diocles (sec. 2 î.e.n.), care a folosit-o la rezolvarea problemei dublării cubului. *(V.B.)*

ciurul lui Eratostene [lat. *cibrum*], procedeu de determinare a numerelor prime mai mici decît un număr n dat, imaginat pentru prima dată de Eratostene (sec. 3 î.e.n.). Acesta a scris numerele naturale în ordinea crescătoare pe un papirus și a găurit locurile unde erau numerele neprime: multiplii lui 2, lui 3, lui 5, lui 7 ș.a.m.d., obținînd „ciurul" prin care au trecut toate numerele compuse, rămînînd cele prime. Eratostene a întocmit, după procedeul său, tabelul numerelor prime pînă la 1000. *(V.B.)*

cîmp [lat. *campus* „întindere"], corp comutativ. — *Cîmp al lui Galois*, corp cu un număr finit de elemente. Orice corp finit este comutativ. *(A.B.)*

cîmp 1. Parte a unei înregistrări rezervată pentru a conține informații de același tip. **2.** Cea mai mică parte de informație care poate fi distinsă în procesul de descriere a datelor. *(T.B.)*

cîmp de evenimente, mulțime de evenimente aleatoare pe care s-a definit o structură de algebră booleană cu ajutorul operațiilor binare „sau" ($\bigcup$), „și" ($\bigcap$), precum și cu ajutorul operației de complementaritate (care asociază fiecărui eveniment opusul său). În teoria modernă a probabilităților, dezvoltarea pe baza definiției axiomatice a probabilității dată de A.N. Kolmogorov, un cîmp de eveni-

mente este reprezentat de un dublet $\{\Omega, K\}$, unde Ω este asimilat cu o mulțime de elemente ω (numite evenimente elementare), iar K constituie un corp borelian de părți al lui Ω. Un caz particular îl constituie cîmpul de evenimente pentru care Ω este constituit dintr-un număr finit de elemente $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$. Un asemenea cîmp de evenimente (numit finit) este format din 2^n evenimente diferite, fiecare dintre acestea putîndu-se exprima, în mod unic, cu ajutorul evenimentelor elementare $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ și al operației „sau". Intuitiv, printr-un cîmp de evenimente se înțelege mulțimea tuturor evenimentelor aleatoare ce se pot realiza în urma unei experiențe aleatoare date. În această mulțime se includ întotdeauna evenimentul sigur Ω și evenimentul imposibil $\emptyset$. *(A.Ș.)*

cîmp de probabilitate, tripletul $\{\Omega, K, P\}$, unde $\{\Omega, K\}$ reprezintă un cîmp de evenimente, iar P este o probabilitate definită de K. Un cîmp finit de probabilitate este complet definit prin specificarea evenimentelor elementare $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_n$ și a probabilităților $p_1, p_2, ..., p_n$, corespunzătoare acestora. $\left(\text{Obligatoriu } \sum_{i=1}^{n} p_i = 1\right)$. Un caz de interes particular întîlnit într-o serie de fenomene aleatoare simple îl prezintă cîmpurile finite în care considerente de ordin empiric, sau intuitiv, conduc la acceptarea echiprobabilității evenimentelor elementare. Într-un asemenea cîmp probabilitatea oricărui eveniment poate fi calculată după definiția clasică a probabilității. În particular, $P(\omega_1) = P(\omega_2) = ... = P(\omega_n) = \frac{1}{n}$. *(A.Ș.)*

cît → **împărțire**

Clairaut [clerǫ], **Alexis Claude** (1713—1765), matematician și astronom francez. La vîrsta de 18 ani a devenit membru al Academiei Franceze de Științe, în urma elaborării unor memorii de geometrie. Alte cercetări privesc trigonometria sferoidală, ecuațiile diferențiale (ecuația care îi poartă numele), teoria factorului integrant. A participat la expediția organizată de Academia Franceză în Laponia (1736) pentru măsurarea arcului de meridian. Lucrări de astronomie privind teoria Lunii și mișcarea cometelor; a enunțat problema celor trei corpuri. Op. pr.: *Recherches sur les courbes à double courbure*, 1731; *Traité de la figure de la Terre*, 1743. *(V.B.)*

clan [fr. *clan*], clasă K nevidă de părți ale unei mulțimi E cu proprietățile:

a) dacă $A, B \in K$ atunci $A \bigcup B \in K$;

b) dacă $A, B \in K$ atunci $A - B \in K$.

— *Clan borelian*, clan K pentru care axioma a) se înlocuiește cu:

a′) dacă $A_i \in K$, $i = 1, 2, ...$, atunci

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \in K.$$

Se mai numește *corp borelian*. *(A.Ș.)*

clasa unei curbe (plane), numărul tangentelor ce se pot duce dintr-un punct al planului la acea curbă. Dacă curba are d puncte duble și k puncte de înapoiere, clasa curbei este egală cu: $n(n-1) - 2d - 3k$ (formula este valabilă și în cazul punctelor multiple, ținînd seama că un punct multiplu de ordinul p este echivalent cu $\frac{p(p-1)}{2}$ puncte duble). Ex.: clasa unui cerc este 2 (dintr-un punct exterior i se pot duce două tangente). Noțiunea a fost introdusă de J. Poncelet (1818). *(V.B.)*

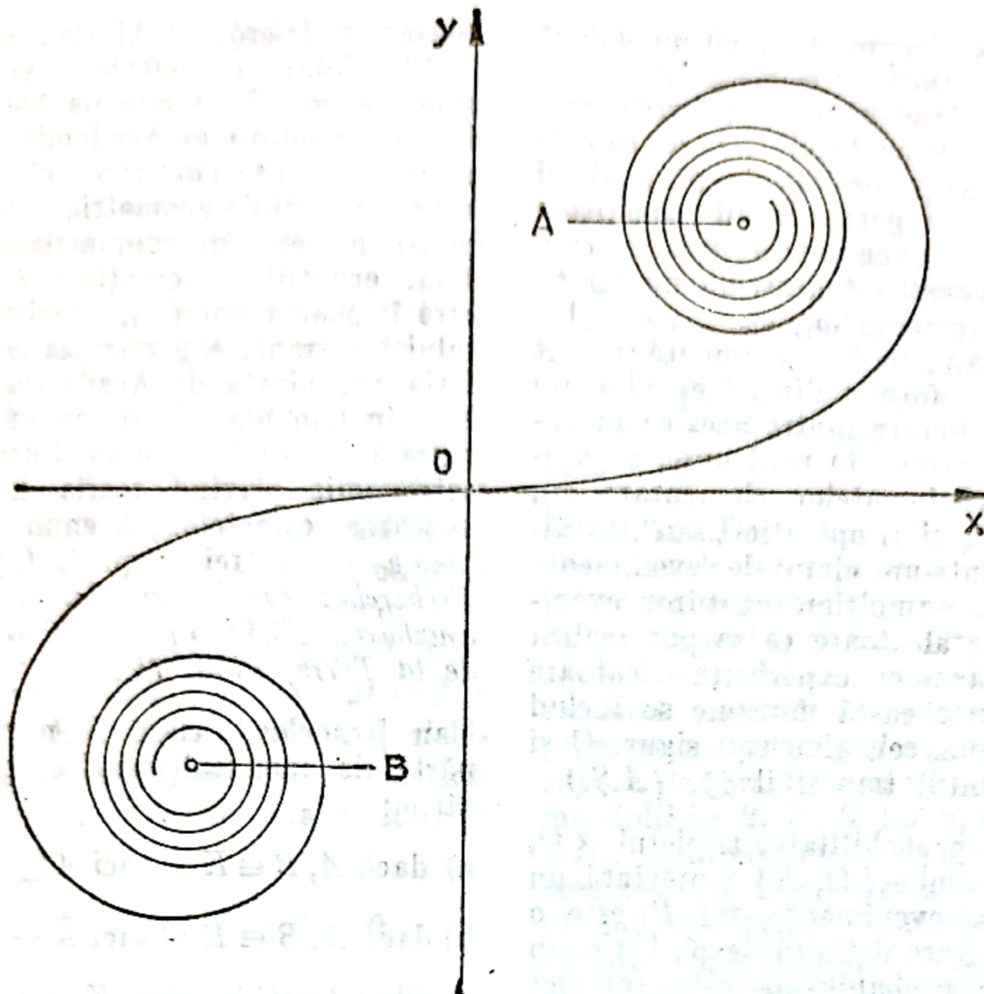


Fig. 33

clasa unei suprafețe, numărul planelor tangente ce se pot duce printr-o dreaptă din spațiu la acea suprafață. Clasa unei suprafețe algebrice de gradul n este egală, în general, cu: $n(n-1)^2$. *(V.B.)*

clasă de echivalență, mulțimea $C_a = \{x \mid x \sim a, \ x \in M\}$, unde $\sim$ este o relație de echivalență definită pe mulțimea M. Ex.: clasele de resturi modulo-p. Dacă $a \sim b$, clasele de echivalență corespunzătoare coincid: $C_a = C_b$, iar în caz contrar sînt disjuncte. Mulțimea claselor de echivalență, numită *mulțime factor*, realizează o partiție a mulțimii M. *(A.B.)*

clase de resturi (modulo-p) → **congruența modulo-p**

clasele sistemului zecimal de numerație → sistem de numerație

clotoidă [gr. *Clotho* — nume de asteroid, *eidos* „aspect, înfățișare"], curbă plană a cărei curbură într-un punct este proporțională cu lungimea arcului cuprins între alt punct fix al curbei și cel considerat. Ecuația intrinsecă a clotoidei este:

$$Rs = a^2,$$

în care R este raza de curbură, s lungimea arcului și a o constantă (fig. 33). Este folosită în racordări de liniamente rutiere. Clotoida a fost studiată inițial de A. Peters (1838). Se mai numește *spirala lui Cornu*. *(V.B.)*

coardă [lat. *chorda* „coardă, strună"], segment de dreaptă care unește două puncte ale unei curbe. *(V.B.)*

COBOL [engl. *Common Bussiness Operation Language*], limbaj de programare creat în 1960 pentru rezolvarea pe calculator a problemelor de gestiune. În urma perfecţionărilor aduse, este disponibil pentru cea mai mare parte a calculatoarelor utilizate în problemele comerciale. *(T.B.)*

cod, corespondenţă între simbolurile a două alfabete, avînd drept scop trecerea de la o formă de reprezentare a informaţiei la alta. Operaţia de codificare la calculatoarele electronice realizează reprezentarea informaţiei într-o formă accesibilă calculatorului, pornind de la forma uzuală de prezentare a informaţiei în comunicările dintre oameni. Astfel, pentru codificarea numerelor reale în vederea reprezentării lor într-un calculator sînt utilizate codurile *complementar*, *direct* şi *invers*. *(T.B.)*

codivizor → divizor

coeficient [lat. *co* „cu", *efficiens* „efect"], constantă care multiplică o mărime variabilă într-o expresie matematică, o necunoscută sau un produs de necunoscute într-o ecuaţie, o nedeterminată sau un produs de nedeterminare într-un polinom. Coeficienţii se scriu înaintea mărimii pe care o multiplică, după propunerea lui R. Descartes (1637), iar practica de a nota cu acelaşi simbol literal coeficienţii pozitivi sau negativi provine de la J. Hudde (1675). — *Coeficient binomial*, fiecare dintre coeficienţii care apar în formula binomului lui Newton; sînt de forma C_n^k. *(V.B.)*

coeficient de corelaţie → corelaţie

coeficient de pierderi (pentru o maşină; φ), raportul dintre lucrul mecanic pasiv şi lucrul mecanic motor. *(Şt. G.)*

coeficient unghiular (al unei drepte; m), tangenta trigonometrică a unghiului u ($u < 180°$) cu care trebuie rotită axa Ox, în sens direct, pentru a se suprapune peste o paralelă la dreapta dată, dusă prin origine. În ecuaţia explicită a unei drepte, raportată la un reper cartezian, $y = mx + n$, coeficientul unghiular este coeficientul lui x. Dacă dreapta este dată prin ecuaţia generală $Ax + By + C = 0$, atunci coeficientul unghiular este $m = -\frac{A}{B}$. Coeficientul unghiular al unei drepte determinată de două puncte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ este: $m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$. Coeficientul unghiular al tangentei la curba $y = f(x)$ în punctul $(x_0, f(x_0))$ este $m = f'(x_0)$ (G. Leibniz, 1673). Se mai numeşte *pantă*. *(V.B.)*

coeficienţii formelor pătratice ale unei suprafeţe. 1. (Pentru prima formă fundamentală):

$$E = \left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}$$

$$G = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2,$$

dacă suprafaţa este dată de ecuaţiile:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),$$

sau

$$E = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2$$

$$F = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$G = 1 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2,$$

dacă suprafața este dată prin ecuația explicită $z = f(x, y)$. Acești coeficienți apar în toate problemele diferențiale metrice, de prim ordin (element de arc, element de arie). **2.** (Pentru a doua formă fundamentală):

$$L = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial u^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$M = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 y}{\partial u \partial v} & \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$N = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 x}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 y}{\partial v^2} & \frac{\partial^2 z}{\partial v^2} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix},$$

dacă suprafața este dată de ecuațiile:

$$x = x(u, v),\ y = y(u, v),\ z = z(u, v),$$

sau

$$L = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

$$M = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

$$N = \frac{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}}$$

în cazul reprezentării $z = f(x, y)$. Acești coeficienți apar în problemele diferențiale de al doilea ordin (curbură totală, curbură medie, curbură normală). *(V.B.)*

coerență [lat. *cohaerentia* „coeziune, legătură"], proprietate a unui sistem de axiome de a nu exista contradicție între nici o pereche de propoziții care pot fi deduse din el. Se mai numește *consistență*. *(V.B.)*

cohleoidă [gr. *chole* „bilă", *eidos* „aspect"], curbă plană, loc geometric al extremităților arcelor cercurilor tangente unei drepte într-un punct al ei *O*, avînd originea comună *O* și aceeași lungime *a*. Este locul geometric al centrelor de greutate ale arcelor unui cerc care au o origine comună într-un punct fix al cercului. Ecuațiile carteziană și polară ale cohleoidei sînt:

$$\frac{y}{x} = \operatorname{tg} \frac{ay}{x^2 + y^2}; \quad r = \frac{a \sin \theta}{\theta}.$$

Cohleoida a fost introdusă de J. Perks (1700), iar denumirea ei actuală i se datorează lui C. Falkenburg (1883). *(V.B.)*

coliniaritate, calitate a mai multor puncte de a fi situate pe aceeași dreaptă. Condiția de coliniaritate a trei puncte *A'*, *B'*, *C'* situate pe laturile *BC*, *CA*, *AB* ale unui triunghi sau

pe prelungirile lor este dată de reciproca teoremei lui Menelaus: dacă $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = -1$, atunci A', B', C' sînt coliniare. Condiția de coliniaritate cînd se cunosc coordonatele carteziene ale punctelor $A_1(x_1, y_1)$, $A_2(x_2, y_2)$, $A_3(x_3, y_3)$ este:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

iar pentru trei puncte în spațiu $A_1(x_1, y_1, z_1)$, $A_2(x_2, y_2, z_2)$, $A_3(x_3, y_3, z_3)$, condițiile de coliniaritate sînt:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad \begin{vmatrix} x_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

$$\begin{vmatrix} z_1 & y_1 & 1 \\ z_2 & y_2 & 1 \\ z_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Condiția ca n puncte $P_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, să fie coliniare este ca rangul matricii:

$$\left\| \begin{matrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{matrix} \right\|$$

să fie egal cu 2. Condițiile de coliniaritate ale punctelor date prin coordonatele carteziene au fost stabilite de G. Monge (1809), iar A. Cayley (1843) le-a redat sub formă de determinanți. *(V.B.)*

cologaritm (al unui număr x; colog x), logaritmul inversului lui x:

$$\operatorname{colog} x = \log \frac{1}{x} = -\log x.$$

Cologaritmul unui număr se obține din logaritmul acelui număr prin scăderea cifrelor mantisei din 9 (afară de ultima cifră semnificativă care se scade din 10), adăugarea unei unități la caracteristică și schimbarea semnului. *(V.B.)*

combinație liniară (a elementelor A_1, A_2, ..., A_n dintr-un modul V peste un inel R), element de forma:

$$a_1A_1 + a_2A_2 + \ldots + a_nA_n$$

aparținînd lui V, unde $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R$. *(V.B., A.B.)*

combinări de n luate cîte k [lat. *combinare* „a îmbina, a potrivi lucruri diferite"] (n și k numere naturale, $n \geq k$; C_n^k, $\binom{n}{k}$), numărul submulțimilor distincte, fiecare conținînd k elemente, toate diferite, formate cu cele n elemente ale unei mulțimi. Se calculează cu formula:

$$C_n^k = \frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Reprezintă numărul aplicațiilor strict crescătoare ale unei mulțimi finite, total ordonate, avînd k elemente, într-o mulțime finită, total ordonată, cu n elemente. — *Combinări complementare*, două combinări la care suma indicilor superiori este egală cu indicele inferior comun. Combinările complementare sînt egale:

$$C_n^k = C_n^{n-k}.$$

— *Combinări cu repetiție de n luate cîte k*(n și k numere naturale; $\bar{C}_n^k$), numărul grupelor distincte, fiecare conținînd k elemente, eventual nu toate distincte, formate cu n elemente, date în k exemplare. Se calculează cu formula:

$$\bar{C}_n^k = C_{n+k-1}^k =$$
$$= \frac{n(n+1)(n+2)\dots(n+k-1)}{k!}.$$

Reprezintă numărul aplicaţiilor crescătoare ale unei mulţimi finite total ordonate, avînd k elemente, într-o mulţime finită, total ordonată, cu n elemente. Primele procedee de calcul pentru unele combinări au fost date de Bhascara (c. 1150); contribuţii ulterioare au adus N. Tartaglia (1556), P. Hérigone (1634) ş.a. Notaţia C_n^k a fost introdusă de E. Netto (1901). Denumirea se întîlneşte iniţial la B. Pascal (*Traité du ordres numériques*; tipărit postum, 1665). *(V.B.)*

compas [lat. *com* „cu"; *passus* „pas, deschidere"], instrument format din două braţe articulate la un capăt, celălalt capăt fiind ascuţit, sau unul ascuţit şi celălalt prevăzut cu un dispozitiv pentru desenat. Compasul se foloseşte pentru trasat cercuri, sau pentru compararea unor distanţe. G. Mohr (în *Euclides Danicus*, 1672; lucrare rămasă necunoscută pînă în 1928), dar mai ales L. Mascheroni (în *Geometria del compasso*, 1797) au arătat că toate construcţiile cu rigla şi compasul din geometria euclidiană pot fi făcute numai cu ajutorul compasului. Compasul era cunoscut în secolul 5 î.e.n. *(V.B.)*

compilator, program de traducere care realizează translatarea unui program, scris într-un limbaj simbolic de nivel înalt, într-un program echivalent, scris într-un limbaj orientat către calculator. În acelaşi timp, compilatorul poate face o analiză a textului pentru a stabili dacă a fost scris în conformitate cu regulile gramaticale ale limbajului, indicînd locul şi tipul eventualelor erori. *(T.B.)*

complement (al unui unghi), unghi, care împreună cu unghiul dat însumează 90°. *(V.B.)*

complement algebric [lat. *complementum* „întregire, completare"] → **determinant de ordinul n**

complementară (a unei mulţimi M, în mulţimea E, care conţine pe M; $C_E M$, CM), mulţimea elementelor lui E care nu aparţin lui M. Complementara lui M în M este mulţimea vidă $\varnothing$. — *Formulele lui De Morgan*, formule care dau complementara unei reuniuni şi a unei intersecţii:

$$C(A \cup B) = CA \cap CB$$

$$C(A \cap B) = CA \cup CB. \qquad (V.B.)$$

comultiplu → **multiplu**

comutativitate [lat. *com* „împreună", *mutatio* „schimbare, mutaţie"], proprietate a unei operaţii binare $f: M \times M \to M$, $f(x, y) = x \circ y$, de a satisface relaţia:

$$x \circ y = y \circ x,$$

pentru orice $x, y \in M$. Proprietatea de comutativitate a unei operaţii asociative se extinde, prin inducţie, la un număr finit de elemente şi exprimă faptul că prin aplicarea operaţiei unui şir de elemente, se obţine acelaşi rezultat independent de ordinea elementelor şirului. Ex.: adunarea şi înmulţirea numerelor reale, adunarea matricilor sau a vectorilor, reuniunea şi intersecţia mulţimilor sînt operaţii comutative; scăderea şi împărţirea numerelor reale, înmulţirea matricilor pătratice, compunerea funcţiilor nu sînt comutative. Termenul a fost introdus de F. Servois (1815). *(V.B., A.B.)*

con [gr. *conos*] **1.** (În geometria elementară). Corp mărginit de o suprafaţă conică (constituind suprafaţa laterală a conului) şi de planul curbei directoare (pe care se formează baza conului). — *Con circular*, con a cărui directoare este un cerc (fig. 34). — *Con circular drept*, conul a cărui înălţime trece prin centrul cercului de

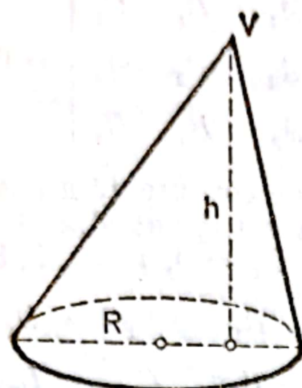


Fig. 34

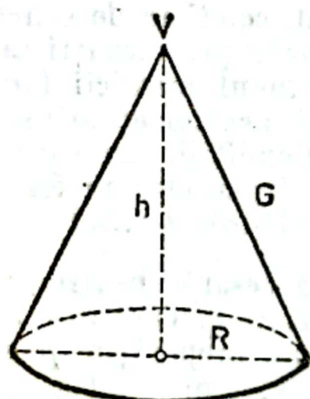


Fig. 35

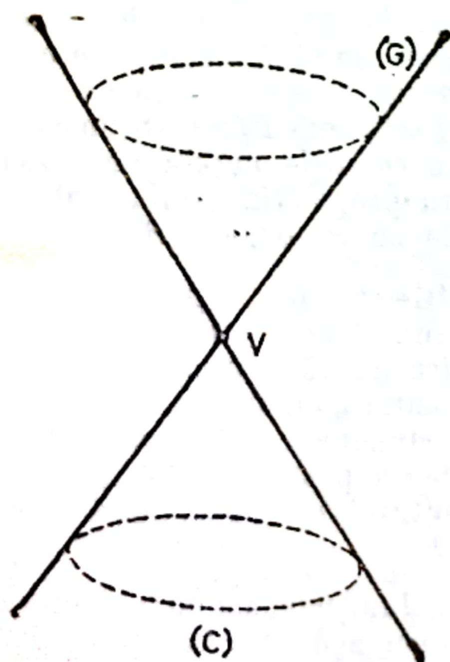


Fig. 36

bază (fig. 35). — *Con echilater*, con a cărui secţiune axială este un triunghi echilateral. Aria laterală şi totală a conului circular drept se calculează prin formulele: $A_l = \pi r g$, $A_t = \pi r(r + g)$, unde h este înălţimea, g generatoarea şi r raza cercului de bază. Volumul conului este dat de formula: $V = \frac{\pi r^2 h}{3}$ (demonstrată de Eudoxos, sec. 4 î.e.n., şi a cărei descoperire i se datorează lui Democrit, sec. 5 î.e.n., care considera orice volum, conform ideii sale atomiste, ca o sumă de straturi de atomi). 2. Suprafaţă generată de o dreaptă (numită generatoare), care trece printr-un punct fix (numit vîrf) şi se sprijină pe o curbă fixă (numită directoare). Conul are două pînze, dacă generatoarea e nemărginită în ambele părţi ale vîrfului (fig. 36) şi o singură pînză, dacă generatoarea este o semidreaptă mărginită de vîrf. Denumirea, împrumutată din botanică, a fost adoptată în geometrie de Democrit. Se mai numeşte *suprafaţă conică*. *(V.B.)*

concluzie [lat. *conclusio* „încheiere"] →**teoremă**

concoidă [gr. *konche* „scoică", *eidos* „înfăţişare"], curbă plană descrisă de punctul M pentru care $OM = ON \pm b$, unde O este un punct fix prin care trece o dreaptă mobilă (d) ce intersectează în N o curbă fixă (D), iar b este un segment dat. — *Concoida dreptei* (Nicomede, sec. 2 î.e.n.), concoidă obţinută atunci cînd curba fixă (D) este o dreaptă. Ecuaţia ei în coordonate polare este:

$$r = \frac{a}{\cos\theta} \pm b,$$

iar ecuaţia implicită:

$$(x - a)^2 (x^2 + y^2) - b^2 x^2 = 0,$$

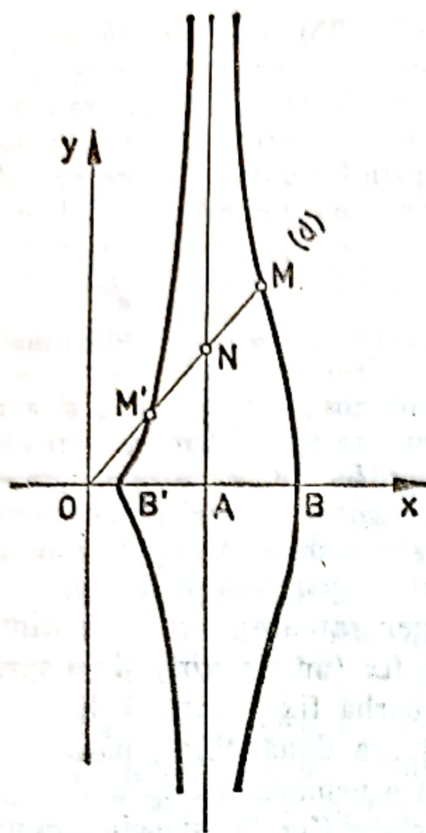


Fig. 37

unde $a = OA$, $b = AB$ (fig. 37). — *Concoida cercului*, concoidă obţinută atunci cînd curba fixă *(D)* este un cerc. Ecuaţia ei în coordonate polare este de forma:

$$r = a \cos \theta + b.$$

Dacă $b > a$ se obţine melcul lui Pascal, iar pentru $a{=}b$ o cardioidă. Denumirea a fost propusă de Proclus (sec. 5). *(V.B.)*

concurenţă [lat. *con* „împreună", *currere* „a fugi"], proprietate a trei sau mai multe curbe sau suprafeţe de a avea un punct comun, numit punct de concurenţă. Condiţia de concurenţă a trei ceviene AA', BB', CC' este dată de reciproca teoremei lui Ceva: dacă $\frac{AB'}{B'C} \cdot \frac{CA'}{A'B} \cdot \frac{BC'}{C'A} = 1$, atunci cevienele AA', BB', CC' sînt concurente. Condiţia de concurenţă a trei drepte date prin ecuaţiile: $A_1x + B_1y + C_1 = 0$, $A_2x + B_2y + C_2 = 0$, $A_3x + B_3y + C_3 = 0$ este:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Condiţia de concurenţă a patru plane date prin ecuaţiile: $A_ix + B_iy + C_iz + D_i = 0$, $i = 1, 2, 3, 4$ este:

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 & D_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 & D_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 & D_3 \\ A_4 & B_4 & C_4 & D_4 \end{vmatrix} = 0.$$

În general, condiţia de concurenţă a n plane date prin ecuaţii carteziene este ca rangul matricii formate cu coeficienţii acestor ecuaţii să fie egal cu trei. Condiţiile de concurenţă a dreptelor şi planelor au fost date de G. Lamé (1818). *(V.B.)*

condiţie necesară (pentru propoziţia p), propoziţie q, care este adevărată atunci cînd propoziţia p este adevărată. Ex.: propoziţia „numărul natural n este par" este o condiţie necesară pentru propoziţia „numărul n este divizibil cu 4". *(A.B.,V.B.)*

condiţie necesară şi suficientă (pentru propoziţia p), propoziţie q, echivalentă cu propoziţia p. Ex.: propoziţia „numărul a este rădăcina ecuaţiei $P(x) = 0$, unde $P(x)$ este un polinom" este o condiţie necesară şi suficientă pentru propoziţia „polinomul $P(x)$ se divide cu $x-a$". *(A.B., V.B.)*

condiţie suficientă (pentru propoziţia p), propoziţie q, care fiind adevărată implică adevărul propoziţiei p. Ex.: propoziţia „numărul natural n se termină cu două zerouri", este o condiţie suficientă pentru propoziţia „numărul natural n se divide cu 4". *(A. B., V.B.)*

condiţii iniţiale, condiţii impuse soluţiei unei ecuaţii diferenţiale sau cu derivate parţiale astfel încît, pentru

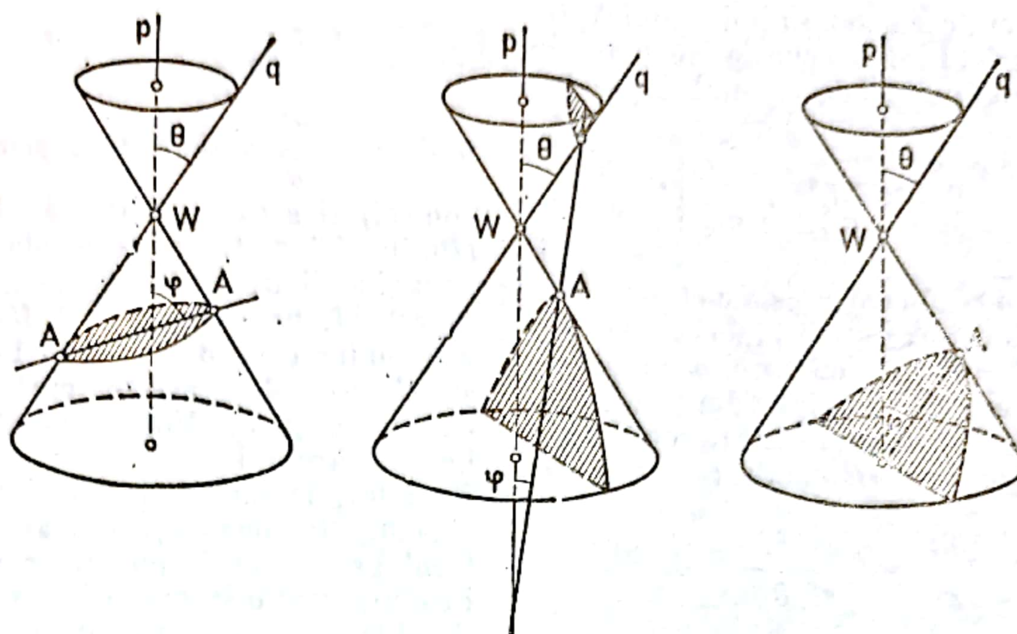


Fig. 38

o anumită valoare dată uneia dintre variabile, să se reducă la valori (sau la funcții de celelalte variabile) date. Ex.: impunînd soluției ecuației diferențiale:

$$y' = xy$$

condiția $y(0) = 1$, se obține soluția particulară $y = e^{\frac{x^2}{2}}$. *(V.B.)*

condiții la limită, condițiile impuse soluției unei ecuații diferențiale sau cu derivate parțiale să le satisfacă pe frontiera domeniului pe care este definită. *(V.B.)*

congruență [lat. *congruentia* „potrivire, conformitate, acord"], egalitatea figurilor geometrice. Termenul a fost folosit inițial în această accepție de D. Hilbert (1899). *(V.B.)*

congruență modulo-p [lat. *congruenstis* „potrivit, conform, egal"] *(p* număr natural; $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ p)$*)*, relație definită pe mulțimea numerelor întregi astfel: $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ p)$, dacă a și b dau același rest la împărțirea cu p. Relația este reflexivă: $a \equiv a \ (\mathrm{mod}\ p)$, simetrică: dacă $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ p)$ atunci $b \equiv a \ (\mathrm{mod}\ p)$ și tranzitivă: dacă $a \equiv b \ (\mathrm{mod}\ p)$ și $b \equiv c \ (\mathrm{mod}\ p)$ atunci $a \equiv c \ (\mathrm{mod}\ p)$, fiind deci o relație de echivalență. Elementele mulțimii factor, determinate în mulțimea numerelor întregi de congruența modulo-p, se numesc *clase de resturi modulo-p*. Congruențele modulo-p se pot aduna, scade și înmulți. — *Congruență cu o necunoscută*, ecuație de forma:

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n \equiv 0 \ (\mathrm{mod}\ p),$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt numere întregi. Noțiunea și notația „≡" au fost introduse de K. Gauss *(Disquisitiones arithmeticae*, 1801). *(V.B.)*

congruență de curbe, familie de curbe, în spațiu, cu doi parametri. *(V.B.)*

conică [gr. *konos* „con"], curbă obținută prin secționarea unui con cu un plan (fig. 38). Conicele sînt curbe algebrice de ordinul doi, ecuațiile lor într-un sistem de coordonate cartezian fiind de forma:

$$f(x, y) = a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + \\ + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0.$$

Determinarea genului de conică reprezentată prin ecuația generală se face în funcție de semnul expresiei:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{12} & a_{22} \end{vmatrix}.$$

Dacă $\delta > 0$ conica este o elipsă, dacă $\delta < 0$ conica este o hiperbolă și pentru $\delta = 0$ conica este o parabolă. Pentru $\delta \neq 0$ conica admite un centru de simetrie ale cărui coordonate sînt soluțiile sistemului:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Dacă $\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix} = 0$, conica degenerează în două drepte care trec prin origine. Direcțiile axelor de simetrie ale conicei sînt rădăcinile ecuației:

$$a_{12}m^2 + (a_{11} - a_{22})m - a_{12} = 0.$$

Focarele conicei au coordonatele date de soluțiile sistemului:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = 4(a_{11} - a_{22})f(x, y)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} = 4a_{12} f(x, y).$$

Printr-o deplasare a axelor de coordonate ecuația conicelor poate fi redusă la forma canonică:

$$\alpha x^2 + \beta y^2 + \gamma = 0.$$

Într-un sistem de coordonate polare, avînd polul într-un focar și ca axă polară, axa conicei care conține polul, ecuația unei conice este:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

unde $p = \frac{b^2}{a}$ (a și b sînt semiaxele conicei) și e excentricitatea. Primul studiu sistematic al conicelor, precum și atribuirea denumirilor: elipsă, hiperbolă, parabolă a fost făcut de Apollonius (sec. 3 î.e.n.) în lucrarea sa *Conica*, deși aceste curbe erau cunoscute și de Menechmus (sec. 4 î.e.n.), căruia i se atribuie descoperirea lor, de Euclid și Arhimede (sec. 3 î.e.n.). Pappus (sec. 3) a arătat că locul geometric al punctelor pentru care raportul distanțelor la un punct fix și la o dreaptă fixă este constant, este o conică. *(V.B.)*

conjuncție [lat. *coniunctio* „legătură, unire, raport"] (a două propoziții p, q; $p \cdot q$, $p\&q$, $p \wedge q$, $p \cap q$, Kpq), propoziția „p și q" adevărată dacă p și q sînt adevărate și falsă în rest. Tabelul de valori logice ale conjuncției este:

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \cdot q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

unde $v(p)$ este valoarea logică a propoziției p. *(A.B.)*

conoid [gr. *konos* „con", *eidos* „aspect"], suprafață generată de o dreaptă ce se menține paralelă cu un plan dat (numit plan director) și se sprijină pe o dreaptă fixă (numită dreaptă directoare) și pe o curbă fixă (numită curbă directoare). Definiția conoidului a fost dată de Ch. Tinseau (1870). — *Conoid drept*, conoid la care dreapta directoare este perpendiculară pe planul director. — *Conoid circular drept*, conoid la care

dreapta directoare este axa Oz, planul director este planul xOy, iar curba directoare este cercul:

$$\begin{cases} x^2 + z^2 - r^2 = 0 \\ y = a \end{cases}$$

Ecuația sa carteziană este: $y^2z^2 + a^2x^2 - r^2y^2 = 0$. Se mai numește *conoidul lui Wallis* sau *pana conică*. *(V.B.)*

consistență → coerență

constantă [lat. *constant-tis* „neschimbător"], mărime a cărei valoare rămîne neschimbată. Notația constantelor se face, de obicei, cu primele litere ale alfabetului latin, după propunerea lui T. Harriot (1631) și R. Descartes (1637). Denumirea a fost introdusă de G. Leibniz (1693). *(V.B.)*

constanta lui Euler *(C)*:

$$C = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \ln n\right) =$$

$= 0{,}577\ 215\ldots$ (ale cărei valori aproximative au fost obținute de L. Euler, 1735). *(V.B.)*

construcție geometrică, desenarea figurilor geometrice cu rigla (negradată) și compasul. Prin tradiție se dă preferință folosirii acestor instrumente, pentru că sînt cele mai simple și dau o construcție precisă. În cadrul problemelor de construcții geometrice, un loc important l-au deținut, pe lîngă construirea poligoanelor regulate, cele trei probleme celebre ale antichității: cuadratura cercului, dublarea cubului și trisecțiunea unghiului, a căror soluționare s-a dovedit a fi imposibilă, de abia după două milenii de la apariția lor. Probleme importante legate de construcțiile geometrice au rezolvat: G. Mascheroni, care a arătat că toate construcțiile geometrice pot fi efectuate numai cu compasul, K. Gauss, care a demonstrat posibilitatea construirii cu rigla și compasul a poligoanelor regulate cu p laturi (cu p număr prim), numai în cazul numerelor de forma $p = 2^{2^n} + 1$ și J. Steiner, care a arătat că toate construcțiile geometrice pot fi efectuate numai cu rigla, cu condiția să fie dat un cerc fix și centrul său. *(V.B.)*

continuitate [lat. *continuitas-tatis*], proprietate a unei funcții de a fi continuă. Intuitiv, continuitatea unei funcții exprimă faptul că graficul său nu are întreruperi. Definirea riguroasă a continuității, datorîndu-se lui A. Cauchy (1821), asigură posibilitatea aplicării noțiunii și pentru funcții care nu pot fi reprezentate grafic; un astfel de exemplu a fost dat de K. Weierstrass (1872). *(V.B.)*

controlul calității producției (statistic), ansamblu de metode statistice, aplicabile producției de serie mare, urmărind eliminarea sistematică a variațiilor calitative, sau, reducerea acestora la un nivel acceptabil. *(A.Ș.)*

contur → frontieră

convergență [lat. *con* „cu", „împreună", *vergere* „a se apropia", „a se îndrepta"] **1.** (Pentru un șir) → *limita unui șir*. **2.** (Pentru o serie) → *serie*. Termenul a fost folosit prima dată de J. Gregory (1667). *(V.B.)*

coordonate [fr. *coordonné*], numere care caracterizează poziția unui punct pe o dreaptă, într-un plan sau în spațiu, în funcție de un sistem de referință; sînt necesare respectiv 1, 2 sau 3 coordonate. Termenul a fost introdus de G. Leibniz (1692). *(V.B.)*

coordonate carteziene, coordonate raportate la un sistem de referință format din două drepte concurente în plan, sau trei drepte concurente în spațiu, numite axe. Dacă axele sînt perpendiculare cîte două, atunci sistemul de coordonate se numește rectangular (ortogonal). Coordonatele

unui punct M într-un sistem rectangular cu originea O măsoară proiecțiile segmentului OM pe axe. Frecvent se folosește sistemul de axe de coordonate drept (dextrotors) la care axele sînt astfel așezate încît rotind direct (antiorar) semiaxa pozitivă Ox spre Oy se înaintează în sensul pozitiv al semiaxei Oz (după concepția lui A.M. Ampère); acest sistem de referință s-a impus odată cu dezvoltarea electrodinamicii și a teoriei cîmpurilor, fiind adecvat acestora potrivit legii lui J.C. Maxwell. Epitetul „carteziene" a fost format de la numele latinizat al lui R. Descartes, cel care a introdus (1637) aceste coordonate la studiul curbelor plane; considerarea coordonatelor carteziene în spațiu se datorează lui F. Lahire (1679). *(V.B.)*

coordonate curbilinii (ale unui punct în spațiul tridimensional), numerele q_1, q_2, q_3 care determină poziția unui punct în spațiul considerat, fiind valorile corespunzătoare ale parametrilor celor trei suprafețe (numite suprafețe de coordonate) ce trec prin punctul respectiv. Cele trei curbe după care se intersectează, două cîte două, aceste suprafețe se numesc curbe de coordonate, pe fiecare dintre ele variind numai o coordonată, celelalte păstrînd o valoare constantă. Deosebirea fundamentală dintre coordonatele rectangulare carteziene (la care curbele de coordonate sînt drepte paralele cu axele de coordonate) și coordonatele curbilinii constă în aceea că la acestea direcțiile vectorilor $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$ (ce formează baza locală) — orientați respectiv pe tangentele la curbele de coordonate în sensul creșterii coordonatelor q_1, q_2, q_3 — depind de punct. Cel mai des utilizate sînt coordonatele curbilinii ortogonale, ale căror curbe de coordonate sînt ortogonale, în orice punct, două cîte două. Ex.: — *Coordonatele sferice*: $q_1 = r$, modulul razei vectoare OM (O fiind originea reperului rectangular $Oxyz$), $q_2 = \varphi$, latitudinea (unghiul dintre raza vectoare și axa Oz) și $q_3 = \theta$, longitudinea (unghiul dintre planele MOz și xOy). La coordonatele sferice suprafețele de coordonate sînt: $r =$ const — sfere cu centrul în O, $\varphi =$ const — conuri de rotație cu axa Oz, $\theta =$ const — semiplane mărginite de Oz, iar curbele de coordonate sînt: curbele r — raze, curbele φ — meridiane și curbele θ — paralele ale sferei. Trecerea de la coordonatele sferice la cele carteziene se face prin relațiile:

$$x = r \sin\varphi \cos\varphi,\quad y = r \cos\varphi \sin\theta,\quad z = r \sin\varphi,$$

Coordonatele sferice se mai numesc coordonate polare în spațiu. Coordonatele curbilinii se definesc pe o suprafață (q_1 și q_2) precum și în spațiul tri- și n-dimensional (q_i, $i = 1,2,3, \ldots, n$). Sînt folosite frecvent în geometria diferențială a suprafețelor, în mecanică etc. *(V.B.)*

coordonate polare, în plan, coordonate raportate la o axă x și un pol O, situat pe x; sînt distanța $r = OM$ și $\theta =$ unghiul xOM; sînt legate de coordonatele carteziene rectangulare prin relațiile:

$$x = r \cos\theta,\ y = r \sin\theta.$$

În spațiu, coordonatele polare sînt $r = OM$, $\theta =$ unghiul dintre Ox și proiecția dreptei OM în planul xOy, $\varphi =$ unghiul zOM. Noțiunea este foarte veche, longitudinea și latitudinea, în geografie, sau ascensia dreaptă și declinația, în astronomie, fiind coordonate pe sferă. Prin crearea geometriei analitice, coordonatele au căpătat o deosebită importanță în geometrie. *(N.M., V.B.)*

coordonate generalizate (q_j), parametrii independenți care determină configurațiile sistemului de puncte materiale considerat. *(Șt. G.)*

coordonate omogene 1. (În plan). Sistemul ordonat de numere (x_1,

$x_2, x_3)$, astfel încît $x = \frac{x_1}{x_3}$, $y = \frac{x_2}{x_3}$, unde x, y sînt coordonatele carteziene ale unui punct. **2.** (În spațiu). Sistemul ordonat de numere (x_1, x_2, x_3, x_4), astfel încît: $x = \frac{x_1}{x_4}$, $y = \frac{x_2}{x_4}$, $z = \frac{x_3}{x_4}$, unde x, y, z sînt coordonatele carteziene ale unui punct. În coordonate omogene ecuația unei curbe algebrice, $f(x, y) = 0$, devine o relație omogenă $f(x_1, x_2, x_3) = 0$. Coordonatele omogene permit calculul cu elemente de la infinit. Au fost introduse de J. Plücker (1830) și aplicate în spațiu de O. Hesse (1844). *(V.B.)*

coplanaritate [lat. *co* „cu, împreună"; *plan*], calitatea a două sau a mai multor figuri geometrice de a fi conținute în același plan. Condiția ca patru puncte $M_1(x_1, y_1, z_1)$, $M_2(x_2, y_2, z_2)$, $M_3(x_3, y_3, z_3)$, $M_4(x_4, y_4, z_4)$ să fie coplanare este:

$$\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Condiția de coplanaritate a n puncte $M_n(x_n, y_n, z_n)$ este ca rangul matricii:

$$\begin{Vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ x_n & y_n & z_n & 1 \end{Vmatrix}$$

să fie egal cu 3. *(V.B.)*

corelație, transformare biunivocă prin care unui punct îi corespunde un plan și reciproc, deci unei drepte o dreaptă. Punctelor situate într-un plan le corespund plane concurente, iar punctelor colineare le corespund plane care trec printr-o dreaptă. Rapoartele anarmonice ale punctelor și planelor transformate sînt egale. În plan, corelația face să corespundă biunivoc unui punct o dreaptă și reciproc. Sub formă analitică, între coordonatele omogene ale punctelor și planelor (dreptelor în cazul plan) avem relații lineare și omogene. *(N.M.)*

corelație (a două variabile aleatoare; cov (X, Y)), valoarea medie a produsului abaterilor față de valorile medii ale celor două variabile aleatoare:

$$\text{cov}\,(X, Y) = M[(X - M(X))\ (Y - M(Y))].$$

Această mărime pune în evidență relația de dependență existentă între cele două variabile aleatoare. Dacă X și Y sînt independente, atunci cov $(X, Y) = 0$; reciproca nefiind adevărată. Se mai numește *covarianță* (ceea ce justifică notația adoptată). — *Corelație de selecție* (pentru două selecții de același volum n: $x_1, x_2, \ldots, x_n$, respectiv $y_1, y_2, \ldots, y_n$ extrase din două populații statistice diferite), numărul dat de expresia:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})\ (y_i - \bar{y})}{n},$$

unde $\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$ și $\bar{y} = \frac{\sum_{i=1}^{n} y_i}{n}$ reprezintă mediile celor două selecții. Datorită caracterului aleator al selecției statistice, corelația de selecție, ca toate caracteristicile de selecție,

poate fi privită ca o variabilă aleatoare. — *Coeficient de corelație* (a două variabile aleatoare), raportul dintre corelația celor două variabile aleatoare și produsul abaterilor lor standard:

$$(X, Y) = \frac{\operatorname{cov}(X, Y)}{\sqrt{D^2(X)\ D^2(Y)}}.$$

Valorile coeficientului de corelație sînt cuprinse între -1 și $+1$. — *Coeficient de corelație de selecție*, expresia:

$$\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 \cdot \sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2}},$$

unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$, și $y_1, y_2, \ldots, y_n$ sînt două selecții de volum n asupra a două populații statistice. *(A.Ș.)*

corespondență [lat. *co* „cu", *respondere* „a se potrivi"], relația dintre două mulțimi M și N, conform căreia fiecare element al mulțimii M este pus în legătură cu unul sau cu mai multe elemente din mulțimea N (numit imaginea sau imaginile acelui element). Funcțiile sînt cazuri particulare de corespondențe (dacă imaginea oricărui element din M este unică; în acest caz corespondența se numește *univocă*). O corespondență este o funcție definită pe M cu valori în mulțimea părților lui N. — *Corespondența biunivocă*, funcție bijectivă. Noțiunea a fost introdusă de A. Möbius. *(V.B., A.B.)*

coroană circulară, domeniu plan cuprins între două cercuri concentrice coplanare și cu razele diferite, $R \neq r$ (fig. 39). Aria coroanei circulare este:

$$A = \pi(R^2 - r^2).\ (V.B.)$$

corolar [lat. *corollarium* „adaus, surplus"], propoziție, eventual de extensiune mai mică, care decurge dintr-o altă propoziție demonstrată anterior. Ex.: din teorema „patrulaterul cu două unghiuri opuse suplimentare este inscriptibil" se obține corolarul: „pătratul, dreptunghiul și trapezul isoscel sînt inscriptibile". *(V.B.)*

corp [lat. *corpus* „corp, ansamblu"], inel K avînd cel puțin două elemente, astfel încît $K - \{0\}$ este un grup față de înmulțire (unde 0 este element neutru la adunare). — *Corp comutativ*, corp în care înmulțirea este comutativă. Ex.: mulțimea numerelor raționale, mulțimea numerelor reale, mulțimea numerelor complexe sînt corpuri comutative; corpul cuaternionilor este singurul corp necomutativ de dimensiune finită (ca spațiu liniar pe corpul numerelor reale), fapt demonstrat de G. Frobenius (1878). Corpurile finite au fost considerate inițial de E. Galois (1830). Studiul corpurilor numerice a fost făcut de P. L. Dirichlet (1841), E. Kummer (1844) și J. Dedekind (1888); acestuia din urmă i se datorează și denumirea. *(V.B.)*

corp borelian → **clan**

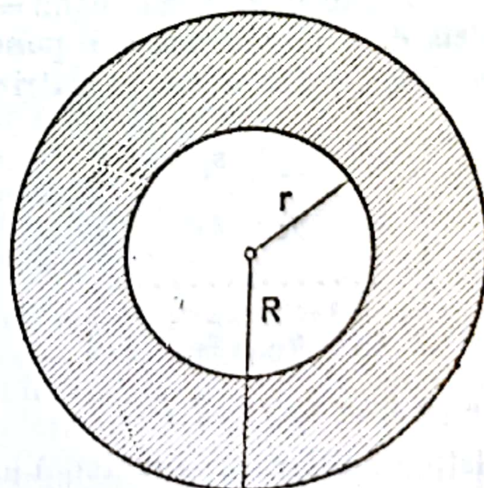


Fig. 39

corp deformabil, corp care își modifică forma, volumul și distribuția densității sub acțiunea unor forțe exterioare. Toate corpurile sînt deformabile, dar există o clasă de corpuri, considerate, într-o bună aproximație, *corpuri rigide*, pentru care aceste modificări sînt neglijabile. La un corp rigid, distanța dintre două puncte oarecare este invariabilă în decursul mișcării acestuia. *(Șt.G.)*

corp plastic → elasticitate

cosecantă [lat. *complementum* „complementar", *secans-tis* „secantă"] (cosec). **1.** (Pentru un unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic). Raportul dintre ipotenuză și cateta opusă unghiului. **2.** (Pentru un unghi orientat, cu vîrful în originea unui reper cartezian, avînd latura inițială pe semiaxa pozitivă a absciselor). Raportul dintre raza vectoare a unui punct de pe latura finală a unghiului și lungimea proiecției acesteia pe axa ordonatelor. **3.** (Pentru un argument numeric). Funcție care atașează unui argument x valoarea cosecantei unghiului orientat de x radiani. Funcția cosec x este definită pe $\mathbf{R} - \{k\pi\}$, $(k \in Z)$, cu valori în $(-\infty, -1] \cup [1, +\infty)$; este o funcție periodică de perioadă 2π: $\text{cosec}\,(x + 2\pi) = \text{cosec}\,x$; este o funcție impară: $\text{cosec}\,(-x) = -\text{cosec}\,x$. De asemenea, $\text{cosec}\,x = \frac{1}{\sin x}$. Denumirea a fost propusă de G. J. Rhaeticus (1596), iar simbolul „cosec" se datorează lui L. Euler (1748). *(V.B.)*

cosinus [lat. *complementum* „complementarul", *sinus*] (cos). **1.** (Pentru un unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic). Raportul dintre cateta alăturată unghiului și ipotenuză. **2.** (Pentru un unghi orientat, cu vîrful în originea unui reper cartezian, avînd latura inițială pe semiaxa pozitivă a absciselor). Raportul dintre lungimea proiecției pe axa absciselor a razei vectoare a unui punct de pe latura finală și raza vectoare. **3.** (Pentru un argument numeric). Funcție care atașează unui argument x valoarea cosinusului unghiului orientat de x radiani. Funcția $\cos x$ este definită pe $\mathbf{R}$ cu valori în $[-1, +1]$; este o funcție periodică de perioadă 2π: $\cos\,(x + 2\pi) = \cos x$; este o funcție pară: $\cos\,(-x) = \cos x$. Legătura dintre funcția cosinus și funcțiile exponențiale este dată de formula:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2} \quad \text{(L. Euler, 1743).}$$

Noțiunea este cunoscută din antichitate; primele propoziții despre cosinus apar la Ptolemeu (sec. 2). Ca funcție a unghiului, cosinusul apare în evul mediu, în lucrările matematicienilor de limbă arabă. Denumirea a fost propusă de E. Gunter (1620), iar notația prescurtată „cos" (propusă întîia oară de N. Stephenson, 1674) este statornicită de L. Euler (1729). *(V.B.)*

cosinus hiperbolic → funcții hiperbolice

cosinusuri directoare (ale unei direcții; $\cos\alpha$, $\cos\beta$, $\cos\gamma$), cosinusurile unghiurilor α, β, γ pe care un vector OM din spațiu le face cu axele Ox, Oy, Oz ale unui sistem de referință cartezian (fig. 40). Cosinusurile direc-

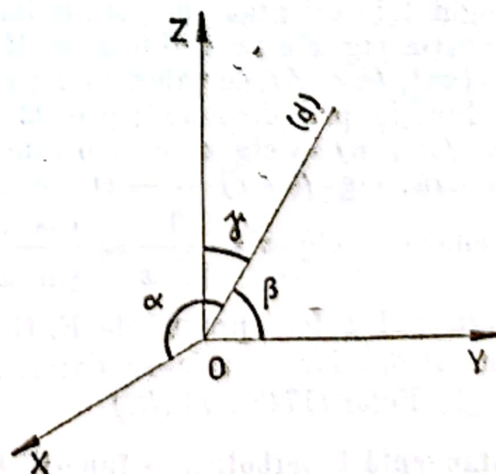


Fig. 40

toare sînt legate prin relația $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$. În funcție de parametrii directori, l, m, n, cosinusurile directoare se determină prin formulele:

$$\cos\alpha = \frac{l}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\beta = \frac{m}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}},$$

$$\cos\gamma = \frac{n}{\pm\sqrt{l^2+m^2+n^2}}.$$

Faptul că aceste mărimi determină direcția justifică denumirea lor. Cosinusurile directoare apar în lucrările lui G. Monge. *(V.B.)*

cotangentă [lat. *complementum* „complementar", *tangentă*] (ctg) **1.** (Pentru un unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic). Raportul dintre cateta alăturată unghiului și cateta opusă. **2.** (Pentru un unghi orientat, cu vîrful în originea unui reper cartezian, avînd latura inițială pe semiaxa pozitivă a absciselor). Raportul dintre lungimile proiecțiilor pe axa absciselor și pe axa ordonatelor a razei vectoare a unui punct de pe latura finală a unghiului. **3.** (Pentru un argument numeric). Funcție care atașează unui argument x valoarea cotangentei unghiului orientat de x radiani. Funcția ctg x este definită pe $\mathbf{R} - \{k\pi\}$, $(k \in Z)$, cu valori în $\mathbf{R}$; este o funcție periodică de perioadă π: $\operatorname{ctg}(x+\pi) = \operatorname{ctg} x$; este o funcție impară: $\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$. De asemenea, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x} = \frac{\cos x}{\sin x}$.

Termenul a fost propus de E. Gunter (1620), iar notația se datorează lui L. Euler (1748). *(V.B.)*

cotangentă hiperbolică → **funcții hiperbolice**

cotă [fr. *côte*], a treia coordonată carteziană a unui punct în spațiu, dată de lungimea segmentului dus din acel punct, paralel cu axa Oz, pînă la planul xOy, considerată pozitivă sau negativă, după cum punctul este situat deasupra sau dedesubtul acestui plan. Noțiunea a fost introdusă de F. Lahire (1679), iar notația prin litera z se datorează lui Jean Bernoulli (1715). *(V.B.)*

covarianță → **corelație**

Cramer, Gabriel (1704—1752), matematician elvețian. Profesor de matematică și filozofie la Geneva. Membru al Academiei de Științe din Berlin și în Royal Society din Londra. A elaborat unul din primele tratate de geometrie analitică, în care a dat și regula ce îi poartă numele, privitoare la rezolvarea unui sistem de n ecuații algebrice liniare cu n necunoscute. Op. pr.: *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, 4 volume, 1750. *(V.B.)*

criterii de convergență [gr. *kriteryon* „mijloc de recunoaștere"] (pentru serii cu termeni pozitivi): a) *Criteriul comparației*: fiind date seriile $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$, cu $a_n \leqslant b_n$, $n = 1,2,3,\ldots$, dacă $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este convergentă atunci și $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă, iar dacă $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este divergentă atunci și $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ este divergentă. b) *Criteriul lui Cauchy*: seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă sau diver-

gentă după cum $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ sau $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1$. c) *Criteriul lui d'Alembert*: seria $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ este convergentă sau divergentă după cum $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} <$ < 1 sau $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} > 1$. Se mai numește *criteriul raportului*. *(V.B.)*

criterii de divizibilitate **1.** (Pentru divizibilitatea cu 2). Un număr natural este divizibil cu 2 dacă ultima sa cifră este divizibilă cu 2 sau egală cu 0. **2.** (Pentru divizibilitatea cu 5). Un număr natural este divizibil cu 5 dacă ultima sa cifră este 0 sau 5. **3.** (Pentru divizibilitatea cu 3 sau 9). Un număr este divizibil cu 3 (respectiv cu 9) dacă suma cifrelor lui este divizibilă cu 3 (respectiv cu 9). *(V.B.)*

cuadratrice [lat. *quadrare* „a face pătrat, a calcula"], curbă folosită pentru cuadratura cercului sau a altei figuri. — *Cuadratricea lui Dinostrate*, curbă generată mecanic de intersecția unei drepte, ce se rotește uniform în jurul unui punct, cu o dreaptă care se translatează uniform, vitezele corespunzătoare fiind proporționale. Ecuația în coordonate polare a acestei curbe este:

$$r = \frac{2a\theta}{\pi \sin \theta}.$$

A fost descoperită de Hippias (sec. 5 î.e.n.), care a folosit-o pentru trisecțiunea unghiului, iar Dinostrate (sec. 4 î.e.n.) a folosit-o primul pentru cuadratura cercului. *(V.B.)*

cuadratură [lat. *quatratura*], calculul unei integrale definite sau nedefinite, necesar uneori pentru aflarea ariei unui domeniu plan mărginit de o curbă. Denumirea provine din faptul că, în antichitate, pentru calculul ariei unei figuri plane se făcea cuadratura sa. *(V.B.)*

cuadratura unei figuri, construirea cu rigla și compasul a unui pătrat echivalent cu figura dată. — *Cuadratura cercului*, problemă celebră pusă în antichitate (papirusul lui Ahmes, c. 2000 î.e.n.) privind construcția laturii unui pătrat a cărui arie să fie egală cu a unui cerc dat. Problema se reduce la construcția unui segment de lungime $\sqrt{\pi}$, iar imposibilitatea rezolvării ei a fost dovedită odată cu demonstrarea faptului că π este un număr irațional (J. Lambert, 1766) și transcendent (F. Lindemann, 1882). Desene aproximative au fost realizate cu ajutorul unor curbe: → *cuadratrice*. *(V.B.)*

cuadrică [lat. *quadrus* „pătratic"], suprafață de gradul doi. Ecuația ei este de forma:

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0.$$

Cu ajutorul unei deplasări a axelor de coordonate ecuația cuadricei poate fi adusă la forma:

$$s_1x^2 + s_2y^2 + s_3z^2 + \frac{\Delta}{\delta} = 0, \ (\delta \neq 0)$$

unde:

$$\delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \ \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{12} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} & a_{34} \\ a_{14} & a_{24} & a_{34} & a_{44} \end{vmatrix}$$

iar s_1, s_2, s_3 sînt rădăcinile ecuației în s:

$$\begin{vmatrix} a_{11} - s & a_{12} & a_{13} \\ a_{12} & a_{22} - s & a_{23} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} - s \end{vmatrix} = 0.$$

În cazul $\delta = 0$ cuadrica este un paraboloid, iar în cazul $\delta \neq 0$ şi $\Delta = 0$ cuadrica degenerează într-un con. Cuadricele sînt: elipsoidul, hiperboloidul cu o pînză, hiperboloidul cu două pînze, paraleloidul eliptic şi paraboloidul hiperbolic. Cuadricele de rotaţie au fost studiate de Arhimede (sec. 3 î.e.n.). Clasificarea cuadricelor şi ecuaţia redusă i se datorează lui L. Euler (1748). *(V.B.)*

cuantilă → **q-cuantile**

cuartică [lat. *quartus* „al patrulea"], curbă algebrică de gradul patru. Ex.: concoida lui Nicomede, melcul lui Pascal, lemniscata lui Bernoulli. *(V.B.)*

cuaternion [lat. *quaterni* „cîte patru", gr. *ion*, participiu de la *ienoi* „a ţine"], element de forma $q = a + bi + cj + dk$, unde a, b, c, d sînt numere reale, iar i, j, k sînt unităţile de bază care satisfac relaţiile: $i^2 = j^2 = k^2 = -1$, $i \cdot j = -j \cdot i = k$, $j \cdot k = -k \cdot j = i$, $k \cdot i = -i \cdot k = j$. Mulţimea cuaternionilor formează un corp necomutativ. Cuaternionii, generalizare a numerelor complexe, au fost introduşi de W. Hamilton *(Lectures on Quaternions*, 1843). *(V.B.)*

cub [lat. *cubus*], exaedru regulat. Cubul are şase feţe pătrate, 8 vîrfuri şi 12 muchii, 4 diagonale egale, concurente în centrul lui de simetrie (fig. 41). Notînd cu l lungimea muchiei, aria şi volumul cubului sînt date de formulele: $A = 6l^2$, $V = l^3$ (cunoscute cu circa 2 000 de ani î.e.n., de egipteni). Relaţiile dintre muchia l şi razele r, R ale sferelor înscrisă şi circumscrisă cubului sînt:

$$l = 2r = \frac{2R}{\sqrt{3}}.$$

Cubul este una dintre formele în care cristalizează anumite substanţe ca: sarea gemă, cuprul, pirita. Denumirea a fost dată de pitagoreici (sec. 5 î. e. n.). *(V.B.)*

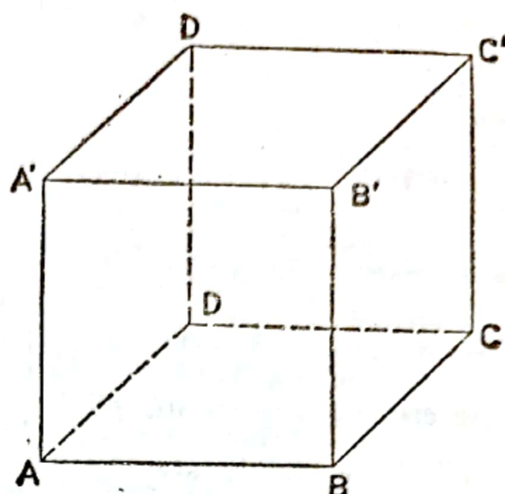


Fig. 41

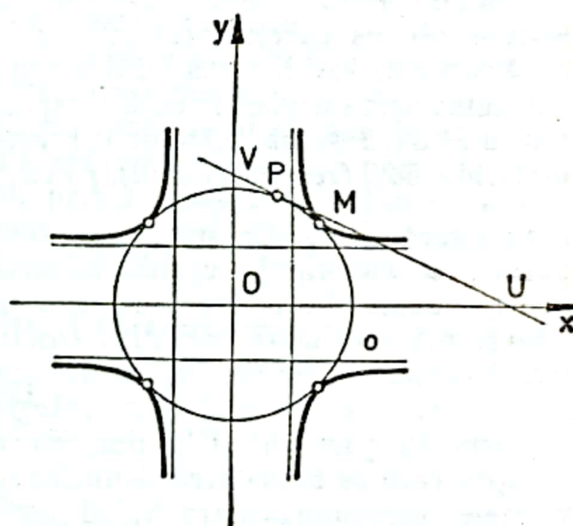


Fig. 42

cubică [fr. *cubique*], curbă de gradul al treilea. Cubicele pot să aibă unele elemente remarcabile, noi faţă de conice, de exemplu puncte duble, puncte de întoarcere, puncte de inflexiune. I. Newton a clasificat cubicele prin umbrele lor (din punct de vedere proiectiv), iar J. Plücker, din punct de vedere afin. Ex.: cisoida lui Diocles, foliul lui Descartes, strofoida. *(V.B., N.M.)*

cuplu, sistemul format din două forţe care au suporturi paralele, sensuri opuse şi intensităţi egale. Rezultanta

generală a unui cuplu este egală cu zero, iar momentul rezultant, **M**, al cuplului este acelaşi în orice punct din spaţiu. **M** este normal la planul definit de suporturile forţelor şi are modulul Fl, unde F este intensitatea comună a forţelor iar l distanţa între suporturile lor. *(Şt.G.)*

curba cruce, loc geometric al mijlocului, M, al segmentului UV, unde U şi V sînt punctele în care o tangentă mobilă la un cerc intersectează doi diametri perpendiculari ai acestuia (fig. 42). Este o cuartică de ecuaţie $x^2y^2 = a^2(x^2 + y^2)$, unde $2a$ este raza cercului. Admite asimptotele orizontale $y = \pm a$ şi asimptotele verticale $x = \pm a$. Originea este un punct dublu izolat al curbei. A fost considerată iniţial de O. Terquem (1847). *(N.M.)*

curba lui Viviani, curbă obţinută prin intersecţia unei semisfere:

$$x^2 + y^2 + z^2 - a^2 = 0, \quad z \geqq 0$$

cu un cilindru de rotaţie:

$$x^2 + y^2 - ax = 0,$$

tangent sferei şi care trece prin centrul ei (fig. 43). Ecuaţiile parametrice ale curbei sînt:

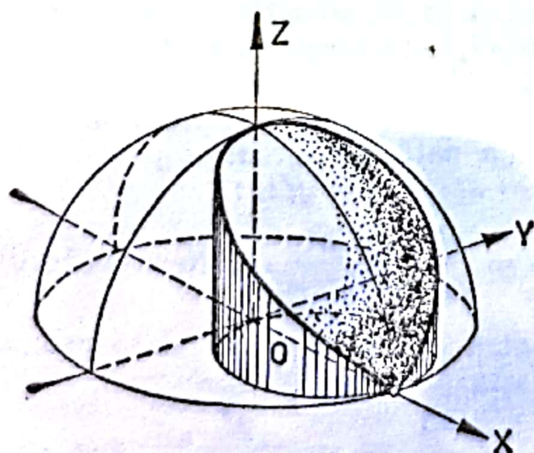


Fig. 43

$$x = a \sin t$$
$$y = a \sin t \cos t$$
$$z = a \cos t.$$

Această curbă rezolvă o problemă pusă de V. Viviani (în 1692), care constă în a construi patru ferestre egale într-o cupolă semisferică astfel ca aria suprafeţei rămase să poată fi exprimată prin numere raţionale. Numeroase soluţii ale acestei probleme au fost date, prin utilizarea calculului infinitezimal, de G. Leibniz, Jacques Bernoulli, G. L'Hôspital, J. Wallis ş.a. *(V.B.)*

curbă [lat. *curvus* „îndoit, curbat"], figură geometrică generată prin mişcarea unui punct M, a cărei poziţie depinde de un singur parametru. Într-un sistem de referinţă cartezian ecuaţiile: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, unde t este un parametru real, dau coordonatele punctului M de pe curbă şi se numesc ecuaţiile parametrice ale curbei (G. Cramer, 1750). O curbă este intersecţia a două suprafeţe şi deci ecuaţiile ei pot fi scrise şi sub forma:

$$f(x, y, z) = 0 \qquad g(x, y, z) = 0.$$

Se mai numeşte *linie*. *(V.B.)*

curbă algebrică, curbă plană, a cărei ecuaţie carteziană poate fi adusă la forma: $P(x, y) = 0$, unde $P(x, y)$ este un polinom de gradul n în x şi y. Denumirea a fost propusă de G. Leibniz (1682). *(V.B.)*

curbă asimptotă, curbă C' asociată unei curbe date, C, cu puncte în domeniul de la infinit, astfel încît, atunci cînd un punct se deplasează pe curba C către domeniul de la infinit, distanţa sa la curba C' tinde către zero. Ex.: pentru curba de ecuaţie $y = f(x)$, parabola $y = ax^2 + bx + c$ este curbă asimptotă dacă limitele: $a = \lim\limits_{x \to \infty} \dfrac{f(x)}{x^2}$, $b =$

$= \lim_{x\to\infty}\left[\frac{f(x)}{x} - ax\right]$, $c = \lim_{x\to\infty}[f(x) - ax^2 - bx]$ există şi sînt finite. *(V.B.)*

curbă plană, curbă ale cărei puncte se găsesc toate într-un acelaşi plan. Ecuaţia unei curbe poate fi de forma: $y = y(x)$ (ecuaţia explicită, considerată iniţial de L. Euler, 1748), $r = r(\theta)$ (ecuaţia în coordonate polare, întîlnită prima dată la G. Krafft, 1733), $x = x(t)$, $y = y(t)$ (ecuaţiile parametrice, datorate lui G. Cramer, 1750), $\varrho = \varrho(s)$ (ecuaţia intrinsecă, care dă valoarea razei de curbură în funcţie de arcul s, introdusă de K. Krause, 1835, şi A. Peters, 1838). *(V.B.)*

curbă raţională → **curbă unicursală**

curbă strîmbă, curbă care nu este plană. Ex.: elicea. *(V.B.)*

curbă transcendentă, curbă plană care nu este algebrică. Ex.: sinusoida $y = \sin x$, exponenţialele $y = e^x$. Denumirea a fost propusă de G. Leibniz (1682). *(V.B.)*

curbă Ţiţeica, curbă strîmbă pentru care raportul dintre torsiunea într-un punct oarecare al ei şi pătratul distanţei de la un punct fix din spaţiu la planul osculator al curbei în punctul considerat, este constant:

$$\frac{\tau}{d^2} = a$$

(aici s-a luat drept origine a coordonatelor punctul fix). Curbele Ţiţeica sînt invariante într-o transformare centroafină. Descoperirea acestor curbe aparţine lui Gh. Ţiţeica (1911), iar denumirea se datorează lui G. Loria. *(V.B.)*

curbă unicursală [lat. *unicus* „unic", *cursare* „a alerga"], curbă algebrică plană trasată printr-o ramură continuă; coordonatele unui punct de pe curbă sînt de forma:

$$x = \frac{P_1(t)}{P_3(t)}, \quad y = \frac{P_2(t)}{P_3(t)},$$

unde $P_1(t)$, $P_2(t)$, $P_3(t)$ sînt polinoame. Ex.: cercul, foliul lui Descartes. Curbele unicursale au numărul maxim de puncte duble. Se mai numeşte *curbă raţională*. *(V.B.)*

curbele lui Lamé, curbe plane reprezentate, faţă de un reper cartezian, prin ecuaţia:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^n + \left(\frac{y}{b}\right)^n - 1 = 0.$$

Pentru anumite valori ale lui n se obţin: drepte (care nu trec prin origine, pentru $n = 1$), elipsa (pentru $n = 2$), astroida $\left(\text{pentru } a = b;\ n = \frac{2}{3}\right)$. *(V.B.)*

curbura unei curbe [lat. *curvatura* „îndoitură"] $\left(\text{într-un punct } M;\ \frac{1}{\varrho}\right)$, limita raportului dintre unghiul $\Delta\alpha$, format de tangentele la curbă în două puncte M şi M', şi lungimea Δs, a arcului MM', cînd punctul M' tinde către M:

$$\frac{1}{\varrho} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\alpha}{\Delta s} \text{ (fig. 44).}$$

Inversul curburii (ϱ) se numeşte *rază de curbură*. Cercul de rază ϱ, tangent curbei în M, situat spre concavitatea curbei, este cercul de curbură. Pentru calculul curburii într-un punct se folosesc formulele: pentru o curbă plană dată prin ecuaţii parametrice $x = x(t)$, $y = y(t)$:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{x'y'' - x''y'}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \text{ (I. Newton, 1670);}$$

pentru o curbă plană dată prin ecuaţia $y = y(x)$:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{y''}{(1 + y'^2)^{3/2}};$$

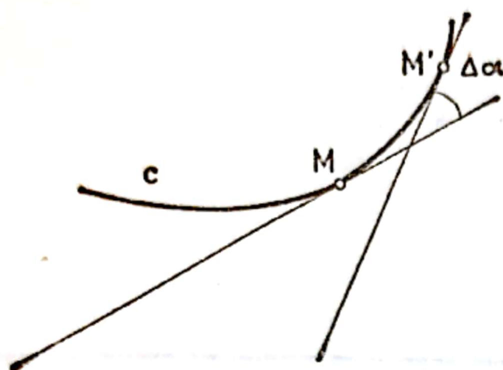


Fig. 44

pentru o curbă plană dată prin ecuația în coordonate polare $r = r(\theta)$:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{r^2 + 2r'^2 - rr''}{(r^2 + r'^2)^{3/2}};$$

pentru o curbă strîmbă dată prin ecuațiile parametrice: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$:

$$\frac{1}{\varrho} = \frac{[(y'z'' - z'y'')^2 + (z'x'' - x'z'')^2 + (x'y'' - y'x'')^2]^{\frac{1}{2}}}{(x'^2 + y'^2 + z'^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Primul exemplu de curbă cu dublă curbură l-a dat Arhytas (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

curbura unei suprafețe, noțiune prin care se indică variația unei suprafețe în raport cu planele tangente. Dacă se duce prin origine vectorul OM', egal cu versorul normalei într-un punct M al suprafeței s, M' este imaginea sferică a punctului M; dacă se consideră o curbă închisă c pe suprafața s în jurul punctului M, imaginile sferice descriu o curbă închisă c', în jurul lui M' pe sfera de rază unitate cu centrul în originea O. Curbele c și c' limitează respectiv pe suprafață și pe sferă niște arii σ, σ'. Limita raportului σ'/σ, cînd c tinde către M, este curbura totală a suprafeței în punctul M. Curbura este egală cu cîtul discriminanților celor două forme fundamentale ale suprafeței; ea este egală cu inversul produsului razelor principale de curbură și este element intrinsec, adică depinde numai de prima formă fundamentală. Noțiunea de curbură totală, ideea de a măsura astfel curbura unei suprafețe și proprietățile menționate se datorează lui K. Gauss (1828). *(N.M.)*

cuvînt calculator, unitatea de informație transferată între memorie și unitatea de prelucrare. În funcție de construcția calculatorului, poate fi de lungime fixă sau variabilă. — *Cuvînt-dată*, cuvînt calculator ce conține informația de prelucrat sau de livrat. — *Cuvînt-instrucțiune*, cuvînt calculator ce conține informația în legătură cu modul în care calculatorul trebuie să opereze. *(T.B.)*

D

D'Alembert [dalãbe:r], **Jean le Rond** (1717—1783), matematician, fizician, filozof şi literat francez. Membru al Academiei de Ştiinţe şi al Academiei Franceze. A contribuit la alcătuirea Marii Enciclopedii Franceze pentru care a redactat celebrul *Discours préliminaire* şi articole de matematică, literatură, filozofie, pictură, muzică. În matematică, contribuţiile sale se referă la algebră (teorema fundamentală), analiză matematică (criteriul de convergenţă a seriilor cu termeni pozitivi, teoria ecuaţiilor diferenţiale şi a sistemelor de ecuaţii diferenţiale). În dinamică, a descoperit principiul care-i poartă numele. Op. pr.: *Traité de dynamique*, 1758; *Opuscules mathématiques*, 1761—1780; *Encyclopédie ou Dictionnaire raisonné des sciences, des artes et des métiers* (publicată împreună cu D. Diderot, în 35 volume, 1851—1880). *(V.B.)*

Darboux [darbu], **Gaston Jean** (1842—1917), geometru francez. Profesor de geometrie superioară la Sorbona. Membru al Academiei de Ştiinţe din Paris şi secretar permanent al acesteia, precum şi membru al Academiei din Petersburg. A studiat curbele şi suprafeţele algebrice, teoria reţelelor pentru spaţiul cu trei dimensiuni, problema lui Pfaff, soluţiile singulare ale ecuaţiilor cu derivate parţiale. Contribuţii la studiul funcţiilor reale (teorema lui Darboux). Op. pr.: *Leçons sur la théorie générale des surfaces et les applications géométriques de calcul infinitésimal*, 4 vol., 1887—1896; *Leçon sur les systems orthogonaux et les coordonées curvilignes*, 1898—1910. *(V.B.)*

decagon [gr. *deka* „zece“, *gonia* „unghi“], poligon cu zece laturi (fig. 45). — *Decagon stelat*, decagon concav, obţinut prin unirea vîrfurilor decagonului din trei în trei (fig. 46). Calculul lungimii laturilor decagonului regulat şi a celui stelat regulat, în funcţie de raza cercului circumscris, se face după formulele:

$$l_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1),$$

$$l'_{10} = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1).$$

Construcţia decagonului regulat se bazează pe metoda construirii a două segmente (latura decagonului regulat şi a celui stelat), cunoscînd diferenţa lor şi media lor geometrică (egale cu R). Construcţia decagonului regulat era cunoscută de pitagoreici (sec. 6—4 î.e.n.). *(V.B.)*

deîmpărţit → **împărţire**

deînmulţit → **înmulţire**

demonstraţie [lat. *demonstratio* „dovedire“], procedeu logic pentru stabilirea deductivă a adevărului unui enunţ. Primul matematician care a enunţat o teoremă însoţită de demonstraţie a fost Tales (sec. 6 î.e.n.). *(V.B.)*

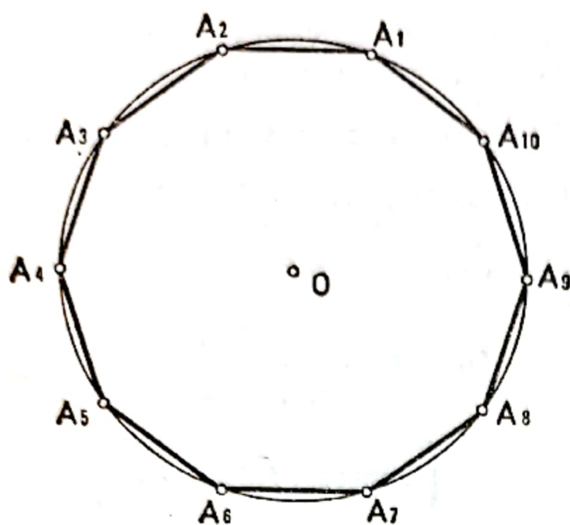


Fig. 45

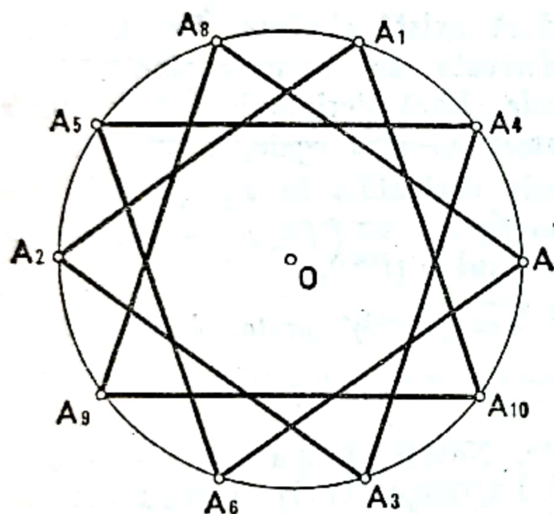


Fig. 46

densitate → **masă**

dependență liniară [lat. *dependere* „a fi legat de"], proprietate a unor eelmente $f_1, f_2, ..., f_n$, dintr-un modul M, peste un inel A, de a exista elementele $a_1, a_2, ..., a_n \in A$, nu toate nule, astfel încît:

$$a_1f_1 + a_2f_2 + ... + a_nf_n = 0.$$

Elementele $f_1, f_2, ..., f_n$ se numesc liniar dependente. *(V.B., A.B.)*

deplasare 1. (În plan). Transformare punctuală care este produsul unei translații cu o rotație. Ecuațiile unei deplasări plane sînt:

$$x' = x \cos \theta - y \sin \theta + a$$
$$y' = x \sin \theta + y \cos \theta + b.$$

Mulțimea deplasărilor plane formează un grup cu trei parametri. Distanța și unghiul sînt invarianți ai grupului deplasărilor. **2.** (În spațiu). Transformare afină care păstrează distanța. Ecuațiile unei deplasări, cu punctul dublu în origine, sînt de forma:

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z$$
$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z$$
$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z,$$

unde coeficienții $a_{ij}(i, j = 1, 2, 3)$ satisfac relațiile:

$$a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2 = 1$$
$$a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2 = 1$$
$$a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2 = 1$$
$$a_{11}a_{12} + a_{21}a_{22} + a_{31}a_{32} = 0$$
$$a_{11}a_{13} + a_{21}a_{23} + a_{31}a_{33} = 0$$
$$a_{12}a_{13} + a_{22}a_{23} + a_{32}a_{33} = 0$$

(adică determinantul $|a_{ij}|_{i,\ j=1,2,3}$ este ortogonal). Mulțimea deplasărilor în spațiu formează un grup cu 6 parametri. *(V.B.)*

deplasări reale elementare (dr_i), deplasările infinitezimale ale punctelor unui sistem de puncte materiale, sub acțiunea forțelor date și a legăturilor, într-un interval de timp foarte scurt. *(Șt.G.)*

deplasări virtuale elementare (δr_j), deplasările infinitezimale ale punctelor unui sistem *(S)* de puncte materiale, făcîndu-se abstracție de forțele date și de legături. — *Deplasări virtuale elementare compatibile cu legăturile*, deplasări virtuale elementare obținute respectînd legăturile. *(Șt.G.)*

derivată (a unei funcţii reale de variabilă reală $f: E \to \mathbb{R}$, într-un punct x_0, $x_0 \in E$; $f'(x_0)$), limita:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0},$$

dacă există şi este finită sau infinită. Dacă limita este finită, funcţia se numeşte derivabilă în x_0. Limita raportului dintre creşterea funcţiei $f(x) - f(x_0)$ şi creşterea argumentului $x - x_0$, cînd $x \to x_0$, a fost considerată de I. Newton (1665), în legătură cu problema definirii vitezei, într-un moment dat, a unui mobil ce se mişcă neuniform şi rectiliniu în acelaşi sens, şi de către G. Leibniz (1673), în legătură cu problema determinării coeficientului unghiular al tangentei la o curbă într-un punct dat (fig. 47). Funcţia $f: E \to \mathbb{R}$ se numeşte derivabilă pe $A (A \subset E)$, dacă este derivabilă în orice punct din A. Dacă se aplică unor funcţii derivabile operaţiile algebrice se obţin tot funcţii derivabile. Regulile de derivare sînt date în tabelul 1. Derivatele unor funcţii elementare sînt date în tabelul 2. Orice funcţie derivabilă în x_0 este continuă în x_0. Reciproca nu este adevărată, de exemplu funcţia $f(x) = |x|$ este continuă în $x = 0$, dar nu este derivabilă în acest punct. Derivata unei funcţii f se notează cu $\dot{f}$ (I. Newton, 1671, notaţie folosită astăzi în mecanică pentru derivate în raport cu timpul), $\frac{df}{dx}$ (G. Leibniz, 1673), $f'(x)$ (J. Lagrange, 1797). — *Derivată la dreapta (respectiv la stînga)*, limita:

$$f'_d(x_0) = \lim_{x \searrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$\left(\text{respectiv } f'_s(x_0) = \lim_{x \nearrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}\right),$$

dacă există şi este finită. Aceste derivate se numesc *derivate laterale*. Dacă derivatele laterale în x_0 există şi sînt egale, atunci funcţia este derivabilă în x_0 şi $f'_d(x_0) = f'_s(x_0) = f'(x_0)$. — *Derivata de ordinul n* ($f^{(n)}$),

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})', \text{ unde } f^{(0)} = f,\ f^{(1)} = f',\ f^{(2)} = f''$$

etc. Notaţia $f^{(n)}$ a fost indicată de J. Lagrange (1797); pentru derivata de ordinul doi, $\frac{d^2f}{dx^2}$, simbolul se datorează lui G. Leibniz (1693). *(V.B.)*

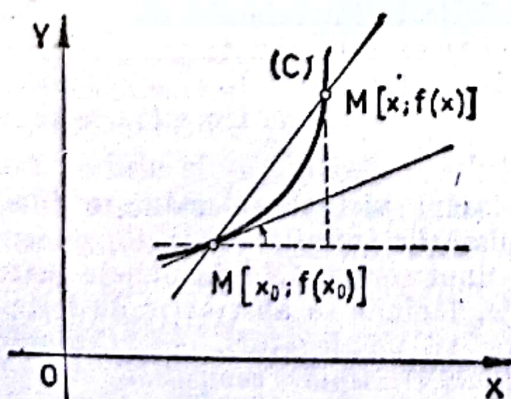


Fig. 47

Tabelul 1

$$(f + g)' = f' + g'$$

$$\left(\sum_{i=1}^{n} f_i\right)' = \sum_{i=1}^{n} f'_i$$

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g'$$

$$(f_1 \cdot f_2 \cdots f_n)' =$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f_1 f_2 \dots f_{i-1} f'_i f_{i+1} \dots f_n$$

$$(f^n)' = nf^{n-1}f'$$

$$(cf)' = cf', \ (c \in \mathbf{R})$$

$$(-f)' = -f'$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$$

$$(f(u))' = f'(u) \cdot u'$$

Tabelul 2

	Funcția f	Derivata f'
1	$c \ (c \in \mathbf{R})$	0
2	$x^n (n \in \mathbf{N})$	nx^{n-1}
3	$x^{-n} (n \in \mathbf{N})$	$-nx^{-n-1}$
4	$x^{\alpha} (\alpha \in \mathbf{R})$	$\alpha x^{\alpha-1}$
5	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
6	$\sin x$	$\cos x$
7	$\cos x$	$-\sin x$
8	$\mathrm{tg}\ x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
9	$\mathrm{ctg}\ x$	$-\frac{1}{\sin^2 x}$
10	$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
11	$\arccos x$	$-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
12	$\mathrm{arctg}\ x$	$\frac{1}{1+x^2}$
13	$\mathrm{arcctg}\ x$	$-\frac{1}{1+x^2}$
14	e^x	e^x
15	$a^x (a>0, a \neq 1)$	$a^x \ln a$
16	$\ln x$	$\frac{1}{x}$
17	$\log_a x (a>0, \ a \neq 1)$	$\frac{1}{x \ln a}$

derivată parțială $\left(\frac{\partial f}{\partial x}, \ f'_x\right)$, derivată, în raport cu o variabilă, a unei funcții de două variabile, $f(x, y)$, cealaltă variabilă fiind fixată:

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0},$$

$$f'_y(x_0, y_0) = \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}.$$

— *Derivată parțială de ordinul doi*, fiecare din derivatele:

$$f''_{x^2} = (f'_x)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

$$f''_{xy} = (f'_x)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

$$f''_{yx} = (f'_y)'_x = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

$$f''_{y^2} = (f'_y)'_y = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Analog se definesc derivatele parțiale de ordin superior. Considerarea deri-

vatei parțiale a fost făcută tot de G. Leibniz (1694), notația a fost propusă de A. M. Legendre (1788). — *Teorema lui Schwarz*: dacă funcția $f(x, y)$ are derivate parțiale mixte de ordinul doi f''_{xy} și f''_{yx} într-o vecinătate V a unui punct (a, b) și dacă f''_{xy} și f''_{yx} sînt continue în (a, b), atunci $f''_{xy}(a, b) = f''_{yx}(a, b)$. Teorema a fost stabilită de H. Schwarz (1884). *(V.B.)*

Descartes [decart], **René** (1596—1650), filozof, matematician și fizician francez. Opera sa principală, *Discours de la méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences* (1637), conține trei anexe: *La Dioptrique*, în care tratează teoria fizico-matematică a instrumentelor optice în strînsă legătură cu problemele fiziologiei și unde dă legile refracției; *Les Méthéores*, care cuprinde teoria fenomenelor meteorologice; *La Géometrie*, unde introduce sistemul său de coordonate cu ajutorul căruia problemele de geometrie sînt reduse la probleme de algebră, tratează teoria tangentelor la curbe (definind noțiunea de normală), expune teoria ovalelor, dă o metodă pentru rezolvarea ecuației de gradul patru și teorema care dă numărul rădăcinilor pozitive ale unei ecuații algebrice. Multe din contribuțiile sale sînt cunoscute din corespondența pe care a purtat-o cu savanții din vremea sa. *(V.B.)*

descăzut → scădere

descompunere în factori ireductibili (a unui polinom, cu coeficienți într-un corp), scrierea polinomului ca produs de polinoame ireductibile. I. Newton și G. Leibniz au dat procedee de determinare a factorilor ireductibili ai unui polinom cu coeficienți raționali, iar K. Gauss a dat prima demonstrație de ireductibilitate aplicabilă la orice inel de polinoame cu coeficienți într-un corp. Ex.: $P(x) = 4x^4 + 4x^3 - 5x^2 - 9x - 9 = (2x - 3)(2x + 3)(x^2 + x + 1)$. *(V.B.)*

descompunere în factori primi, scrierea unui număr natural sub forma unui produs de factori primi la diverse puteri:

$$n = p^a q^b \dots s^k,$$

unde $p, q, \dots, s$ sînt numere prime. Ex.: $118800 = 2^4 \cdot 3^3 \cdot 5^2 \cdot 11$. Unicitatea descompunerii în factori primi (abstracție făcînd de ordinea factorilor) a fost demonstrată de J. Wallis (1785). *(V.B.)*

descompunere în fracții simple (a unei funcții raționale), scrierea funcției raționale $\frac{P(x)}{Q(x)}$ (cu grad $P(x) <$ grad $Q(x)$) sub forma:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{i=1}^{p_1} \frac{A_{1i}}{(x - x_1)^i} + \dots + \sum_{i=1}^{p_k} \frac{A_{ki}}{(x - x_k)^i} + \sum_{i=1}^{q_1} \frac{B_{1i}x + C_{1i}}{(a_1x^2 + b_1x + c_1)^i} + \dots + \sum_{i=1}^{q_h} \frac{B_{hi}x + C_{hi}}{(a_hx^2 + b_hx + c_h)^i},$$

unde descompunerea polinomului cu coeficienți reali $Q(x)$ în factori ireductibili este:

$$Q(x) = (x - x_1)^{p_1} \dots (x - x_k)^{p_k} (a_1x^2 + b_1x + c_1)^{q_1} \dots (a_hx^2 + b_h + c_h)^{q_h}.$$

Ex.:

$$\frac{1}{(x+1)^2\,(x^2+1)^2} = \frac{\frac{1}{2}}{x+1} + \frac{\frac{1}{4}}{(x+1)^2} + \frac{-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}}{x^2+1} + \frac{-\frac{1}{2}x}{(x^2+1)^2}.$$

Descompunerea în fracţii simple se foloseşte la integrarea funcţiilor raţionale; a fost efectuată pentru prima dată de G. Leibniz (1703). *(V.B.)*

desfăşurare, operaţie de întindere (fără a produce rupturi, deformări) pe un plan a unei suprafeţe desfăşurabile. *(V.B.)*

desfăşurată → evolută

desfăşurătoare → evolventă

determinant antisimetric, determinant, $\Delta = |a_{ij}|_n$, cu proprietatea $a_{ij} = -a_{ji}$, pentru orice $i \neq j$, şi $a_{ii} = 0$, $i = 1, 2, ..., n$. Un determinant antisimetric de ordin impar este egal cu zero. *(V.B.)*

determinant caracteristic, fiecare dintre determinanţii care se obţin din determinantul principal, relativ la un sistem de m ecuaţii liniare cu n necunoscute, prin adăugarea unei linii secundare şi a coloanei termenilor liberi corespunzători. Determinanţii caracteristici au fost puşi în evidenţă de J. J. Sylvester (1851). *(V.B.)*

determinant de ordinul n (al matricii pătrate $A = \| a_{ij} \|_n$; det A, $\Delta = |a_{ij}|_n$), numărul (unic determinat) care se obţine însumînd toate cele $n!$ produse formate cu elementele $a_{ij} (i, j = 1, 2, ..., n)$ ale matricii A, luate cîte unul, din fiecare linie şi din fiecare coloană, produsele fiind precedate de semnul + sau —, după cum numărul de inversiuni în permutările indicilor secunzi (dacă indicii liniilor au fost aranjaţi în ordinea naturală) este par sau impar:

$$\det A = \sum_{\varphi \in P_n} \pm a_{1i_1} a_{2i_2} \dots a_{ni_n},$$

unde P_n este mulţimea permutărilor de n. Prin convenţie, elementele, liniile, coloanele şi diagonala principală a matricii A se numesc elementele, liniile, coloanele şi diagonala principală a determinantului:

$$\det A = \Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots a_{2n} \\ \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} \dots a_{nn} \end{vmatrix}$$

Determinanţii sînt un instrument util pentru rezolvarea sistemelor de ecuaţii liniare. Bazele teoriei determinanţilor au fost puse în legătură cu problema eliminării necunoscutelor într-un sistem de ecuaţii liniare (G. Leibniz, 1693; G. Cramer, 1750; K. F. Hindenburg, 1784). Scrierea determinanţilor în forma folosită astăzi a apărut la K. Jacobi, (1841) şi A. Cayley (1844). Denumirea a fost propusă de A. Cauchy (1815). — *Minor al elementului* a_{ij} *(Δ_{ij})*, determinantul de ordin $n-1$ care se obţine suprimînd în Δ linia i şi coloana j. — *Complement algebric al elementului* a_{ij} *(Γ_{ij})*, numărul $(-1)^{i+j}\Delta_{ij}$. — *Regula lui Laplace*

(caz particular): $\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Gamma_{ij}$,

pentru orice $j = 1,2, ..., n$. Regula dată de P. Laplace (1772) permite calculul unui determinant de ordin n, în funcţie de n determinanţi de ordin $n-1$. — *Regula lui Sarrus*, regulă care permite calculul unui determinant de ordin 3 astfel: se completează

tabloul determinantului cu primele două linii scrise dedesubt, în aceeași ordine și, din suma produselor elementelor fiecărei diagonale paralele cu diagonala principală $a_{11}a_{22}a_{33}$, se scade suma produselor elementelor fiecărei diagonale paralele cu diagonala secundară $a_{13}a_{22}a_{31}$.

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$
$$\begin{matrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

Pentru calculul unui determinant de ordinul 3 se poate folosi, de asemenea, regula triunghiurilor (dată de V. A. Zinoviev): la produsul elementelor de pe diagonala principală se adaugă produsele elementelor vîrfuri ale celor două triunghiuri cu bazele paralele cu această diagonală, avînd vîrfurile de cealaltă parte a bazelor, și se scad produsele elementelor de pe diagonala secundară și ale elementelor din vîrfurile triunghiurilor, cu bazele paralele ei și cu vîrfurile de partea opusă lor. *(V.B.)*

determinant principal, determinant nenul de ordin maxim, ce se poate forma cu elementele matricii A, atașate unui sistem de m ecuații liniare cu n necunoscute. Liniile (coloanele) matricii A care intervin în determinantul principal se numesc *linii (coloane) principale*, iar celelalte se numesc *linii (coloane) secundare*. *(V.B.)*

determinant simetric, determinant, $\Delta = |a_{ij}|_n$, cu proprietatea $a_{ij} = a_{ji}$, pentru orice $i, j = 1, 2, ..., n$. *(V.B.)*

determinant Vandermonde, determinant de forma:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots 1 \\ a_1 & a_2 & \dots a_n \\ a_1^2 & a_2^2 & \dots a_n^2 \\ \dots & \dots & \dots \\ a_1^{n-1} & a_2^{n-1} & \dots a_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Este egal cu $\prod\limits_{1 \leq j < i \leq n} (a_i - a_j)$. Au fost puși în evidență de A. T. Vandermonde (1772). *(V.B.)*

dezvoltare în serie (a unei funcții), determinare a unei serii de funcții, uniform convergentă, a cărei sumă să fie egală cu funcția dată. Dezvoltarea în serie de puteri a unor funcții este dată în tabelul 3. *(V.B.)*

diagonală [gr. *dia* „prin", *gonia* „unghi"], segment de dreaptă determinat de două vîrfuri ale unui poligon (sau ale unui poliedru) care nu aparțin aceleiași laturi (fețe). Un poligon cu n vîrfuri admite $\frac{n(n-3)}{2}$ diagonale. Termenul se datorează lui Platon (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

diagonală principală (a unei matrici pătrate $A = \| a_{ij} \|_n$), mulțimea elementelor a_{ii}, $i = 1, 2, ..., n$. *(V.B.)*

diagramă logică → **schemă de calcul**

diametru [gr. *dia* „prin", *metron* „măsură"] **1.** (Pentru o mulțime A dintr-un spațiu metric; D). $D = \sup\limits_{x, y \in A} d(x, y)$, unde $d(x, y)$ este distanța dintre x și y. **2.** (Pentru un cerc sau o sferă). Segment de dreaptă determinat de două puncte ale unui cerc (sfere) și care trece prin centrul cercului (sferei). Lungimea sa este diametrul **1**, dacă cercul (sfera) este considerat în spațiul metric $\mathbb{R}^2(\mathbb{R}^3)$ înzestrat cu distanța euclidiană. Denumirea apare la Platon și Eudem (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

Tabelul 3

$$(a + x)^m = a^m + ma^{m-1}x + \dots + \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!}a^{m-n}x_n + $$
$$+ \dots \text{ pentru } -|a| < x < |a|$$

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots \text{ pentru } x \in \mathbf{R}$$

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \text{ pentru } x \in \mathbf{R}$$

$$\cos x = x - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} + \dots \text{ pentru } x \in \mathbf{R}$$

$$\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{2x^5}{15} + \frac{17x^7}{315} + \frac{62x^9}{2835} + \dots \text{ pentru}$$
$$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n-1}}{2n+1} + \dots \text{ pentru}$$
$$-1 < x \leqslant 1$$

$$\ln(1 + x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + \dots$$
$$\text{pentru } -1 < x \leqslant 1$$

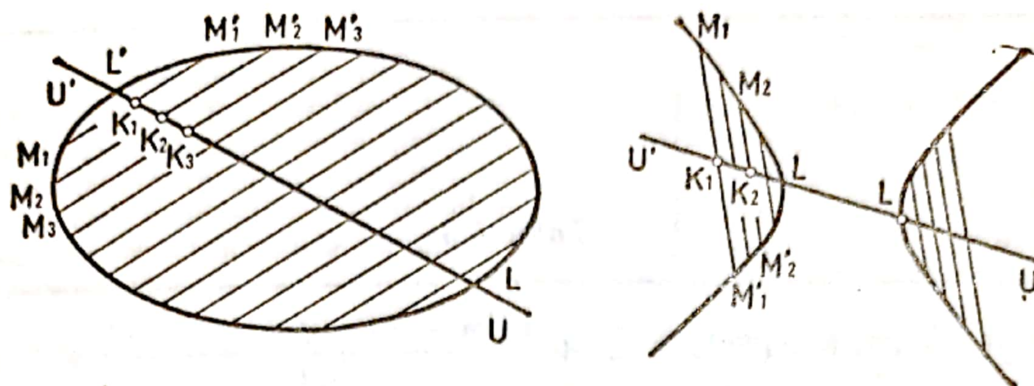


Fig. 48

diametrul unei conice (cu centru), dreaptă ce trece prin centrul conicii. Locul geometric al mijloacelor coardelor de direcţe m este un diametru, numit *diametru conjugat* direcţiei m (fig. 48). Pentru conicele raportate la axele lor de simetric, ecuaţia diametrului conjugat direcţiei m este:

$$\frac{x}{a^2} \pm m\,\frac{y}{b^2} = 0.$$

Dacă m' este panta diametrului conjugat, există relaţiile:

$mm' = -\frac{b^2}{a^2}$ pentru elipsă, şi $mm' = \frac{b^2}{a^2}$ pentru hiperbolă, stabilite de J. Biot (1802). Diametrii conicelor au fost consideraţi iniţial de Apollonius (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

diametrul unei cuadrice (cu centru), dreaptă ce trece prin centrul cuadricei. Locul geometric al centrelor secţiunilor determinate prin intersecţia cuadricei cu plane paralele cu un plan dat este un diametru. *(V.B.)*

diedru [gr. *dis* „doi", *hedra* „bază"], figură geometrică formată din două

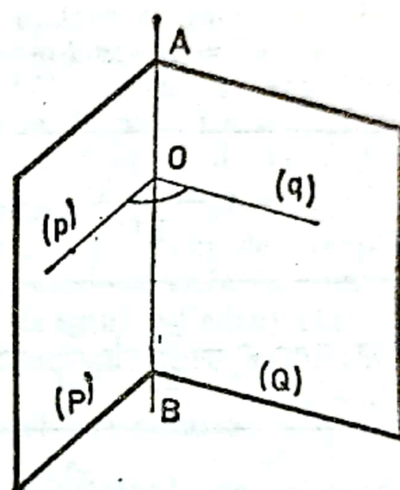


Fig. 49

semiplane, numite feţe, mărginite de aceeaşi dreaptă, numită muchie (fig. 49). Măsura *unghiului diedru* este măsura unghiului plan format de semidreptele după care un plan perpendicular pe muchie intersectează feţele diedrului. Dacă planele care formează unghiul diedru au ecuaţiile:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$

$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$

măsura unghiului diedru u este dată de formula:

$$\cos u = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\pm\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2}\ \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}. \qquad (V.B.)$$

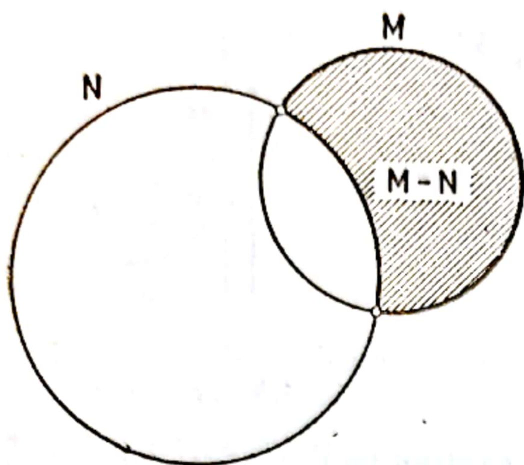


Fig. 50

diferență [lat. *differentia* „deosebire"] → scădere

diferența a două mulțimi $(M - N)$, mulțimea elementelor care aparțin lui M și nu aparțin lui N (fig. 50).

$$M - N = \{x \mid x \in M,\ x \notin N\}.$$

Diferența a două mulțimi poate fi exprimată ca o intersecție:

$$M - N = M \cap CN.$$

Dacă $N \subset M$, diferența $M - N$ se numește complementara mulțimii N față de mulțimea M. Diferența a două mulțimi a fost tratată pentru prima dată de B. Bolzano (1851), iar folosirea simbolului diferenței numerice, $M - N$, a fost propusă de G. Peano (1897), fiind justificată prin faptul că dacă mulțimile M și N sînt finite, iar $N \subset M$, numărul elementelor mulțimii diferențe este egal cu diferența dintre numărul elementelor din M și numărul elementelor lui N. *(V.B.)*

diferența simetrică a două mulțimi $(M \Delta N)$, mulțimea

$$M \Delta N = (M - N) \cup (N - M).\ (A.B.)$$

diferențe finite (ale funcției $f(x)$; Δf, $\Delta^n f$), expresiile. a) $\Delta f_x = f(x + h) - f(x)$, numită diferență finită de ordin unu; b) $\Delta^n f_x = \Delta(\Delta^{n-1} f_x) = \Delta^{n-1} f_{x+h} - \Delta^{n-1} f_x$, $(n = 2, 3, \dots)$, numită diferență finită de ordin n. Calculele cu diferențe finite se folosesc în analiza numerică, de exemplu la probleme de interpolare. Inițiatorul calculului cu diferențe finite este B. Taylor (1715); notațiile au fost introduse de L. Euler (1755), deși ideea, pentru simbolismul acestei teorii se întîlnește și la G. Leibniz (1695). *(V.B.)*

diferențială [lat. *differentiare* „a face diferența"] (a unei funcții f în punctul x_0; $(df)_{x=x_0}$), funcția $f'(x_0)\,h$ (cu argumentul h). Diferențiala $(df)_{x=x_0}$ aproximează creșterea $f(x_0 + h) - f(x_0)$ a funcției. Diferențiala $d(x)$ a funcției identice este egală cu h și se mai scrie $dx = h$; deci $df = f'(x)\,dx$. — *Diferențiala de ordinul* $n((d_n f)_{x=x_0})$, $(d^n f)_{x=x_0} = f_x^{(n)} dx^n$. — *Diferențiala unei funcții de două variabile*: $df = f'_x dx + f'_y dy$. Notațiile și denumirea au fost introduse de G. Leibniz (1675 și respectiv 1684). *(V.B.)*

dimensiune [lat. *dimensio*] (a unui spațiu liniar), numărul maxim de elemente, liniar independente, din spațiul respectiv. Ex.: dreapta are dimensiunea unu; planul, dimensiunea 2; spațiul, dimensiunea 3. *(V.B.)*

dinamica [gr. *dynamis* „forță, putere"], parte a mecanicii care studiază mișcarea corpurilor sub acțiunea forțelor exterioare. Noțiunea a fost introdusă de G. Leibniz (*Specimen dynamicum*, 1695). *(Șt.G.)*

directoare [lat. *director-oris* „îndreptare, dirijare"], curbă pe care se sprijină generatoarea unei suprafețe și care dirijează deplasarea acesteia. *(V.B.)*

directoarea unei conice, dreaptă din planul conicei, cu proprietatea că

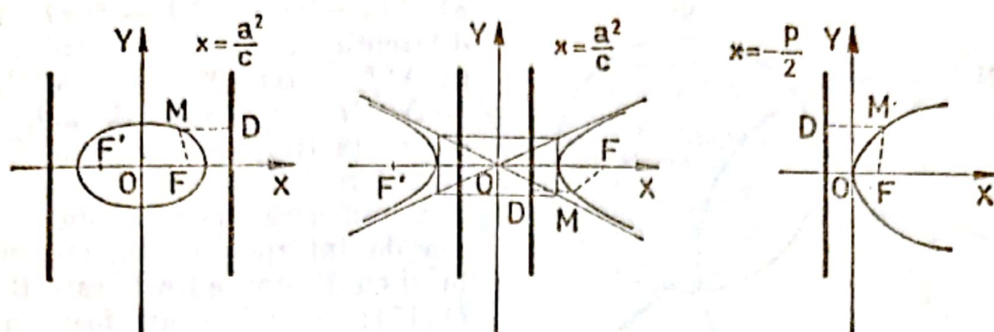


Fig. 51

pentru orice punct al conicei raportul distanțelor sale la un focar și la această dreaptă este constant (reprezentînd excentricitatea) (fig. 51). Directoarea este polara unuia dintre focarele conicei. Pentru conicele date prin ecuații reduse, ecuațiile directoarelor sînt:

$$x = \pm \frac{a^2}{c} \text{ (pentru elipsă şi hiperbolă)},$$

$$x = -\frac{p}{a} \text{ (pentru parabolă)}.$$

Conceptul de directoare a unei conice a fost introdus de Apollonius (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

direcție [lat. *directio*], clasă de echivalență determinată în mulțimea dreptelor din plan sau spațiu de relația de paralelism. Direcția unei drepte este determinată de parametrii directori, în particular, de cosinusurile directoare. Denumirea a fost propusă de N. Oresme (1372). *(V.B.)*

disc magnetic, suport de informație cu acces aleatoriu utilizat ca memorie auxiliară sau ca dispozitiv de intrare/ieșire. Este un disc metalic, acoperit pe ambele fețe cu material magnetic, datele memorate fiind aranjate sub formă liniară pe piste concentrice. În mod obișnuit sînt montate sub formă de pachet, pe un ax rotativ, la distanță unele de altele pentru a permite accesul dispozitivelor magnetice de scriere și citire. *(T.B.)*

discontinuitate [lat. *dis* „fără", *continuitas-tatis* „continuitate"] (a unei funcții într-un punct x_0), proprietate a unei funcții de a nu fi continuă în punctul x_0. — *Discontinuitate de speța întîia*, discontinuitatea la care în punctul considerat, x_0, limitele laterale există și sînt diferite: $f(x_0+0) \neq f(x_0-0)$; dacă, în plus, valoarea funcției în punctul x_0 verifică relația:

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

discontinuitatea se numește regulată. — *Discontinuitate de speța a doua*, discontinuitatea la care în punctul considerat cel puțin una dintre cele două limite laterale nu există. Funcțiile discontinue au fost cercetate pentru prima dată de către L. Euler (1784). *(V.B.)*

discriminant [lat. *discriminans-tis* „care separă, care deosebește"] **1.** (Pentru o formă pătratică). Determinantul, det A, unde A este matricea atașată formei pătratice. **2.** (Pentru ecuația de gradul doi $ax^2+bx+c=0$). Expresia: $-b^2+4ac$. Este opusul realizantului. *(V.B.)*

disjuncție [lat. *disjunctio* „separare]" (a două propoziții p, q; $p \vee q$, $p \cup q$, Apq), propoziția „p sau q" adevărată cînd cel puțin una dintre propozițiile p, q este adevărată, și falsă cînd ambele propoziții p, q sînt false. Tabelul de valori logice ale disjuncției este:

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \vee q)$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

unde $v(p)$ este valoarea logică a propoziției p. *(A.B.)*

dispersie [lat. *dispersio* „împrăștiere"] (a unei variabile aleatoare X; $D(X)$), momentul centrat de ordinul doi al variabilei aleatoare: $D(X) = M[(X - M(X))]^2$. Dispersia unei variabile aleatoare discrete este:

$$D(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i - M(X))^2 \; f(x_i),$$

unde $f(x_i)$ este probabilitatea cu care variabila aleatoare X ia valoarea $x_i (i = 1, 2, ..., n)$; iar pentru o variabilă aleatoare continuă:

$$D(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 \, dF(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [x - M(X)]^2 f(x) \, dx,$$

unde $F(x)$ este funcția de repartiție a variabilei aleatoare X, iar $f(x)$ funcția densitate de probabilitate corespunzătoare (dacă există). Reprezintă un indicator numeric al împrăștierii valorilor variabilei aleatoare în jurul valorii medii. *(V.B.)*

distanță [lat. *distantia*] (pe o mulțime A), funcție $d: A \times A \to [0, \infty)$ care îndeplinește condițiile:
a) $d(x, y) = 0$ dacă și numai dacă $x = y$;
b) $d(x, y) = d(y, x)$ oricare ar fi x și y;
c) $d(x, z) \leqslant d(x, y) + d(y, z)$ oricare ar fi x, y și z.
— *Distanță euclidiană*, distanță definită pe un spațiu euclidian $\mathbf{R}^n$ prin:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2},$$

unde $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ și $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$. Este distanța obișnuită din geometria euclidiană. Distanța dintre două puncte $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ din plan se calculează cu formula:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}.$$

Distanța dintre două puncte $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ din spațiu se calculează cu formula:

$$d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2},$$

dată de S. Lacroix (1798). *(V.B.)*

distanța de la un punct la o dreaptă, distanța dintre punctul considerat și proiecția sa ortogonală pe dreaptă. În plan, este dată de formula:

$$d = \left| \frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right|,$$

unde $Ax + By + C = 0$ este ecuația dreptei, iar (x_0, y_0) coordonatele punctului. În spațiu, distanța de la punctul de coordonate (x_0, y_0, z_0) la dreapta $\frac{x - a}{l} = \frac{y - b}{m} = \frac{z - c}{n}$ este dată de formula (stabilită de G. Monge, 1771):

$$d=\sqrt{\frac{[m(x_0-a)-l(y_0-b)]^2+[n(x_0-a)-l(z_0-c)]^2+[n(y_0-b)-m(z_0-c)]^2}{l^2+m^2+n^2}}.$$

(V.B.)

distanța dintre două drepte necoplanare, lungimea perpendicularei comune, cuprinsă între punctele în care ea se sprijină pe dreptele date. Dacă dreptele sînt date prin ecuațiile:

$$\frac{x-a_1}{l_1}=\frac{y-b_1}{m_1}=\frac{z-c_1}{n_1}$$

$$\frac{x-a_2}{l_2}=\frac{y-b_2}{m_2}=\frac{z-c_2}{n_2},$$

distanța dintre ele este dată de formula:

$$d=\left|\frac{\begin{vmatrix} a_2-a_1 & b_2-b_1 & c_2-c_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix}}{[(l_1m_2-l_2m_1)^2+(m_1n_2-m_2n_1)^2+(l_1n_2-l_2n_1)^2]^{\frac{1}{2}}}\right|. \quad (V.B.)$$

distanța dintre două drepte paralele, distanța de la un punct al unei drepte la cealaltă dreaptă. În plan, distanța între dreptele paralele $Ax+By+C=0$ și $Ax+By+C'=0$ se calculează cu formula:

$$d=\frac{|C-C'|}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

În spațiu, distanța între dreptele paralele

$$\frac{x-a_1}{l}=\frac{y-b_1}{m}=\frac{z-c_1}{n}$$

și

$$\frac{x-a_2}{l}=\frac{y-b_2}{m}=\frac{z-c_2}{n}$$

se calculează cu formula:

$$d=\sqrt{\frac{[m(a_2-a_1)-l(b_2-b_1)]^2+[n(b_2-b_1)-m(c_2-c_1)]^2+[l(c_2-c_1)-n(a_2-a_1)]^2}{l^2+m^2+n^2}}.$$

(V.B.)

distanța dintre două mulțimi (într-un spațiu metric),

$$d(A,B)=\inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}} d(x,y),$$

unde $d(x,y)$ este distanța dintre punctele x, y. Noțiunea generală de distanță între două mulțimi închise a fost introdusă de D. Pompeiu (1905). *(V.B.)*

distanța dintre un punct și un plan, distanța dintre punctul dat și proiecția sa ortogonală pe acel plan. Se calculează cu formula:

$$d=\frac{|Ax_0+By_0+Cz_0+D|}{(A^2+B^2+C^2)^{\frac{1}{2}}},$$

în care (x_0, y_0, z_0) sînt coordonatele punctului și $Ax + By + Cz + D = 0$ este ecuația planului. *(V.B.)*

distanță sferică, distanța dintre două puncte de pe o sferă măsurată pe arcul de cerc mare (mai mic decît π), determinat de cele două puncte date. Dacă (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) sînt coordonatele punctelor pe sfera cu centrul în origine, de rază r, distanța sferică d este dată de formula:

$$\cos\frac{d}{r} = x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2. \quad (V.B.)$$

distributivitate [lat. *distributio* „împrăștiere, repartizare în mai multe locuri"], proprietate a unei operații $f\colon M \times M \to M$, notată $f(x, y) = x \circ y$, față de o altă operație $g\colon M \times M \to M$, notată $g(x, y) = x \perp y$, astfel încît pentru orice $x, y, z \in M$: $x \circ (y \perp z) = (x \circ y) \perp (x \circ z)$ — distributivitate la stînga, sau $(y \perp z) \circ x = (y \circ x) \perp (z \circ x)$ — distributivitate la dreapta. Într-un inel, înmulțirea este distributivă față de adunare la stînga și la dreapta. Într-o latice distributivă (de exemplu mulțimea părților unei mulțimi), disjuncția este distributivă față de conjuncție și conjuncția este distributivă față de disjuncție. În corpul numerelor reale, împărțirea nu este distributivă la dreapta față de adunare. Termenul a fost introdus de F. Servois (1815). *(A.B., V.B.)*

distribuție (a unei variabile aleatoare) → **repartiție**

divergență [lat. *dis* „împrăștiat, *vergere* „a se îndrepta"] **1.** (Pentru un șir). Proprietate a unui șir de a nu fi convergent. **2.** (Pentru o serie). Proprietate a unei serii de a nu fi convergentă. *(V.B.)*

divergență (a unui cîmp vectorial **V**), scalarul definit prin $\partial V_x/\partial x + \partial V_y/\partial y + \partial V_z/\partial z$, unde V_x, V_y și V_z sînt proiecțiile lui **V** pe axele unui sistem cartezian de referință $Oxyz$, într-un punct oarecare al cîmpului. El apare ca produsul scalar dintre operatorul nabla ∇ și **V** (după notația lui J.W Gibbs), adică:

$$\nabla \cdot \mathbf{V} = \operatorname{div} \mathbf{V} = \frac{\partial V_x}{\partial x} + \frac{\partial V_y}{\partial y} + \frac{\partial V_z}{\partial z}.$$

Divergența într-un punct M reprezintă limita raportului fluxului cîmpului vectorial printr-o suprafață închisă S ce înconjoară M și măsura volumului mărginit de S cînd acesta tinde către punctul M. Dacă divergența se anulează într-un domeniu D, cîmpul vectorial se spune că este solenoidal, în acel domeniu: cînd $\nabla \cdot \mathbf{V} = 0$, atunci $\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{W}$, adică **V** este rotorul cîmpului vectorial **W**. Divergența vectorului de poziție $\mathbf{r} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ este o constantă, $\operatorname{div} \mathbf{r} = 3$. Noțiunea de divergență se degajă din lucrările lui W. Hamilton (1853), iar denumirea și notația, div **V**, se datorează lui M. Abraham (1902) și P. Langevin (1905). *(V.B., Șt.G.)*

divizibilitate ($b|a$, $a \vdots b$), relație între două numere întregi (sau polinoame) a și b, care are loc atunci cînd există un număr întreg (respectiv un polinom) c, astfel încît $a = b \cdot c$. Ex.: $2 \mid 6$, 2 divide pe 6; $x - 1 \mid x^3 - 1$, $x - 1$ divide pe $x^3 - 1$. Relația de divizibilitate are proprietățile:

a) $a \mid a$ (reflexivitate);
b) dacă $a \mid b$ atunci $b \mid a$ este fals (antisimetrie);
c) dacă $a \mid b$ și $b \mid c$ atunci $a \mid c$ (tranzitivitate), fiind deci o relație de ordine. De asemenea, dacă $a \mid b$ și $a \mid c$ atunci $a \mid b + c$ și $a \mid b - c$. Proprietățile divizibilității au fost studiate încă din antichitate de Pitagora (sec. 6 î.e.n.). *(V.B.)*

diviziune armonică [lat. *divisio* „împărţire", *harmonicus* „bine aşezat, bine proporţionat"], configuraţie geometrică formată din patru puncte coliniare A, B, M, N astfel încît punctele M şi N să împartă segmentul AB în acelaşi raport (în valoare absolută):

$$\frac{MA}{MB} = -\frac{NA}{NB}$$

segmentele fiind orientate. Dacă punctele A, B, M, N formează o diviziune armonică atunci raportul lor anarmonic este egal cu —1:

$$(ABMN) = -1.$$

Ex.: într-un triunghi, picioarele bisectoarelor interioară şi exterioară ale unui unghi şi extremităţile laturii intersectate de bisectoare formează o diviziune armonică (fig. 52). Două puncte diametral opuse ale unui cerc cu punctele în care dreapta lor intersectează alt cerc ortogonal cu cel dat (fig. 53). Noţiunea de diviziune armonică a fost introdusă de pitagoreici (sec. 6 î.e.n.). *(V.B.)*

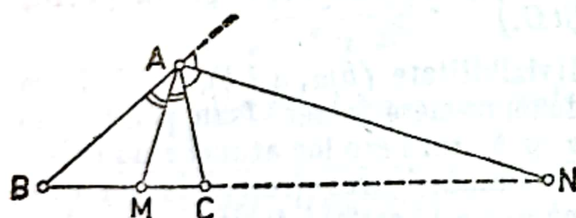


Fig. 52

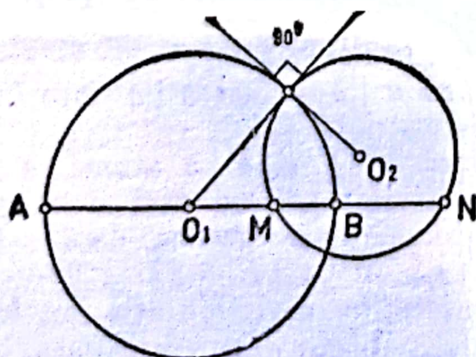


Fig. 53

diviziunea cercului [lat. *divisio* „împărţire", *circus* „cerc"] →**poligon**

divizor [lat. *divisor*] (al unui număr întreg n), număr întreg d diferit de zero care divide pe n $(d \mid n)$. — *Divizor comun*, număr întreg diferit de zero care divide simultan mai multe numere întregi. Ex.: 6 este divizor comun al numerelor 48, 60, 72, 240. Cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b se notează (a, b). Se mai numeşte *codivizor*. — *Divizori conjugaţi*, două numere întregi d_1 şi d_2 divizori ai aceluiaşi întreg a, astfel încît $d_1 d_2 = a$. Ex.: 2 şi 3 sînt divizori conjugaţi ai lui 6. *(V.B.)*

divizori ai lui zero, elemente a şi b diferite de zero, într-un inel A, astfel încît:

$$ab = 0 \text{ sau } ba = 0.$$

Ex.: în inelul matricelor pătrate, există divizori ai lui zero, astfel :

$$\begin{Vmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{Vmatrix} \begin{Vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{Vmatrix} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

Existenţa divizorilor lui zero a fost observată de W. Hamilton (1844) cu ocazia introducerii bicuaternionilor. *(V.B.)*

dobîndă [v. sl. *dobyti* — *dobondon* „a dobîndi, a primi"], sumă de bani care se primeşte pentru un împrumut, reprezentînd un anumit procent din suma împrumutată pe o perioadă dată, de obicei un an. Dacă S este suma împrumutată iar p procentul de dobîndă (pe an), atunci dobînda anuală este $D = \frac{pS}{100}$. — *Dobîndă compusă*, dobîndă calculată pentru un număr de n ani, procentul de dobîndă anuală fiind p:

$$D_n = S\left[\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n - 1\right].$$

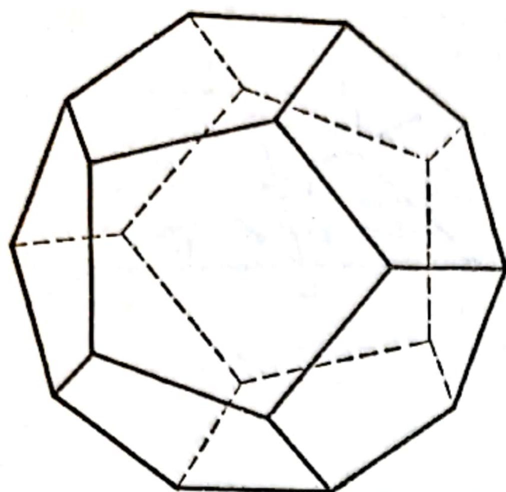


Fig. 54

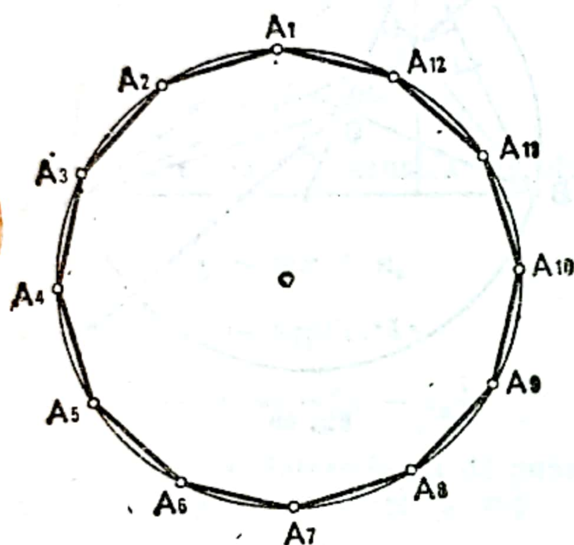


Fig. 55

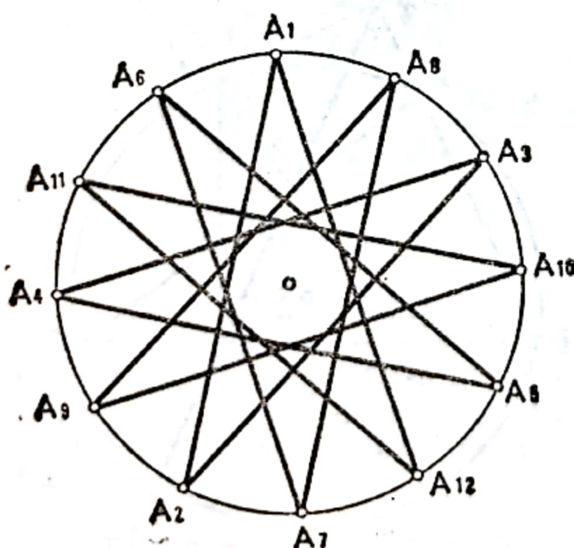


Fig. 56

Formula a fost dată de G. Leibniz (1683). *(V.B.)*

dodecaedru [gr. *dodeka* „12", *hedra* „bază, față"], poliedrul cu 12 fețe ce pot fi pentagoane sau romburi. Dodecaedrul pentagonal regulat este unul din cele cinci poliedre regulate; are 30 de muchii, 20 de vîrfuri din care pornesc cîte 3 muchii, iar măsura unghiului diedru format de două fețe adiacente are 116°33′54″,2 (fig. 54). Volumul dodecaedrului regulat în funcție de muchie este:

$$V = \frac{(15 + 7\sqrt{5})\, l^3}{4},$$

iar aria sa este dată de formula:

$$A = 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}\; l^2.$$

Dodecaedru era cunoscut de etrusci (c. 1000 î.e.n.). Unele forme cristaline întîlnite în natură sînt dodecaedre regulate, de exemplu pirita, cobaltina. *(V.B.)*

dodecagon [gr. *dodeka* „12", *gonia* „unghi"], poligon cu 12 laturi (fig. 55). Aria dodecagonului regulat înscris în cercul de rază R este: $A = 3R^2$, iar latura și apotema sînt date de formulele:

$$l_{12} = \frac{R}{2}(\sqrt{6} - \sqrt{2}),$$

$$a_{12} = \frac{R}{4}(\sqrt{6} + \sqrt{2}).$$

Dodecagonul regulat a fost considerat de Hippasus (sec. 5 î.e.n.). — *Dodecagon stelat,* dodecagon concav obținut prin unirea din 5 în 5 a vîrfurilor unui dodecagon (fig. 56). *(V.B.)*

doi [lat. *duo-duae*, termen provenit din cuvîntul sanscrit *dvi*, *dve* „doi"], număr natural indicat prin cifra 2 (provenită din legarea, ca urmare a scrierii rapide, a celor două bare orizontale, ⚌, prin care chinezii

și arabii reprezentau acest număr; forma actuală s-a statornicit odată cu inventarea tiparului, în 1440), sau prin două bare verticale, II (ceea ce dă imaginea repetării semnului caracteristic pentru unu, fapt întîlnit la romani, egipteni, babilonieni ș.a.). *(V.B.)*

domeniu, mulțime deschisă și conexă. (V.B.)

domeniu de definiție → funcție

domeniu de integritate, inel comutativ, asociativ, fără divizori ai lui zero. Ex.: inelul numerelor întregi, inelul polinoamelor. Într-un domeniu de integritate, relația $ab = 0$ este echivalentă fie cu $a = 0$, fie cu $b = 0$ și relația $a^n = 0$ este echivalentă cu $a = 0$. Noțiunea a fost introdusă de L. Kronecker (1882). *(V.B.)*

domeniu de raționalitate (al unui polinom $P(x)$ cu coeficienți într-un corp K), cel mai mic corp L care îl include pe K și în care se găsesc toate rădăcinile polinomului $P(x)$. Ex.: $x^2 + 1 \in \mathbf{Q}[x]$ are domeniul de raționalitate $\mathbf{Q}[i]$; $x^4 - 5x^2 + 6 \in \mathbf{Q}[x]$ are domeniul de raționalitate $\mathbf{Q}[\sqrt{2}, \sqrt{3}]$. *(A.B.)*

dreapta de la infinit (a unui plan), mulțimea punctelor de la infinit ale dreptelor planului. În coordonate omogene, are ecuația $x_3 = 0$. *(N.M.)*

dreapta Gauss-Newton, dreapta care trece prin mijloacele diagonalelor unui patrulater complet (fig. 57). Este paralelă cu axa parabolei înscrisă patrulaterului. *(V.B.)*

dreapta încheiată ($\overline{\mathbf{R}}$), mulțimea formată de mulțimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale împreună cu $+\infty$ și $-\infty$ *(V.B.)*

dreapta lui Euler, dreapta care trece prin ortocentrul, centrul de greutate și centrul cercului circumscris unui triunghi (fig. 58). *(V.B.)*

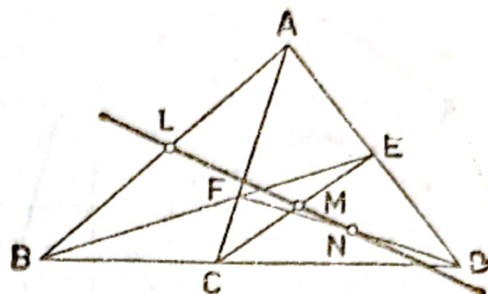


Fig. 57

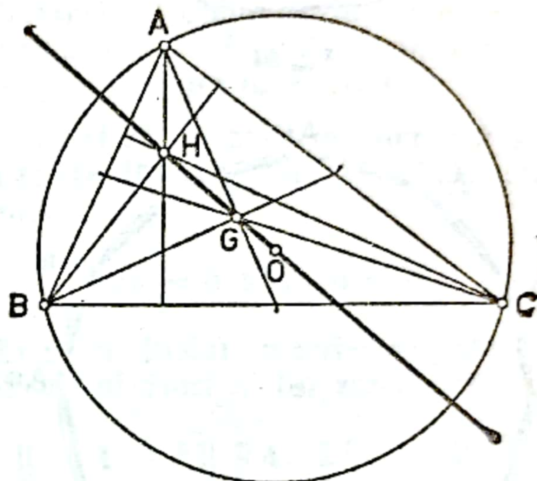


Fig. 58

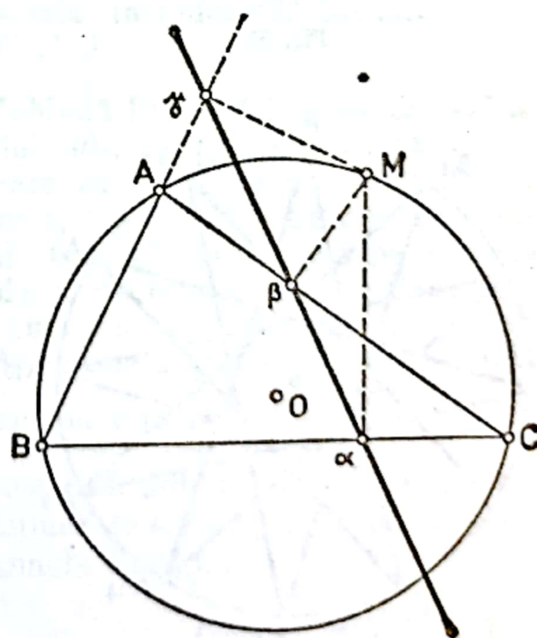


Fig. 59

dreapta lui Simson, dreapta care unește proiecțiile pe laturile unui triunghi ale unui punct de pe cercul circumscris (fig. 59). Această dreaptă e tangentă la vîrf parabolei tangente laturilor triunghiului și avînd focarul în punctul considerat. Denumirea acestei drepte este legată în mod eronat de numele lui R. Simson, teorema corespunzătoare fiind stabilită de W. Wallace (1799). *(V.B.)*

dreaptă [lat. *directus*], figură fundamentală din geometrie. În plan, dreapta raportată la un reper cartezian ortogonal are o ecuație de gradul întîi:

$$Ax + By + C = 0,$$
(P. Fermat, 1637).

Alte forme pentru ecuația dreptei sînt:

$$y = mx + n,$$

numită ecuație explicită;

$$y - y_0 = m(x - x_0),$$

ecuația dreptei determinată de punctul (x_0, y_0) și de direcția m;

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1},$$
(S. Lacroix, 1798)

ecuația dreptei ce trece prin două puncte (x_1, y_1) și (x_2, y_2);

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} - 1 = 0,$$
(A. Crelle, 1821)

numită ecuația prin tăieturi, unde a și b sînt abscisa și ordonata punctelor de intersecție ale dreptei cu axele Ox și Oy;

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha - p = 0,$$
(A. Cauchy, 1826)

numită ecuația normală a dreptei, în care p este lungimea normalei la dreaptă dusă din originea reperului, iar α este unghiul acestei normale cu direcția pozitivă a axei absciselor;

$$r = \frac{p}{\sin (u - \theta)},$$

ecuația polară a dreptei, unde p este distanța de la originea reperului la dreaptă, iar u este unghiul făcut de dreaptă cu sensul pozitiv al axei polare;

$$x = \frac{x_1 - \lambda x_2}{1 - \lambda}, \quad y = \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda},$$
(F. Joachimsthal, 1846)

ecuațiile parametrice ale dreptei determinate de punctele (x_1, y_1) și (x_2, y_2). În spațiu, diverse forme ale ecuațiilor dreptei sînt:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n},$$

dreapta ce trece prin punctul (x_0, y_0, z_0) avînd parametrii directori l, m, n;

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1},$$
(S. Lacroix, 1798)

dreapta ce trece prin punctele (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2);

$$x = \frac{x_1 - kx_2}{1 - k}, \quad y = \frac{y_1 - ky_2}{1 - k},$$

$$z = \frac{z_1 - kz_2}{1 - k},$$
(F. Joachimsthal, 1846)

ecuațiile parametrice ale dreptei determinate de punctele (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2);

$$y = mx + n, \quad z = px + q,$$
(G. Monge, 1795),

sau:

$$A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0$$
$$A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0,$$
$$A_1B_2 - A_2B_1 \neq 0,$$

ecuațiile dreptei de intersecție a două plane. *(V.B.)*

dreaptă izotropă → **elemente imaginare**

drepte antiparalele (față de două drepte concurente D_1, D_2), două drepte concurente d_1, d_2 astfel încît intersecțiile lor cu dreptele D_1, D_2 sînt vîrfurile unui patrulater inscriptibil (fig. 60). Într-un triunghi, dreapta care unește picioarele a două înălțimi este antiparalelă cu latura a treia. Termenul este folosit pentru prima oară de A. Arnauld (1667). *(V.B.)*

drepte conjugate în raport cu o conică [lat. *conjugatio* „legătură"], două drepte care au proprietatea că una trece prin polul celeilalte, relativ la conica considerată. *(V.B.)*

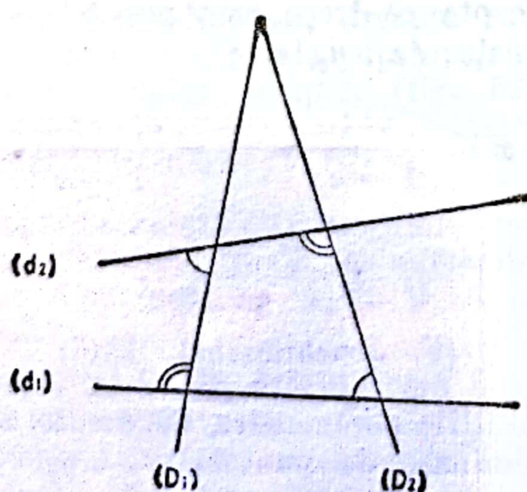


Fig. 60

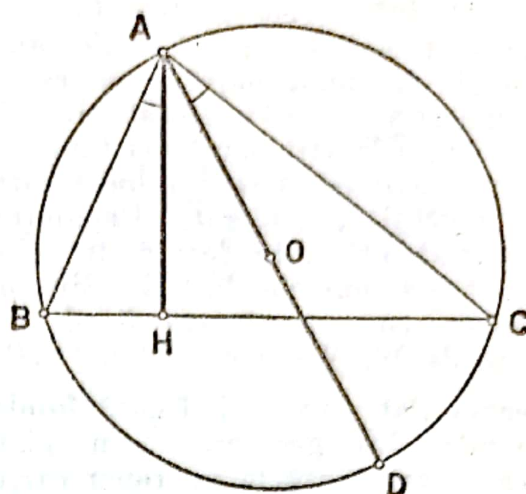


Fig. 61

drepte isogonale [gr. *isos* „egal", *gonia* „unghi"], două drepte ce trec prin vîrful unui triunghi și fac unghiuri egale cu bisectoarea unghiului respectiv. Ex.: înălțimea AH și diametrul AD al cercului circumscris unui triunghi ABC sînt drepte isogonale (fig. 61). Denumirea a fost propusă de I. Neuberg. *(V.B.)*

drepte isotopice [gr. *isos* „egal", *topos* „loc"], două drepte duse printr-un vîrf al unui triunghi care determină pe latura opusă puncte echidistante față de mijlocul acesteia. Considerarea dreptelor isotopice se datorează lui G. Longchamps. *(V.B.)*

dreptunghi, patrulater cu toate unghiurile drepte. În terminologia matematică rom nească, denumirea a fost introdusă de Gh. Asachi (1814). *(V.B.)*

dualitate, corelație simetrică, adică, în plan, transformare prin care unui p nct A îi corespunde o dreaptă a și reciproc, dreptei a, același punct A. Putem să realizăm o dualitate plană, atașînd unui punct polara lui, în raport cu un cerc (sau o conică), iar unei drepte, polul ei. Prin dualitate punctele coliniare devin drepte concurente și reciproc. Unei figuri date, mulțime de puncte și drepte (even-

tual şi conica de bază), îi corespunde o figură duală, formată din elementele transformate. Dualitatea este proiectiv invariantă, în înţelesul că două elemente duale rămîn duale printr-o proiectivitate. Prin dualitate conicele se transformă în conice şi, în general, o curbă de gradul n, într-o curbă de clasa n. În spaţiu, avem o dualitate analogă în raport cu o sferă sau cu o cuadrică. Teoria transformării prin dualitate a fost dezvoltată paralel de D. Gergonne, Ch. Brianchon, V. Poncelet. *(N.M.)*

dublarea cubului, problemă celebră, pusă în antichitate, care constă în a construi muchia unui cub al cărui volum să fie dublul volumului unui cub cu muchia a cunoscută. Problema a fost formulată de Eutokios (sec. 6 î.e.n.). Hipocrate (sec. 5 î.e.n.) a redus problema la inserarea a doi termeni x şi y între a şi $2a$, astfel încît a, x, y, $2a$ să formeze o progresie geometrică:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a},$$

de unde $x^3 = 2a^3$, x fiind deci muchia cubului căutat. Metode aproximative de rezolvare au dat: Arhitas (sec. 4 î.e.n.), considerînd intersecţia a trei suprafeţe de rotaţie; Menechmus (sec. 4 î.e.n.), cu ajutorul intersecţiei dintre o parabolă şi o hiperbolă; Nicomede (sec. 2 î.e.n.), servindu-se de concoidă; Diocles (sec. 2 î.e.n.), cu ajutorul cisoidei. Imposibilitatea rezolvării problemei a fost demonstrată riguros de P. L. Wantzel (1839). Se mai numeşte *problema delică* (după o legendă cu privire la oracolul din Delos). *(V.B.)*

E

e, simbol ce desemnează limita şirului $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$:

$$e = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n .$$

(Jacques Bernoulli, 1690).

Numărul e este suma seriei:

$$1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots,$$

(D. Bernoulli, 1728).

Este un număr iraţional (fapt demonstrat de H. Lambert, 1766) şi transcendent (fapt demonstrat de Ch. Hermite, 1873), fiind egal cu: e = = 2,718281... Numărul e a fost calculat de Boozman (1884) cu 346 zecimale exacte. După ideea lui J. Neper (1614) numărul e este folosit ca bază a unui sistem de logaritmi. Simbolul „e" a fost propus de L. Euler (1731). *(V.B.)*

echer [lat. *ex* „de la, din", *quadrare* „a face unghiuri drepte"], instrument în formă de triunghi dreptunghic cu unghiurile ascuţite de cîte 45° sau de 30° şi 60°. Se foloseşte pentru desenarea perpendicularelor şi, împreună cu rigla, a dreptelor paralele. *(V.B.)*

echilibru [lat. *aequus* „egal", *libra* „balanţă"], stare a unui sistem (*S*) de puncte materiale acţionat de un sistem de forţe în echilibru. Dacă (*S*) revine la poziţia iniţială după încetarea acţiunii unei mici perturbaţii, se spune că (*S*) este într-o poziţie de *echilibru stabil*. În caz contrar, dacă el nu mai revine la poziţia iniţială şi continuă să se mişte indefinit, pînă cînd eventual ajunge în altă poziţie, (*S*) este într-o poziţie de *echilibru instabil* (sau labil). (*S*) se află într-o poziţie de *echilibru indiferent* dacă, deplasat din această poziţie, nu mai revine la ea, dar nici nu se depărtează din noua poziţie. *(Şt.G.)*

echivalenţă [lat. *aequus* „egal", *valens-tis* „valoare, putere"] ($p = q$, $p \longleftrightarrow q$, $p \sim q$, Epq), propoziţia „p dacă şi numai dacă q", adevărată cînd p, q sînt simultan false sau adevărate şi falsă în rest. Tabelul de valori logice ale echivalenţei este:

$v(p)$	$v(q)$	$v(p = q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

unde $v(p)$ este valoarea logică a propoziţiei p. *(A.B.)*

ecliptică [gr. *ekleiptikos* „relativ la eclipsă"], cercul după care planul orbitei Pămîntului intersectează sfera cerească. Unghiul dintre planul eclip-

ticei și planul ecuatorului este de c. 27°27′ (oblicitatea eclipticei) și variază lent. *(Șt.G.)*

ecuator [lat. *aequator* „care împarte egal"], unul dintre cercurile mari ale unei sfere. *(V.B.)*

ecuația căldurii → **ecuații cu derivate parțiale**

ecuația coardei → **ecuații cu derivate parțiale**

ecuația fundamentală a dinamicii, ecuația $m\mathbf{a} = \mathbf{F}$, valabilă în cazul mișcării punctului material *P*, de masă *m*, supus forței **F**, unde **a** este accelerația lui *P*. Ecuația fundamentală a dinamicii este invariantă față de grupul de transformări al lui Galilei. **F** depinde de poziția lui *P* și de viteza sa. *(Șt.G.)*

ecuația lui Kepler (în cazul mișcării unui punct material pe o traiectorie eliptică), ecuație care leagă anomalia excentrică *u* (în funcție de care ecuațiile parametrice ale elipsei se scriu $x = a \cos u$, $y = b \sin u$), excentricitatea elipsei *e*, perioada de revoluție *T*, momentul considerat *t*, și momentul inițial τ, cînd $u = 0$: $u - e \sin u = 2\pi (t - \tau)/T$. *(Șt.G.)*

ecuația lui Laplace → **laplacian**

ecuația unei curbe → **curbă, curbă plană**

ecuația unei suprafețe → **suprafață**

ecuație [lat. *aequatio* „egalare"], egalitate între două expresii, conținînd elemente de aceeași natură (numere, funcții, vectori etc.), dintre care unele sînt cunoscute iar altele necunoscute, adevărată numai atunci cînd elementele necunoscute sînt înlocuite cu anumite elemente, numite *soluții*. Termenul a fost folosit inițial de către L. Fibonacci (*Liber abaci*, 1202). *(V.B.)*

ecuație algebrică, ecuație care poate fi adusă la forma $P = 0$, unde *P* este un polinom cu una sau mai multe nedeterminate, care sînt necunoscutele ecuației. Gradul polinomului se numește *gradul ecuației*. O soluție a unei ecuații algebrice se mai numește *rădăcină*. Ecuațiile algebrice au apărut la egipteni (așa cum atestă Papirusul lui Ahmes) cu 2000 de ani î.e.n. Babilonienii, deși nu foloseau simboluri algebrice, rezolvau totuși probleme algebrice prin procedeul introducerii unei necunoscute ajutătoare. Al-Horezmi (sec. 9) a făcut o clasificare a ecuațiilor și le-a rezolvat folosind *al-djebr* și *al-mukabala* (procedee corespunzătoare trecerii termenilor dintr-o parte în alta și reducerii termenilor asemenea). N. Abel a demonstrat (1824, 1826) imposibilitatea rezolvării, în general, cu ajutorul radicalilor a ecuațiilor de grad mai mare decît patru. De rezolvarea ecuațiilor algebrice cu o necunoscută, de grad superior, s-au ocupat: F. Viète (care a stabilit relațiile între rădăcini și coeficienți), M. Rolle (care a dat metoda de separare a rădăcinilor reale), J. Ch. Sturm (al cărui șir dă indicație asupra naturii rădăcinilor unei ecuații), R. Descartes (care a dat regula pentru stabilirea numărului rădăcinilor pozitive ale unei ecuații), I. Newton (care a stabilit metoda pentru aproximarea valorilor rădăcinilor reale), E. Galois (care a rezolvat ecuațiile algebrice prin operații raționale și printr-un număr finit de extrageri de rădăcină) ș.a. — *Teorema fundamentală a algebrei*: o ecuație algebrică de gradul *n*, cu o necunoscută, avînd coeficienți reali sau complecși, are cel puțin o rădăcină reală sau complexă. Cu ajutorul acestei teoreme se stabilește că o astfel de ecuație are exact *n* rădăcini reale sau complexe. Teorema a fost enunțată în această formă de L. Euler (1743), iar prima demonstrație riguroasă a fost dată de K. Gauss (1797). — *Ecuația de gradul doi*, ecuație de forma: $ax^2 +$

$+ bx + c = 0$. Rădăcinile ei sînt date de formula:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Formula rezolvării ecuației de gradul doi a fost dată, în forma actuală, de M. Stiefel (1544) și își are originea în lucrările lui Brahmagupta (sec. 7) și Sriddhara (sec. 11). — *Ecuația de gradul trei*, ecuație de forma: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$. Poate fi adusă la forma: $x^3 + px + q = 0$, rădăcinile ei fiind date de formulele:

$$y_1 = u + v$$
$$y_2 = \alpha u + \alpha^2 v$$
$$y_3 = \alpha^2 u + \alpha v,$$

unde

$$u = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

$$v = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

și $\alpha = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (rădăcină cubică a unității). Aceste formule au fost descoperite independent de Scipio del Ferro (c. 1510) și N. Tartaglia (c. 1530) și poartă în mod eronat numele lui G. Cardan, care le-a publicat în lucrarea sa *Ars Magna* (1545) ca pe o descoperire proprie. Pentru ecuația de gradul patru, o formulă de rezolvare a fost dată de L. Ferrari (c. 1550). — *Ecuația binomă*, ecuație de forma $x^n - a = 0$. Rezolvarea acestei ecuații este echivalentă (conform ideii lui K. Gauss, 1801) cu determinarea rădăcinilor de ordinul n ale lui a (în complex):

$$x = \sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\theta + 2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta + 2k\pi}{n}\right),$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n - 1$, iar $a = \varrho(\cos\theta + i\sin\theta)$. —*Ecuație reciprocă*, ecuație care, dacă admite rădăcina x_0, admite și rădăcina $\frac{1}{x_0}$. Ecuația reciprocă are coeficienții termenilor extremi și egal depărtați de extremi, egali sau opuși. Ex.: ecuațiile: $4x^3 + 5x^2 + 5x + 4 = 0$, $3x^4 - 2x^3 + 2x - 3 = 0$. Denumirea a fost propusă de L. Euler (1738). — *Ecuație trinomă*, ecuație de forma: $ax^m + bx^n + c = 0$. În particular, dacă $m = 2n$ se obține ecuația: $ax^{2n} + bx^n + c = 0$, care prin substituția $y = x^n$ se reduce la rezolvarea unei ecuații de gradul doi și a două ecuații binome. Dacă $n = 2$ ecuația se numește *bipătrată*. *(V.B.)*

ecuație diferențială, ecuație de forma $F(x, y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0$, conținînd variabila independentă x, o funcție $y(x)$ necunoscută și derivatele ei, $y', y'', \ldots, y^{(n)}$, pînă la ordinul n inclusiv (numit ordinul ecuației diferențiale). O funcție $y(x, C_1, C_2, \ldots, C_n)$, unde $C_1, C_2, \ldots, C_n$ sînt constante independente care verifică ecuația diferențială, se numește *soluție generală*, iar o soluție obținută prin particularizarea constantelor $C_1, C_2, \ldots, C_n$, se numește *soluție particulară*. Primele ecuații diferențiale au fost considerate de I. Newton (1687) și G. Leibniz (1693). Teoria ecuațiilor diferențiale a fost dezvoltată ulterior de către Jacques Bernoulli, Jean Bernoulli, L. Euler. Pentru ecuația diferențială de ordinul întîi: $y' = f(x, y)$, A. Cauchy (1821) a dat o teoremă de existență a soluției, iar o metodă de construire efectivă a soluției, prin metoda aproximațiilor

succesive, a fost dată de E. Picard. Denumirea a fost propusă de G. Leibniz (1676). — *Ecuaţie diferenţială cu variabile separabile*, ecuaţie de forma: $\frac{dy}{dx} = A(x)B(y)$. — *Ecuaţie diferenţială liniară*, ecuaţie de forma: $y^{(n)} + a_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1}(x)y' + a_n(x)\, y = f(x)$. Dacă $f(x) = 0$, ecuaţia se numeşte *omogenă*, iar dacă $a_1(x), a_2(x), \ldots, a_n(x)$ sînt constante, ecuaţia se numeşte cu coeficienţi constanţi. Soluţia generală a ecuaţiei diferenţiale liniare este suma dintre soluţia generală a ecuaţiei omogene corespunzătoare şi o soluţie particulară. Pentru ecuaţia liniară de ordinul întîi $y' + p(x)y + q(x) = 0$, soluţia generală este de forma $y = e^{-\int p(x)\,dx}\,[C - \int q(x)\, e^{\int p(x)\,dx} dx]$, unde C este o constantă. — *Ecuaţia lui Bernoulli*, ecuaţie de forma: $y' + P(x)\, y + Q(x)\, y^n = 0$. Ecuaţia se reduce la o ecuaţie liniară (în $z(x)$) cu $y = x^{\frac{1}{1-n}}$. — *Ecuaţie diferenţială exactă*, ecuaţie de forma: $P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0$, unde $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$. — *Ecuaţia lui Riccati*, ecuaţie de forma: $y' + P(x)\, y + Q(x)\, y^2 + R(x) = 0$. — *Ecuaţia lui Bessel*, ecuaţie de forma: $x^2y'' + xy' + (x^2 - n^2)\, y = 0$. *(V.B.)*

ecuaţie diofantică [după numele lui *Diofant*], ecuaţie algebrică cu coeficienţi întregi, pentru care se caută numai rădăcini întregi. Dintre ecuaţiile diofantice un rol deosebit îl joacă ecuaţia:

$$x^n + y^n = z^n,$$

despre care P. Fermat afirmă că nu are rădăcini întregi pentru $n \geqslant 3$ (marea teoremă a lui Fermat, 1637). Această teoremă a rămas pînă astăzi nedemonstrată. *(V.B.)*

ecuaţie exponenţială, ecuaţie care conţine necunoscuta la exponent. Ex.: $x^x = 5$, $2^{x^2-4x+3} = 1$. *(V.B.)*

ecuaţie funcţională, ecuaţie în care necunoscuta este o funcţie. Ex.: ecuaţiile diferenţiale, ecuaţiile cu derivate parţiale, ecuaţiile integrale. Printre iniţiatorii teoriei ecuaţiilor funcţionale se numără P. Laplace şi G. Monge (1773), J. Lagrange (1775), precum şi A. Cauchy (1821). *(V.B.)*

ecuaţie integrală, ecuaţie funcţională de forma:

$$p(x)\; u(x) + \int_a^b k(x,\, t)\; u(t)\; dt = f(x),\; (a \leqslant x \leqslant b),$$

unde funcţia necunoscută este $u(x)$, iar funcţia $k(x, t)$ se numeşte *nucleu*. Prima ecuaţie integrală a fost considerată de N. Abel (1828), iar teoria acestora a fost dezvoltată de V. Volterra (1896) şi E. Fredholm (1900—1902). Matematicianul român T. Lalescu a scris prima monografie din lume cu acest subiect (*Introduction à la théorie des équations intégrales*, 1912). *(V.B.)*

ecuaţie iraţională, ecuaţie care conţine necunoscuta sub radicali. Ex.: $\sqrt{x^2 + 1} = x - 1$. *(V.B.)*

ecuaţie logaritmică, ecuaţie în care necunoscuta apare sub un logaritm sau ca bază a unui logaritm. Ex.: $\log x^2 - \log(x + 10) = 1$; $\log_x 10 + 2 \log_{10x} 10 + 3 \log_{100x} 10 = 0$. *(V.B.)*

ecuaţie transcendentă, ecuaţie care nu este algebrică. Ex.: $x - \sin x = 0$, $x^2 + 1 - e^x = 0$. *(V.B.)*

ecuaţie trigonometrică, ecuaţie la care necunoscuta apare în argumentul unor funcţii trigonometrice. — *Ecuaţie trigonometrică liniară*, ecuaţie de

forma: $a \sin x + b \cos x + c = 0$. Se reduce la o ecuație algebrică folosind formulele:

$$\sin x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}$$

și notînd $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$. *(V.B.)*

ecuație cu derivate parțiale, ecuație de forma:

$$F\left(x_1, x_2, \ldots, x_n, u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}, \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^n u}{\partial x_1 \partial x_2 \ldots \partial x_n}, \ldots\right) = 0,$$

care conține n variabile independente, funcția necunoscută $u(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ și derivatele parțiale ale acesteia pînă la ordinul n inclusiv (numit ordinul ecuației diferențiale). Ecuațiile cu derivate parțiale au apărut ca urmare a necesității de a rezolva unele probleme de geometrie, mecanică (problema coardei vibrante, problema vibrațiilor unor plăci etc.), hidrodinamică, electromagnetism etc. Primele ecuații cu derivate parțiale au fost considerate de L. Euler (1734), la studiul lor contribuind J. D'Alembert, P. Laplace, J. Lagrange, G. Monge, A. Cauchy, G. Riemann, J. Hadamard ș.a. — *Ecuația coardei*, ecuație de forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x, t),$$

unde funcția necunoscută u depinde de variabilele x, t. — *Ecuația căldurii*, ecuație de forma:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \frac{\partial u}{\partial t} = 0,$$

unde funcția necunoscută u depinde de variabilele x, y, t. A fost studiată inițial de J. Fourier (1822). *(V.B.)*

ecuații echivalente, ecuații care au aceleași rădăcini. *(V.B.)*

egalitate [lat. *aequalitas-tatis*] (=), relație binară, definită pentru elementele unei mulțimi, reflexivă, simetrică și tranzitivă. Este o relație de echivalență. Simbolul a fost propus de R. Recorde *(The Whetstone of Witte*, 1556*)*. *(V.B.)*

elasticitate, proprietate a unui corp potrivit căreia, dacă acțiunea forțelor exterioare aplicate asupra sa încetează, corpul revine, aproape spontan, la volumul, forma și repartiția maselor sale, pe care le-a avut înainte de începerea acțiunii forțelor. Este dependentă și de intensitatea forțelor exterioare; dacă ele depășesc o anumită limită, deformațiile suferite de corp nu mai sînt reversibile. Corpul care se deformează ireversibil chiar pentru forțe relativ mici se numește *corp plastic*. Unele corpuri se manifestă ca un solid elastic cînd forțele exterioare se aplică brusc, și au o comportare cu totul diferită cînd forțele exterioare au o intensitate mică, dar se aplică pe o perioadă de timp foarte îndelungat. *(Șt.G.)*

element de arc (pentru o curbă), partea principală ds a distanței dintre două puncte vecine pe o curbă; este dată de expresia:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

unde $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, sînt ecuațiile parametrice ale curbei. *(N.M.)*

element de arie (pentru o suprafață), aria unui domeniu elementar pe suprafață; este dată de expresia:

$$d\sigma = \sqrt{EG - F^2}\, du dv,$$

unde E, F, G sînt coeficienții primei forme fundamentale a suprafeței dată prin ecuații parametrice $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$. *(N.M.)*

elemente de la infinit, punctul de la infinit al unei drepte, dreapta de la infinit a unui plan, planul de la infinit. Se folosesc în geometria proiectivă. Noțiunile au fost introduse de G. Desargues (1639) și amplu utilizate de J. Poncelet (1822). *(V.B.)*

elemente imaginare, punct cu coordonate numere complexe, sau curbă a cărei ecuație conține și coeficienți numere complexe. Prin utilizarea elementelor imaginare se realizează o uniformitate a interpretării calculului algebric. — *Puncte ciclice*, punctele în care orice cerc din plan taie dreapta de la infinit. Punctele ciclice au coordonatele omogene: $I(1, i, 0)$ și $J(1, -i, 0)$ (J. Poncelet, 1822). — *Dreaptă izotropă*, dreaptă care trece printr-un punct ciclic. Dreptele izotrope au coeficientul unghiular $\pm i$. *(N.M.)*

Elementele, operă matematică a lui Euclid (sec. 3 î.e.n.) al cărei conținut e redat în 13 capitole (denumite „cărți"). *Cartea I*, despre punct, linie, triunghi, perpendiculare, paralele, paralelograme, arii, demonstrația teoremei lui Pitagora și a reciprocei ei. În această parte sînt cuprinse, de asemenea, cele 5 postulate și 9 axiome, pe care Euclid, le-a pus la baza lucrării sale. *Cartea II*, despre algebra geometrică a grecilor; *Cartea III*, despre cerc; *Cartea IV*, despre figuri înscrise și circumscrise cercului; *Cartea V*, despre teoria rapoartelor și proporțiilor; *Cartea VI*, despre aplicarea teoriei proporțiilor la planimetrie; *Cartea VII*, despre numere, divizibilitate ș.a.; *Cartea VIII*, despre progresii geometrice; *Cartea IX*, despre teoria numerelor; *Cartea X*, despre iraționalitate; *Cartea XI*, despre drepte și plane perpendiculare și paralele, despre unghiuri formate de drepte și plane, precum și despre paralelipiped și prismă; *Cartea XII*, privind metoda exhaustiei pentru determinarea volumelor; *Cartea XIII*, despre cele cinci poliedre regulate și construcția sferei circumscrise. Reprezintă prima expunere sistematică a geometriei și constituie totodată prima dezvoltare axiomatică a unei discipline științifice (cu toate că, unele definiții nu au legătură cu deducțiile care se fac asupra obiectului acestor definiții, de exemplu, definiția dreptei; unele demonstrații nu sînt suficient de riguroase, de exemplu, demonstrația prin suprapunere; apar adesea și considerații intuitive). A constituit timp de mai multe secole singura carte după care s-a predat sistematic matematica (a fost tradusă în 300 de limbi, în numeroase ediții, ceea ce a făcut să dețină recordul ca cea mai citită carte științifică din lume). Prima traducere românească, completă, a *Elementelor* a fost realizată de V. Marian (1939—1941). *(V.B.)*

element neutru [lat. *elementum* „obiect alcătuitor", *neuter* „indiferent"] (față de o lege de compoziție $f: A \times A \to A$; e), element care, compus cu oricare element $x \in A$, îl lasă neschimbat:

$$x \circ e = e \circ x = x,$$

unde s-a notat $f(a, b) = a \circ b$. Ex.: în mulțimea numerelor reale 0 este element neutru pentru adunare și 1 element neutru pentru înmulțire; matrice $I = \|a_{ij}\|$ cu $a_{ij} = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$ și $a_{ii} = 1$, $i = 1$,

2, ..., n este element neutru față de înmulțirea matricilor pătratice de ordinul n; în mulțimea părților unei mulțimi E, mulțimea vidă $\varnothing$, este element neutru față de reuniune, iar mulțimea de referință E, față de intersecție. *(V.B., A.B.)*

element simetric [gr. *syn* „împreună", *metron* „valoare"] (al unui element $x \in A$ față de o lege de compoziție $f: A \times A \to A$; x', $-x$, x^{-1}), element, $x' \in A$ astfel încît:

$$x \circ x' = x' \circ x = e,$$

unde e este elementul neutru și s-a notat $f(a, b) = a \circ b$. Pentru o lege de compoziție notată aditiv, elementul simetric lui x se notează $-x$, iar pentru o lege de compoziție notată multiplicativ cu x^{-1}. *(V.B.)*

elice [gr. *helix* „spirală"], curbă strîmbă ale cărei tangente fac un unghi constant cu o direcție dată. — *Elice circulară*, curbă descrisă de un punct supus unei rotații în jurul unei axe Oz și unei translații paralele cu Oz, proporțională cu unghiul de rotație. Elicea circulară este trasată pe un cilindru de axă Oz (fig. 62). Ecuațiile parametrice ale elicei circulare sînt:

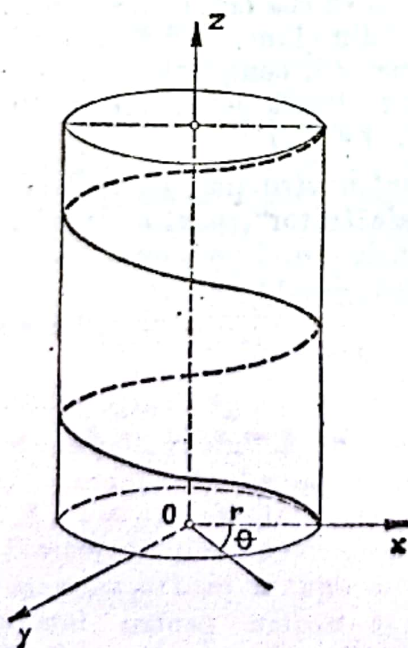


Fig. 62

$$x = R \cos t,\ y = R \sin t,\ z = kt,$$

unde R este raza cilindrului, t unghiul de rotație, k o constantă. Lungimea arcului de elice este: $L = tR^2 + k^2$. Elicea circulară era cunoscută de Apollonius (sec. 3 î.e.n.). Denumirea a fost dată de Guidubaldo del Monte (1615). Elicea cilindrică este utilizată, în special, la șuruburi. În natură, așa-numitele plante volubile iau forma unei elice. *(V.B.)*

elicoid [gr. *helix* „spirală", *eidos* „aspect"], suprafață generată de o curbă ale cărei puncte descriu elice circulare de aceeași axă. Cu studiul elicoidelor s-a ocupat îndeosebi P. Guldin și L. Euler. Scările elicoidale sînt exemple de astfel de suprafețe. *(V.B.)*

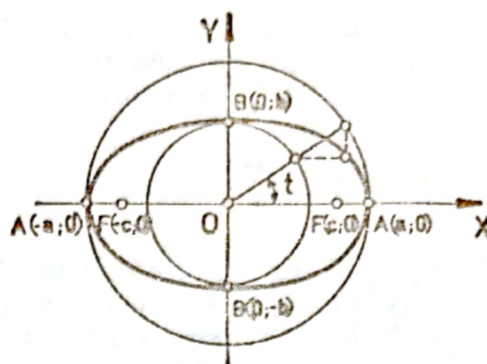


Fig. 63

elipsă [gr. *elleipsis* „lipsă"], curbă obținută prin secționarea unui con circular cu un plan care taie toate generatoarele unei pînze. Este locul geometric al punctelor pentru care suma distanțelor la două puncte fixe (numite focare) este constantă (fig. 63). Elipsa admite două axe de simetrie perpendiculare. Față de reperul cartezian ortogonal format de axele ei de simetrie, ecuația elipsei are forma:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0,$$

(G. Lamé, 1818).

Punctele $A(a,0)$, $A(-a,0)$ și $B(0,b)$, $B'(0,-b)$, unde axele intersectează elipsa, se numesc vîrfuri; focarele F, F' situate pe axa mare a elipsei au abscisele c, respeciv $-c$, astfel ca: $c=\sqrt{a^2-b^2}$. Ecuațiile parametrice ale elipsei sînt:

$$x=a\cos t,\ y=b\sin t,$$

unde t este unghiul făcut cu direcția pozitivă a axei Ox de raza vectoare a punctului de pe elipsă. Față de un reper polar avînd axa mare ca axă polară și unul din focare ca pol, ecuația elipsei are forma:

$$r=\frac{p}{1+e\cos\theta},$$

(S. Lacroix, 1798),

unde $p=\frac{b^2}{a}$ (parametrul elipsei), iar $e=\frac{c}{a}<1$ (excentricitatea elipsei).

Aria domeniului plan mărginit de elipsă este: $A=\pi ab$. Desenarea elipsei cu ajutorul unui fir de lungime constantă, avînd capetele fixate în focare, este cunoscută de Anthemios (sec. 6). Pentru desenarea elipsei se pot folosi instrumente speciale (elipsografe). A fost descoperită de Menechmus (sec. 4 î.e.n.), iar denumirea a fost propusă de Apollonius (→ *aplicarea ariilor*). J. Kepler (în 1620) a enunțat legea conform căreia traiectoria unei planete este o elipsă, avînd Soarele într-unul din focare. — *Elipsa sferică*, locul geometric al punctelor unei sfere, astfel încît suma distanțelor sferice la două puncte fixe ale sferei să fie constantă. — *Elipse omofocale*, familie de elipse care au aceleași focare. Ecuația carteziană a familiei de elipse omofocale este:

$$\frac{x^2}{c^2+\lambda}+\frac{y^2}{\lambda}-1=0.\ (V.B.)$$

elipsele lui Steiner, cele două elipse, una circumscrisă și alta înscrisă într-un triunghi, avînd centrul în centrul de greutate al triunghiului. *(V.B.)*

elipsograf [*elipsă*, gr. *graphein* „a scrie"], instrument care servește la desenarea elipselor, format dintr-o bară rigidă AB, articulată la extremitățile sale cu două cursoare, care alunecă în două glisiere rectangulare Ox, Oy și la care se fixează într-un punct C un vîrf ce lasă urme (fig. 64). Elipsograful, pe lîngă alte instrumente de desenare a conicelor, este cunoscut încă din antichitate; forma lui actuală se datorează lui Leonardo da Vinci. *(V.B.)*

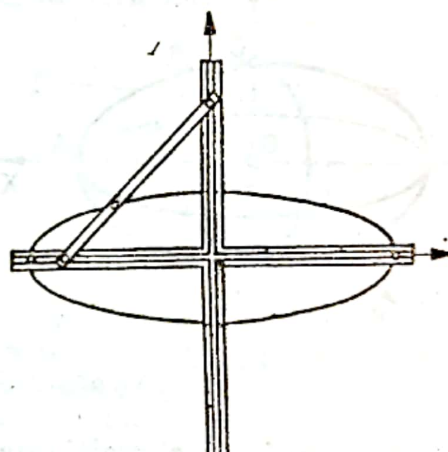


Fig. 64

elipsoid [*elipsă*, gr. *eidos* „aspect, formă"], suprafață generată de elipse mobile, omotetice, cu centrele pe o dreaptă d, perpendiculară pe planele lor și care se sprijină pe o elipsă ce are una dintre axe situată pe această dreaptă d (fig. 65). Este o cuadrică cu un centru de simetrie și trei plane de simetrie, perpendiculare două cîte două și care se intersectează după trei axe de simetrie. Secțiunile

plane prin elipsoid sînt elipse. Raportat la reperul cartezian ortogonal format de axele sale de simetrie, elipsoidul are ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}-1=0,\ a \geqslant b \geqslant c.$$

Dacă $b = c$, elipsoidul este o suprafaţă de rotaţie generată prin rotaţia în jurul axei Ox a elipsei din planul xOy. Dacă $a = b = c$, elipsoidul devine o sferă. Elipsoidul de rotaţie a fost cunoscut de Arhimede (sec. 3 î.e.n.) care i-a determinat volumul. Volumul domeniului mărginit de un elipsoid este dat de formula:

$$V=\frac{4}{3}\pi\, abc.$$

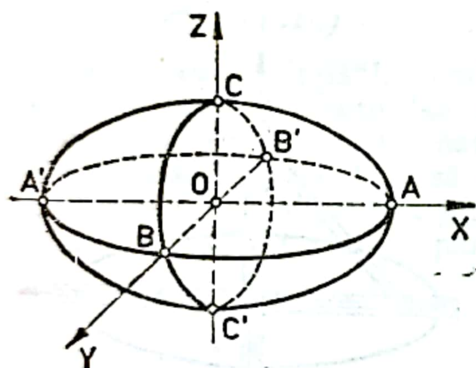


Fig. 65

— *Elipsoizi omofocali*, elipsoizi care au aceleaşi focare, daţi de ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2+\lambda}+\frac{y^2}{b^2+\lambda}+\frac{z^2}{c^2+\lambda}-1=0.$$

Elipsoizii omofocali au fost puşi în evidenţă, pentru prima dată, de P. Laplace (1798). *(V.B.)*

elipsoid de inerţie → moment de inerţie

elongaţie → oscilaţie

emisferă [gr. *hemi* „jumătate", *sphaira* „sferă"], jumătatea unei sfere. Denumirea apare la Aristotel (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

Emmanuel, David (1854—1941), matematician român. Studii la Paris (doctor la Sorbona, 1879). Profesor la Şcoala de poduri şi şosele (din 1881) şi la Universitatea din Bucureşti (din 1882). Membru de onoare al Academiei Române (din 1936). Activitatea sa a pregătit formarea şcolii matematice româneşti, printre elevii săi numărîndu-se Gh. Ţiţeica şi T. Lalescu. Contribuţii la teoria integralelor abeliene de speţa a treia. Op. pr.: *Lecţiuni de teoria funcţiilor* (partea I, 1924; partea II-a, 1927). *(V.B.)*

endomorfism [gr. *endon* „înăuntru" *morphe* „formă"] → **omomorfism**

energie [gr. *energeia* „activitate"], măsura generală a formelor de mişcare a materiei, exprimînd capacitatea unui sistem de a efectua lucru mecanic cînd suferă o transformare dintr-o stare în alta. Ori de cîte ori dispare o anumită cantitate de mişcare, apare o cantitate echivalentă de mişcare sub o altă formă, ceea ce dovedeşte unitatea şi indestructibilitatea mişcării materiei. Energia are ecuaţia dimensională ML^2T^{-2} şi se măsoară în ergi, în sistemul CGS, în jouli, în sistemul MKS, în calorii, în kilogrammetri (kgm), în kilowatt-oră (kWh). *(Şt.G.)*

energie cinetică (E, T, W_c), energia unui sistem de puncte materiale, în care intervin numai mărimile ce caracterizează starea lor de mişcare. Energia cinetică a unui punct material se defineşte ca jumătatea produsului masei acestuia cu pătratul vitezei sale, $mv^2/2$. Pentru un sistem de puncte materiale, energia cinetică este egală cu suma energiilor cinetice ale punctelor materiale care alcătuiesc sistemul. Pentru un solid rigid care se roteşte în jurul unui ax, energia

cinetică este egală cu $\frac{1}{2} I\omega^2$, unde I este momentul de inerţie în raport cu axa de rotaţie, iar ω viteza unghiulară a solidului. Această noţiune a apărut în legătură cu problema măsurii mişcării mecanice. Pentru un punct material, după R. Descartes, această măsură era produsul dintre masă şi mărimea vitezei, mv, iar după G. Leibniz ea era reprezentată de mv^2, denumită „forţă vie". *(Şt.G.)*

energie informaţională, valoarea medie a probabilităţilor $p_k (k = 1, 2, ..., n)$ de realizare a evenimentelor aleatoare elementare $a_k (k = 1, 2, ..., n)$, rezultate în urma unui experiment A:

$$S(A) = \sum_{k=1}^{n} p_k^2.$$

Noţiunea a fost introdusă de O. Onicescu (1966) şi reprezintă analogul noţiunii de energie cinetică a unui sistem fizic (introdusă de Th. Young, 1807). Energia informaţională, pe lîngă faptul că constituie o caracteristică globală a unui experiment, prezintă avantajul de a se calcula mai repede decît entropia informaţională a evenimentului respectiv. Recent, aceşti parametri informaţionali şi-au găsit o amplă utilizare în lingvistica matematică. *(V.B.)*

energie mecanică (totală; W, E), suma dintre energia cinetică şi energia potenţială a unui sistem de puncte materiale. *(Şt.G.)*

energie potenţială (V, W_p), energia pe care o are un sistem de puncte materiale, datorită poziţiei punctelor sale faţă de o configuraţie de referinţă. Energia potenţială a unui punct material asupra căruia acţionează o forţă conservativă definită prin funcţia de forţă U este lucrul mecanic al forţei între două puncte M_0 şi M, luat cu semn schimbat: $V = U(M_0) - U(M)$. Pentru un sistem de puncte materiale, energia potenţială este suma energiilor potenţiale ale tuturor punctelor sistemului $\sum_1^n V_j$. Energia potenţială este minimă pentru o poziţie de echilibru stabil. Se mai numeşte *energie de poziţie*. *(Şt.G.)*

entropie [gr. *en* „în", *trope* „orientare, schimbare de sens"], măsura gradului de nedeterminare a unui experiment A ale cărui rezultate pun în evidenţă un sistem finit de n evenimente aleatoare elementare $a_k (k = 1, 2, ..., n)$ avînd probabilităţile p_k

$$\left(p_k \geqslant 0, \sum_{k=1}^{n} p_k = 1\right),$$

dată de formula:

$$H = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k =$$

$$= -\log_2 10 \sum_{k=1}^{n} p_k \log_{10} p_k.$$

În cazul unei distribuţii continue, caracterizată prin densitatea de probabilitate $\varphi(x)$, entropia se defineşte prin relaţia:

$$H = -\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x) \log \varphi(x)\, dx.$$

Entropia H este o funcţie continuă, nenegativă, de argumente p_k; se anulează cînd se obţine un rezultat sigur şi este maximă cînd evenimentele sînt echiprobabile $\left(\text{cînd există o repartiţie uniformă: } p_k = \frac{1}{n},\ k = 1, 2, ..., n\right)$. Deoarece informaţia

înlocuieşte o nedeterminare, măsura nedeterminării, exprimată cu ajutorul entropiei, se ia ca măsură a cantităţii de informaţie (care înlătură nedeterminarea respectivă). Denumirea şi noţiunea au fost introduse de R. Clausius (1859), cu ocazia formulării matematice a celui de al doilea principiu al termodinamicii. De asemenea, L. Boltzmann (1877) a stabilit pentru entropia unui sistem fizic o formulă, aceeaşi cu cea la care a ajuns şi C.E. Shannon (*A mathematical theory of communication*, 1948) pentru măsura cantităţii de informaţie pe care o conţine un mesaj. Litera H, folosită pentru notaţia entropiei informaţionale (datorată tot lui C.E. Shannon), este iniţiala numelui lui R.H. Hartley (*Transmission of information*, 1928), care a făcut primele încercări de a introduce o măsură a gradului de nedeterminare a unui experiment cu n rezultate echiprobabile (entropia de ordin zero):

$$I = \log_2 n = -\log_2 p, \text{ cu } p = \frac{1}{n},$$

ceea ce coincide cu măsura lui C.E. Shannon (entropia de ordinul întîi) numai pentru schemele de maximă nedeterminare (în care evenimentele au probabilităţi egale, p). Noţiunea de entropie în teoria probabilităţilor are o semnificaţie teoretică generală, cu aplicaţii în termodinamica statistică, în teoria comunicaţiilor şi în alte domenii. *(V.B.)*

epicicloidă [gr. *epi* „pe", *kyklos* „cerc", *eidos* „înfăţişare"], curbă plană descrisă de un punct al circumferinţei unui cerc, care se rostogoleşte fără alunecare pe un cerc fix, cele două cercuri fiind tangente exterior. Notînd cu r_0 raza cercului fix şi cu r raza cercului mobil, curba se închide, fiind algebrică şi unicursală, dacă $\frac{r_0}{r}$ este un număr raţional: cînd acest raport nu este raţional, curba este transcendentă. Ecuaţiile parametrice ale epicicloidei sînt:

$$x = (r_0 + r) \cos t - r \cos \frac{r_0 + r}{r} t$$

$$y = (r_0 + r) \sin t - r \sin \frac{r_0 + r}{r} t,$$

unde t este unghiul format de raza mobilă a cercului fix ce trece prin punctul de tangenţă cu Ox. Aria unui domeniu plan, mărginit de un arc de epicicloidă, cuprins între punctele de înapoiere, şi de razele cercului fix, duse prin extremităţile arcului, este:

$$A = \frac{2(r_0 + r)(r_0 + 2r)}{r_0}.$$

Lungimea unui arc se determină prin relaţia:

$$L = 8r\left(1 + \frac{r}{r_0}\right).$$

După relaţia între r_0 şi r, se obţin epicicloidele particulare şi anume cardioida, cînd $r_0 = r$ sau cicloida lui Huygens, cînd $r_0 = 2r$. Epicicloidele au fost introduse de A. Dürer (1525). *(V.B.)*

epimorfism [gr. *epi* „pe", *morphe* „formă"] → **omomorfism**

eptagon (heptagon) [gr. *hepta* „şapte", *gonia* „unghi"], poligon cu şapte laturi. Denumirea a fost dată de Heron (sec. 1). *(V.B.)*

Eratostene (c. 275—194 î.e.n.), matematician, geograf şi literat grec. Studii la Atena. A fost directorul Bibliotecii din Alexandria. Operele literare ale lui Eratostene s-au pierdut, dar se cunosc lucrările sale de geografie şi istorie. Este considerat întemeietorul geografiei ştiinţifice şi al cronologiei istorice; el a determinat, pentru prima dată în istorie,

raza Pămîntului (evaluare pe care a descris-o în lucrarea *Măsurarea Pămîntului*). Din domeniul matematicii au ajuns pînă la noi două descoperiri: ciurul ce îi poartă numele (procedeu de a găsi toate numerele prime mai mici decît un număr dat) şi soluţionarea mecanică, cu ajutorul unui aparat construit de el (pe care l-a denumit mesalobon), a celebrei probleme a dublării cubului, redată (după afirmaţia lui Pappus, sec. 3) în lucrarea *De locis ad medietates*. Alte opere: *Platonikos*, în care tratează probleme matematice şi principii de muzică, un tratat de geografie, tabele cronologice, o lucrare asupra vechii comedii ateniene etc. *(V.B.)*

etichetă, şir de caractere alcătuit după anumite convenţii ce identifică instrucţiuni într-un program. Se mai numeşte *marcă*. *(T.B.)*

Euclid (sec. 3 î.e.n.), matematician grec. Profesor la şcoala pe care a întemeiat-o în Alexandria. Opera sa, *Elemente*, a fost timp de 2 000 de ani principala carte de unde se putea învăţa geometria. Particularitatea principală a *Elementelor* constă în faptul că ele sînt construite deductiv, după o schemă logică unitară; drumul pentru sinteza lui Euclid a fost pregătit şi de alţi matematicieni ca Hipocrate, Eudoxos, Teetet. S-au mai păstrat două lucrări ale lui Euclid: *Datele*, culegere de texte din primele şase cărţi ale *Elementelor*, şi *Despre împărţirea figurilor*, lucrare consacrată împărţirii figurilor geometrice în alte figuri. Comentatorii operei lui Euclid (Pappus, sec. 3 şi Proclus, sec. 5) amintesc şi de alte lucrări (pierdute) ale lui Euclid: *Interferenţe false*, *Porismele*, *Secţiuni conice*, *Locuri pe suprafaţă*, *Fenomenele* (astronomice), *Sferica* şi *Optica*. *(V.B.)*

Euler [ǫilər], **Leonhard** (1707—1783), matematician, mecanician şi astronom elveţian. La vîrsta de 13 ani este student al Universităţii din Basel, unde îl are ca profesor pe Jean Bernoulli. Membru al Academiilor de Ştiinţe din Petersburg şi Berlin. Opera sa vastă, cuprinsă în aproape 1 200 de memorii, conţine cercetări în aproape toate ramurile matematicii, numeroase teoreme, formule şi noţiuni fiind legate de numele său. În algebră, a definit logaritmul unui număr prin considerarea operaţiei inverse ridicării la putere, a introdus ecuaţiile reciproce, a studiat problema rezolvabilităţii prin radicali a ecuaţiilor algebrice de grad mai mare ca patru, a creat teoria fracţiilor continue. În teoria numerelor, a dat legea reciprocităţii şi funcţia $\varphi(n)$. În analiza matematică, s-a ocupat cu dezvoltările în serie, a dat metode de integrare, a introdus integrala dublă, a studiat funcţiile de variabilă complexă, a pus bazele calculului variaţional. În teoria ecuaţiilor diferenţiale, a introdus noţiunile de soluţie generală şi particulară. În geometria diferenţială, a introdus ecuaţiile parametrice ale suprafeţelor şi a stabilit formula referitoare la curbura normală a unei curbe pe o suprafaţă. Cercetări importante în mecanică, optică şi astronomie. Op. pr.: *Methodus inveniendi lineas curvas*, 1744; *Introductio in analysin infinitorum*, 1748; *Institutiones calculi diferentialis*, 1755; *Institutiones calculi integralis*, 1768—1770; *Theoria motuum planetarum*, 1744. *(V.B.)*

eveniment aleator [lat. *aleatorius* „întîmplător"], element al unui cîmp de evenimente (algebră Boole de evenimente). În teoria axiomatică a probabilităţilor, evenimentul, ca element al corpului borelian K, este o mulţime de evenimente elementare, evenimentul elementar fiind o noţiune primară. Intuitiv, orice rezultat potenţial al unei experienţe aleatoare a cărui realizare poate fi confirmată sau infirmată de o probă, constituie

un eveniment aleator. Legat de o experiență aleatoare dată, un eveniment aleator se definește printr-o propoziție logică, formulată astfel incit odată experiența consumată, propoziția să se poată dovedi sau adevărată (atunci cînd evenimentul s-a realizat), sau falsă (atunci cînd evenimentul nu s-a realizat). Pe mulțimea evenimentelor aleatoare se pot defini următoarele operații: a) Operația „sau" ($\bigcup$), operație care asociază oricăror două evenimente A și B ale unui același cîmp de evenimente evenimentul „A sau B" $(A \bigcup B)$, care se realizează atunci cînd cel puțin unul dintre cele două evenimente s-a realizat. b) Operația „și" ($\bigcap$), operație care asociază oricăror două evenimente A, B ale unui același cîmp de evenimente, evenimentul „A și B" $(A \bigcap B)$, care se realizează atunci cînd ambele evenimente s-au realizat. — *Eveniment opus* (unui eveniment A; $\bar{A}$, CA), eveniment care se realizează cînd A nu se realizează. — *Eveniment sigur* (Ω), eveniment a cărui realizare, față de orice experiență aleatoare, este confirmată de orice probă. Oricare ar fi evenimentul aleator A, $A \bigcup \bar{A} = \Omega$. — *Eveniment imposibil* ($\varnothing$), eveniment a cărui realizare este infirmată de orice probă. Pentru orice eveniment aleator A, $A \bigcap \bar{A} = \varnothing$. De asemenea, $\bar{\Omega} = \varnothing$. — *Evenimente incompatibile*, evenimente ale unei familii $\{A_i\}_{i \in I}$, astfel încît $A_i \bigcap A_j = \varnothing$, $i \neq j$. — *Evenimente independente*, două evenimente A, B, astfel încît $P(A \bigcap B) = P(A)P(B)$. Dacă evenimentele A, B sînt independente, atunci $P_A(B) = P(B)$, $P_B(A) = P(A)$ (intuitiv, realizarea unuia nu influențează probabilitatea celuilalt). Evenimentele unei familii oarecare $\{A_i\}_{i \in I}$ sînt independente dacă pentru orice număr finit de evenimente ale familiei $A_{i_1}, A_{i_2}, \ldots, A_{i_n}$, are loc egalitatea: $P(A_{i_1} \bigcap A_{i_2} \bigcap \ldots \bigcap A_{i_n}) = P(A_{i_1}) P(A_{i_2}) \ldots P(A_{i_n})$. *(A.Ș.)*

evolută [lat. *evolutus* „desfășurat"], curbă, loc geometric al centrelor de curbură ale unei curbe date (fig. 66). Este înfășurătoarea normalelor unei curbe (normalele fiind tangente evolutei). Ecuația evolutei pentru o curbă $x = x(t)$, $y = y(t)$, se obține eliminînd parametrul t din ecuațiile:

$$X - x = -\frac{y'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}$$

$$Y - y = \frac{x'(x'^2 + y'^2)}{x'y'' - x''y'}.$$

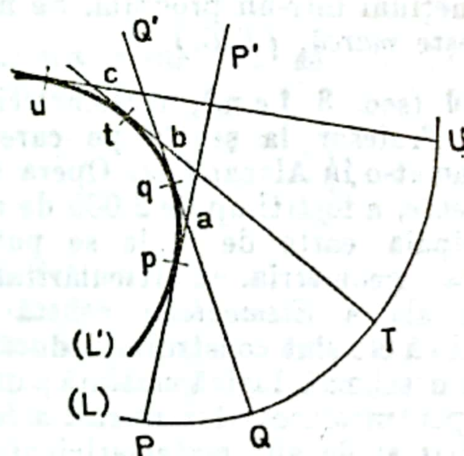


Fig. 66

Ex.: evoluta elipsei $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$ este o astroidă alungită:

$$(ax)^{\frac{2}{3}} + (by)^{\frac{2}{3}} = (a^2 - b^2)^{\frac{2}{3}}.$$

Noțiunea de evolută a fost introdusă de Chr. Huygens (1673). Se mai numește *desfășurată*. *(V.B.)*

evolventă [lat. *evolvere* „a se desfășura"], curbă a cărei evolută este o curbă dată. Este o curbă ortogo-

nală tangentelor curbei date. Ex.: evolventa cercului $\begin{cases} x = r\cos t \\ y = r\sin t \end{cases}$ este curba: $\begin{cases} x = r(\cos t + t\sin t) \\ y = r(\sin t - t\cos t) \end{cases}$. Este utilizată în tehnică la trasarea liniei de profil a flancurilor dinţării (pentru roţile cilindrice dinţate). Noţiunea a fost introdusă de Chr. Huygens (1673). Se mai numeşte *desfăşurătoare*. *(V.B.)*

exaedru (hexaedru) [gr. *hexa* „şase“, *hedra* „faţă, bază“], poliedru cu şase feţe. Exaedrul regulat, numit cub, este unul dintre cele cinci poliedre regulate. Termenul a fost introdus de Pappus (sec. 3). *(V.B.)*

exagon (hexagon) [gr. *hexa* „şase“, *gonia* „unghi“], poligon cu şase laturi. Exagonul regulat are latura egală cu raza cercului circumscris, $l_6 = R$, apotema $a_6 = \frac{R\sqrt{3}}{2}$ şi aria $A_6 = \frac{3}{2} R^2 \sqrt{3}$ (fig. 67). Este amintit încă în papirusurile egiptene şi tăbliţele caldeene. *(V.B.)*

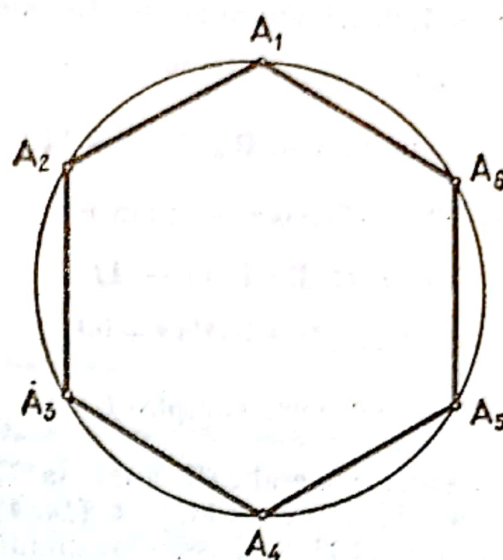


Fig. 67

excentricitate [fr. *excentricité*] *(e)*, raportul constant al distanţelor de la un punct al unei conice la focar şi la directoarea corespunzătoare. O conică este de genul elipsă, hiberbolă sau parabolă după cum excentricitatea este subunitară, supraunitară sau egală cu unu. Excentricitatea se poate calcula cu formula: $e = \frac{c}{a}$, unde $c = \sqrt{a^2 - b^2}$ la elipsă şi $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ la hiperbolă, iar a şi b sînt semiaxele. Noţiunea a fost introdusă de J. Kepler (1609). *(V.B.)*

exces sferic [lat. *excessus* „depăşire“], diferenţa dintre suma unghiurilor unui triunghi sferic şi 180°. *(V.B.)*

experienţă aleatoare, experienţă al cărui rezultat este sub semnul incertitudinii, rezultat ce poate lua forme diferite, dar nu poate fi anticipat. — *Probă*, experienţă (aleatoare) realizată. *(A.Ş.)*

exponent [lat. *exponens-tis* „expus, scos în evidenţă“], număr natural, scris la dreapta şi mai sus faţă de bază, pentru a indica operaţia de ridicare la putere. Regulile de calcul cu exponenţi sînt:

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$$

$$a^m : a^n = a^{m-n} \qquad (m > n)$$

$$(a^m)^n = a^{mn}.$$

Folosirea lor este veche: Diofant (sec. 3) îi scria prin litere (iniţialele puterilor corespunzătoare); calculele cu exponenţi erau cunoscute de matematicienii arabi: Al-Horezmi (sec. 9), Abu-Kamil (sec. 10) ş.a. Denumirea a fost propusă de M. Stiefel (1544). — *Exponent generalizat*, exponent număr real definit prin:

$$a^0 = 1 \qquad (a \neq 0)$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} \qquad (n \in N;\ a \neq 0)$$

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \qquad (m,\ n \in N,\ a > 0)$$

$a^x = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$, unde $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = x$ şi

$r_n (n = 1, 2, \ldots)$ sînt numere raţionale.

$$a^{u+iv} = e^{(u+iv)\ln a}$$

$$(a > 0;\ u, v \in \mathbf{R};\ i^2 = -1)$$

$$e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$$

$$(u, v \in \mathbf{R};\ i^2 = -1)$$

$$z^{u+iv} = e^{(u+iv)(\ln r + i\theta)}$$

$$(z = r \cdot e^{i\theta},\ \text{complex}).$$

Exponenţii generalizaţi apar la N. Oresme (1350), N. Chuquet (1484), J. Wallis (1657) şi s-au răspîndit datorită lui I. Newton (1665) şi G. Leibniz (1683). *(V.B.)*

expresie [lat. *expressio* „exprimare"], ansamblu de elemente (numere, litere etc.) legate între ele prin simboluri ce exprimă operaţii matematice. — *Expresie algebrică*, expresie în care operaţiile sînt: adunarea, scăderea, înmulţirea, împărţirea, ridicarea la putere şi extragerea rădăcinii. *(V.B.)*

extragerea rădăcinii → **radical, rădăcină**

extrapolare [lat. *extra* „afară", *pollere* „a avea putere"], determinare a unei funcţii, de obicei polinom, care să aproximeze, în afara unui interval $[a, b]$, o funcţie $f(x)$ ale cărei valori sînt cunoscute numai în anumite puncte $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ din interiorul intervalului. *(V.B.)*

extrem [lat. *extremus* „care este la margine"] (al unei funcţii f), minim sau maxim al funcţiei f. *(V.B.)*

extremi (într-o proporţie) → **proporţie**

F

factor [lat. *factor* „care face"], fiecare dintre elementele care prin înmulţire formează un produs. — *Factor prim*, fiecare dintre numerele prime (sau polinoamele ireductibile) cu care se divide un număr (sau polinom) dat. Denumirea a fost adoptată în matematică de N. Oresme (c. 1370). *(V.B.)*

factor integrant, funcţie $\varphi(x, y)$, care înmulţind ecuaţia diferenţială $P(x,y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$, o transformă într-o ecuaţie diferenţială exactă. Teoria factorului integrant a fost dezvoltată de L. Euler (1768), deşi ideea folosirii acestuia aparţine lui Jean şi Nicolas Bernoulli (1720). *(V.B.)*

factorial de n (n număr natural; $n!$), produsul primelor n numere naturale:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n.$$

Prin definiţie $0! = 1$ (J. Wallis, 1656). Simbolul $n!$ (care se citeşte n factorial) a fost introdus de C. Kramp (1808). Expresia generalizată a factorialului, ca un produs de forma:

$$P_n(x) = x(x + 1)\,(x + 2) \ldots \ldots (x - n + 1)$$

se întîlneşte la B. Pascal (1654), iar produsele de forma:

$$P_n(x) = x(x + r)\,(x + 2r) \ldots \ldots (x + nr)$$

au fost considerate pentru prima dată de A. Vandermonde (1772). *(V.B.)*

familie de curbe sau suprafeţe, mulţime de curbe sau suprafeţe care depind de mai mulţi parametri reali, Ex.: familia de elipse omofocale, familia de cercuri concentrice de ecuaţie:

$$f(x, y, \lambda) = (x - a)^2 + (y - b)^2 + + \lambda = 0. \quad (V.B.)$$

fascicul de cercuri [lat. *fasciculus* „mănunchi"], mulţimea cercurilor din plan care trec prin punctele de intersecţie a două cercuri distincte (numite cercuri fundamentale) (fig. 68). Faţă de un reper cartezian, fasciculul de cercuri are ecuaţia:

$$C_1 + \lambda C_2 = 0,$$

unde $C_1(x, y) = 0$, $C_2(x, y) = 0$ sînt ecuaţiile cercurilor fundamentale, iar λ este un parametru real. Într-un fascicul de cercuri, oricare două

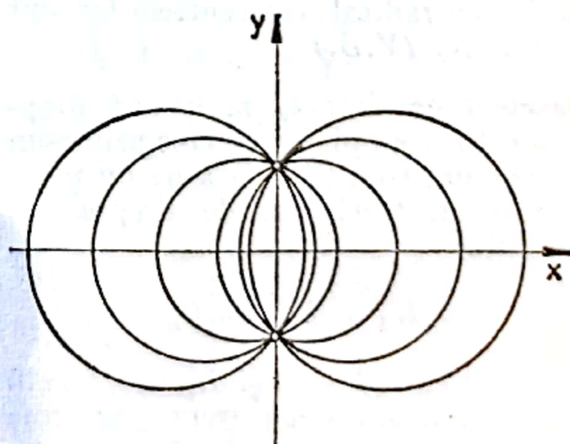


Fig. 68

cercuri au aceeași axă radicală, iar centrele lor sînt coliniare. În raport cu sistemul de axe format din linia centrelor și axa radicală, ecuația fasciculului de cercuri este:

$$x^2 + y^2 - 2\frac{a_1 + \lambda a_2}{1 + \lambda}x + c = 0,$$

(unde a_1, a_2 sînt abscisele centrelor, iar c termenul liber al ecuațiilor celor două cercuri fundamentale). A fost introdus de L. Gaultier (1813). *(V.B.)*

fascicul de conice, mulțimea conicelor dintr-un plan, care trec prin punctele de intersecție a două conice distincte date (numite conice fundamentale). Față de un reper cartezian, fasciculul de conice are ecuația (dată de G. Lamé, 1818)

$$C_1 + \lambda C_2 = 0,$$

unde $C_1(x, y) = 0$ și $C_2(x, y) = 0$ sînt ecuațiile conicelor fundamentale, iar λ este un parametru real. *(V.B.)*

fascicul de cuadrice, mulțimea cuadricelor care conțin curba de intersecție a două cuadrice date (numite cuadrice fundamentale ale fasciculului). În cazul în care cuadricele fundamentale sînt sfere, toate cuadricele fasciculului sînt sfere, care, considerate două cîte două, au același plan radical, iar centrele lor sînt coliniare. *(V.B.)*

fascicul de drepte, mulțimea dreptelor dintr-un plan care trec printr-un punct dat (fig. 69). Față de un reper cartezian, fasciculul de drepte are ecuația:

$$D_1 + \lambda D_2 = 0,$$

unde $D_1(x, y) = 0$ și $D_2(x, y) = 0$ sînt ecuațiile a două drepte care trec prin punctul dat, iar λ este un parametru real. *(V.B.)*

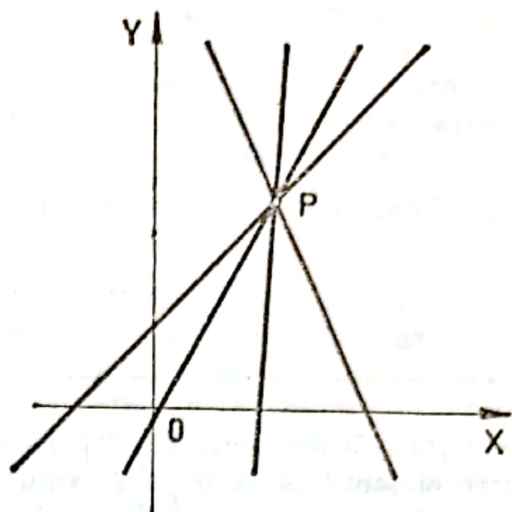


Fig. 69

fascicul de plane, mulțimea planelor care trec printr-o dreaptă dată. Față de un reper cartezian ecuația fasciculului de plane este: $P_1 + \lambda P_2 = 0$, unde $P_1(x, y, z) = 0$ și $P_2(x, y, z) = 0$ sînt ecuațiile a două plane care trec prin dreapta dată, iar λ este un parametru real (fig. 70). Fasciculele de drepte și de plane au fost introduse de G. Desargues (1639). *(V.B.)*

fază → **oscilație**

Fermat [fermạ], **Pierre** (1601—1665), matematician francez. Studii de drept (consilier al parlamentului din Toulouse). Ca matematician este autodidact. O parte a rezultatelor cercetărilor sale este cunoscută din corespondența sa cu matematicienii timpului (R. Descartes, B. Pascal, W. Brouncker, Frénicle de Bessy ș.a.). Lucrările sale au fost tipărite postum în volumul *Varia opera mathematica* (1679). Contribuții referitoare la teoria numerelor (marea teoremă, teorema lui Fermat). Creator al geometriei analitice (alături de R. Descartes) și al calculului probabilităților (împreună cu B. Pascal). *(V.B.)*

figură analagmatică [gr. *an* „fără", *alanghe* „schimbare"], curbă sau suprafață invariantă față de o inversiune. Ex.: cisoida, lemniscata, stro-

foida. Considerarea figurilor analagmatice se datorește lui Th. Moutard (1864). *(V.B.)*

figuri echivalente, figuri geometrice care au aceeași arie (sau volum). *(V.B.)*

figuri egale, figuri care coincid printr-o transformare izometrică. *(V.B.)*

figuri izoperimetrice [gr. *isos* „egal", *perimetru*], figuri care au perimetrele egale. Dintre poligoanele convexe, izoperimetrice, aria maximă o au poligoanele regulate. Dintre curbele plane închise și convexe, avînd o lungime dată, cercul închide un domeniu de arie maximă. Au fost studiate încă în antichitate, de Zenodor (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

figuri izopifane [gr. *isos* „egal", *epiphaneia* „suprafață"], corpuri geometrice avînd aceeași arie. Dintre paralelipipedele cu aceeași arie volumul maxim îl are cubul; dintre piramidele regulate și conurile circulare drepte, acelea la care raportul dintre aria laterală și aria bazei este egal cu $\sqrt{3}$; dintre suprafețele închise și convexe, sfera — fapt cunoscut de Pitagora (sec. 6 î.e.n.). *(V.B.)*

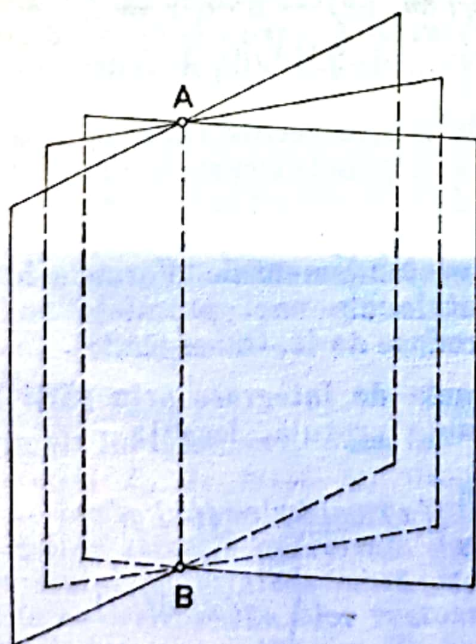


Fig. 70

filtru (într-o latice M), submulțimea F a lui M avînd proprietățile: $x \wedge y \in F$, pentru orice $x, y \in F$; $x \vee a \in F$, pentru orice $x \in F$ și $a \in M$. Noțiunea s-a degajat din topologie: în laticea formată de submulțimile deschise ale unui spațiu topologic, familia vecinătăților unui punct formează un filtru. Noțiunea de filtru este duală (în sensul schimbării conjuncției și disjuncției între ele) noțiunii de ideal. *(A.B.)*

fișier, colecție de înregistrări aflate în relație și organizată într-un mod determinat a servi unui anumit obiectiv. De exemplu, un fișier destinat ținerii evidenței articolelor dintr-un magazin va fi alcătuit din înregistrări ce trebuie să indice numele articolului, prețul, cantitatea existentă și vîndută și poate servi la aprecierea corectă a cererii pe piață. După metoda de acces la înregistrările fișierului există fișiere *cu acces direct, secvențial* și *secvențial-indexat*. *(T.B.)*

flux [lat. *fluxus* „curgere"] (unui cîmp vectorial $\mathbf{V}$ printr-o suprafață S), integrala de suprafață a componentei normale a vectorului $\mathbf{V}$. Dacă $\mathbf{n}$ este versorul normalei la S, fluxul lui $\mathbf{V} = V_x\mathbf{i} + V_y\mathbf{j} + V_z\mathbf{k}$ este:

$$\iint_S \mathbf{V}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S = \iint_S (V_x\mathrm{d}y\mathrm{d}z + V_y\mathrm{d}z\mathrm{d}x + V_z\mathrm{d}x\mathrm{d}y).$$

Pentru cîmpul vitezelor unui fluid, fluxul este egal cu cantitatea de fluid ce trece în unitatea de timp prin suprafața dată. *(V.B.)*

focar [lat. *focarium* „sursă de căldură"] (al unei conice), punct din planul conicei, avînd proprietatea că raportul distanțelor unui punct de

pe conică la el şi la o dreaptă fixă (directoarea) este constant. Elipsa şi hiperbola au două focare, iar parabola unul, puse în evidenţă de Apollonius (sec. 3 î.e.n.). Denumirea a fost dată de J. Kepler (1609) prin analogie cu noţiunea din fizică de focar al unei oglinzi concave. *(V.B.)*

foliul lui Descartes [lat. *folium* „foaie, frunză"], curbă plană avînd ecuaţia carteziană:

$$x^3 + y^3 - 3\,axy = 0,$$

la care dreapta $x + y + a = 0$ este asimptotă (fig. 71). Aria buclei foliului este $A = \frac{3a^2}{2}$, egală cu aria cuprinsă între ramurile infinite şi asimptotă. Foliul a fost introdus de R. Descartes (1638), ca exemplu de curbă ce poate fi studiată plecînd de la ecuaţia ei. *(V.B.)*

forma trigonometrică a numărului complex → număr complex

formă pătratică (în n nedeterminate $x_1, x_2, \ldots, x_n$), polinom omogen de grad 2 în nedeterminatele $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \ldots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \ldots + 2a_{nn-1}x_nx_{n-1}.$$

Matricea simetrică $A = \|a_{ij}\|_n$ se numeşte matricea ataşată formei pătratice $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Formele pătratice au numeroase aplicaţii în analiză, geometrie şi mecanică. Studiul formelor binare (cu două nedeterminate) a fost introdus de J. Lagrange (1767), iar P. Dirichlet (1842) a dezvoltat formele binare pătratice. — *Formă canonică*, formă pătratică cu $a_{ij} = 0$, pentru $i \neq j$. Matricea ataşată unei forme canonice este o matrice diagonală. *(V.B.)*

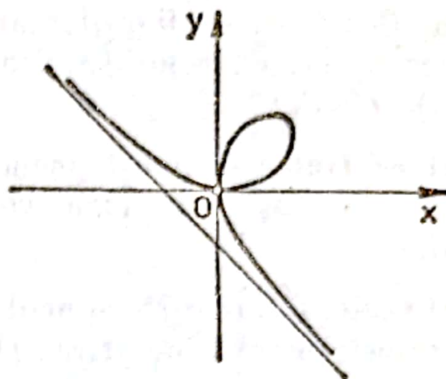


Fig. 71

formele fundamentale ale unei suprafeţe 1. (Prima formă fundamentală). Expresia:

$$\varphi(du, dv) = d\mathbf{r}^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2,$$

unde $\mathbf{r} = \mathbf{r}(u, v)$ este vectorul de poziţie al unui punct mobil pe o suprafaţă. Este o formă pătratică în du, dv, definită pozitiv. Determină elementul de arc al unei curbe situate pe o suprafaţă. Toate proprietăţile intrinseci ale suprafeţei se exprimă în coeficienţii primei forme fundamentale. **2.** (A doua formă fundamentală). Expresia:

$$\psi(du, dv) = \mathbf{n} \cdot d^2\mathbf{r} = L du^2 + 2M du dv + N dv^2,$$

unde $\mathbf{n}$ este versorul normalei suprafeţei în punctul curent. Proprietăţile rigide ale suprafeţei se exprimă în coeficienţii primei şi a celei de a doua forme fundamentale. Formele fundamentale ale unei suprafeţe au fost introduse de K. Gauss (1828). *(V.B.)*

formula de integrare prin părţi [lat. *formula* „regulă, lege"]:

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(x)\,g(x)\Big|_a^b - \int_a^b g(x)\,df(x)$$

(pentru integrale definite).

$$\int f(x)\,\mathrm{d}g(x) = f(x)\,g(x) - \int g(x)\,\mathrm{d}f(x)$$

(pentru integrale nedefinite).

Formula a fost dată de B. Taylor (1715). *(V.B.)*

formula lui Binet (în cazul mişcării unui punct material de masă m, care se mişcă sub acţiunea unei forţe centrale F), ecuaţia diferenţială de ordinul doi care permite determinarea lui r ca funcţie de θ: $(r^{-1})'' + r^{-1} = -Fr^2/(mC^2)$, considerîndu-se în planul mişcării coordonatele polare (r, θ) cu originea în centrul atractiv şi notîndu-se cu C constanta ariilor. *(Şt.G.)*

formula lui Heron, formulă care dă aria unui triunghi în funcţie de laturi:

$$S = \sqrt{p(p-a)\ (p-b)\ (p-c)},$$

unde $p = \frac{a+b+c}{2}$, iar a, b, c sînt lungimile laturilor triunghiului. Formula era cunoscută de Arhimede (sec. 3 î.e.n.) şi apare în lucrarea lui Heron, *Metrica* (sec. 1 î.e.n.). *(V.B.)*

formula lui Koenig: energia cinetică a unui sistem în mişcarea absolută este egală cu energia cinetică în mişcarea relativă la centrul maselor, plus energia cinetică a centrului maselor, în care se presupune concentrată întreaga masă a sistemului. *(Şt.G.)*

formula lui Lambert, dacă un punct material P, de masă m, descrie o traiectorie parabolică sub acţiunea forţei de atracţie universală datorită punctului material de masă M, care se ia ca origine a razelor vectoare ale lui P, intervalul de timp T, necesar ca P să treacă dintr-o poziţie Q în altă poziţie Q^*, de raze vectoare $\mathbf{r}$ şi, respectiv, $\mathbf{r}^*$, este dat de formula:

$$6\sqrt{f(M+m)}\,T = (r + r^* + s)^{3/2} - (r + r^* - s)^{3/2},$$

unde s este măsura corzii QQ^* şi f este constanta atracţiei universale, pentru $\widehat{QOQ^*} < \pi$. Formula a fost dată de L. Euler. *(Şt.G.)*

formula lui Moivre, formulă care dă puterea n-a a unui număr complex de modul unu, sub formă trigonometrică:

$$(\cos\alpha + \mathrm{i}\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + \mathrm{i}\sin n\alpha.$$

Forma actuală se datorează lui L. Euler (1748), dar formula a fost stabilită de A. Moivre (1707). *(V.B.)*

formula lui Newton şi Leibniz:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

unde $F(x)$ este o primitivă a funcţiei continue $f(x)$. *(V.B.)*

formula lui Stirling, formulă care permite calculul aproximativ al factorialului:

$$n! = \sqrt{2\pi}\,n^{\frac{n+1}{2}}\,\mathrm{e}^{-n+\omega_n},$$

unde $0 < \omega_n < \frac{1}{12n}$. A fost stabilită de J. Stirling (1730). *(A.B.)*

formula lui Taylor:

$$f(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!}f''(a) + \dots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + R_n(x),$$

unde f este o funcţie derivabilă de n ori într-o vecinătate a punctului a. $T_n(x) = f(a) + \frac{x-a}{1!}f'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!}f^{(n)}(a)$ se numeşte *polinomul lui Taylor*, iar $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$ este restul de ordinul n al formulei lui Taylor. Dacă $f(x)$ are derivată de ordinul $n+1$ continuă, restul de ordinul n poate fi pus sub forma:

$$R_n(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(\xi), \quad \text{cu} \quad \xi \in (a, x).$$

A fost stabilită de B. Taylor (1715). *(V.B.)*

formula lui Torricelli, formula care dă viteza v a unui punct material P, aflat în vid, ce are o viteză iniţială v_0 de-a lungul verticalei Oz, de poziţie iniţială z_0 şi de poziţie finală z, cînd asupra lui P acţionează o forţă care îi imprimă o acceleraţie constantă a, paralelă cu Oz: $v = \sqrt{v_0^2 + 2a(z - z_0)}$. *(Şt.G.)*

formula trapezelor → **integrare**

formulă de recurenţă [lat. *recurrens-tis* „care revine, care se reîntoarce"], formulă prin care se calculează valoarea unui termen dintr-un şir, în funcţie de valorile unor anumiţi termeni precedenţi. Ex.: un termen al progresiei aritmetice se exprimă prin formulele:

$$a_n = 2a_{n-1} - a_{n-2} = a_1 - r(n-1).$$

Termenul a fost propus de A. Moivre (1724), deşi primele formule de recurenţă se întîlnesc încă la Teon (sec. 2). *(V.B.)*

formule de calcul algebric prescurtat:

a) pătratul unui binom:

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2;$$

b) cubul unui binom:

$$(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3;$$

c) pătratul unui polinom:

$$(a + b + c + \ldots + k + l)^2 = \sum a^2 + 2\sum ab = a^2 + b^2 + c^2 + \ldots + k^2 + l^2 + 2ab + 2ac + \ldots + 2al + 2bc + \ldots + 2bl + \ldots + 2kl;$$

d) cubul unui polinom:

$$(a + b + c + \ldots + k + l)^3 = \sum a^3 + 3\sum a^2b + 6\sum abc;$$

e) puterea naturală a unui polinom:

$$(a + b + c + \ldots + k + l)^n = \sum \frac{n!}{p!\,q!\ldots t!}a^p b^q \ldots l^t,$$

unde însumarea se face pentru toţi întregii nenegativi $p, q, \ldots, t$ care satisfac relaţia $p + q + \ldots + t = n$; $n \in \mathbf{N}$;

f) diferenţa de pătrate:

$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b);$$

g) diferenţa şi suma cuburilor:

$$a^3 \mp b^3 = (a \mp b)(a^2 \pm ab + b^2);$$

h) diferenţa puterilor naturale:

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1});$$

i) suma puterilor naturale impare:

$$a^{2n+1} + b^{2n+1} = (a + b)(a^{2n} - a^{2n-1}b + \ldots + ab^{2n-1} + b^{2n});$$

j) sume remarcabile $(n \in \mathbf{N})$:

$$S_1 = 1 + 2 + \ldots + n = \frac{1}{2} n(n+1)$$

$$S_2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + n^2 = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$$

$$S_3 = 1^3 + 2^3 + \ldots + n^3 = \frac{1}{4} n^2(n+1)^2$$

....

$$S_k = 1^k + 2^k + \ldots + n^k (k \in \mathbf{N})$$

se calculează cu ajutorul relației de recurență:

$$S_k C_{k+1}^1 + S_{k-1} C_{k+1}^2 + \ldots + S_1 C_k^k = (n+1)\,[(n+1)^k - 1].$$

Primele formule de însumare apar la Pitagora (sec. 6 î.e.n.). *(V.B.)*

formulele lui De Morgan → **complementară**

formulele lui Viète, relații între coeficienții ecuației algebrice $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_kx^{n-k} + \ldots + a_n = 0$ $(a_i \in \mathbf{C},\ a_0 \neq 0)$ și rădăcinile ei $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

$$S_1 = x_1 + x_2 + \ldots + x_n = -\frac{a_1}{a_0}$$

$$S_2 = x_1x_2 + x_1x_3 + \ldots + x_{n-1}x_n = \frac{a_2}{a_0}$$

$$S_3 = x_1x_2x_3 + x_1x_2x_4 + \ldots + x_{n-2}x_{n-1}x_n = -\frac{a_3}{a_0}$$

....

$$S_k = x_1x_2x_3 \ldots x_k + \ldots = (-1)^k \frac{a_k}{a_0}$$

....

$$S_n = x_1x_2 \ldots x_n = (-1)^n \frac{a_n}{a_0}.$$

Aceste relații au fost stabilite de F. Viète (1591). Se mai numesc *relații între rădăcini și coeficienți. (V.B.)*

formule trigonometrice:

a) formule fundamentale:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$$

$$\operatorname{ctg} x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$\sec x = \frac{1}{\cos x}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{1}{\sin x}$$

$$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x$$

$$\operatorname{cosec}^2 x = 1 + \operatorname{ctg}^2 x$$

$$\operatorname{tg} x = \frac{1}{\operatorname{ctg} x}.$$

Prima formulă provine de la Cl. Ptolemeu (sec. 2), iar celelalte de la A. al-Habaş (sec. 9), la care Abul Vefa (sec. 10) a adăugat pe ultima.

b) formule pentru funcțiile trigonometrice ale sumei și diferenței de argumente:

$$\sin(x \pm y) = \sin x \cos y \pm \sin y \cos x$$

$$\cos(x \pm y) = \cos x \cos y \mp \sin x \sin y$$

$$\operatorname{tg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{tg} x \pm \operatorname{tg} y}{1 \mp \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

$$\operatorname{ctg}(x \pm y) = \frac{\operatorname{ctg} x \operatorname{ctg} y \mp 1}{\operatorname{ctg} x \pm \operatorname{ctg} y}.$$

Formulele referitoare la sinus şi cosinus au căpătat forma actuală după relaţiile corespunzătoare stabilite de Cl. Ptolemeu (sec. 2).

c) formule pentru funcţiile trigonometrice ale unghiului dublu:

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x$$

$$\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x$$

$$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 2x = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - 1}{2 \operatorname{ctg} x}.$$

Teoremele corespunzătoare primelor formule au fost formulate de Abul Vefa (sec. 10); celelalte formule au fost introduse mult mai tîrziu (sec.17).

d) formule pentru funcţiile trigonometrice ale unghiului triplu:

$$\sin 3x = 3 \sin x - 4 \sin^3 x$$

$$\cos 3x = 4 \cos^3 x - 3 \cos x$$

$$\operatorname{tg} 3x = \frac{3 \operatorname{tg} x - \operatorname{tg}^3 x}{1 - 3 \operatorname{tg}^2 x}$$

$$\operatorname{ctg} 3x = \frac{\operatorname{ctg}^3 x - 3 \operatorname{ctg} x}{3 \operatorname{ctg}^2 x - 1}.$$

În transcripţie trigonometrică aceste formule apar pentru prima dată la F. Viète (1593), după raţionamentele, privind $\sin 3x$, ale lui G. al-Kaşi (sec. 5).

e) formule pentru funcţiile trigonometrice ale unghiului multiplu:

$$\sin nx = C_n^1 \sin x \cos^{n-1} x - C_n^3 \sin^3 x \cos^{n-3} x + C_n^5 \sin^5 x \cdot \cos^{n-5} x - \dots$$

$$\cos nx = C_n^0 \cos^n x - C_n^2 \sin^2 x \cos^{n-2} x + C_n^4 \sin^4 x \cos^{n-4} x - \dots$$

$$\operatorname{tg} nx = \frac{C_n^1 \operatorname{tg} x - C_n^3 \operatorname{tg}^3 x + C_n^5 \operatorname{tg}^5 x - \dots}{1 - C_n^2 \operatorname{tg}^2 x + C_n^4 \operatorname{tg}^4 x - \dots}$$

$$\operatorname{ctg} nx = \frac{\operatorname{ctg}^2 x - C_n^2 \operatorname{ctg}^{n-2} x + C_n^4 \operatorname{ctg}^{n-4} x - \dots}{C_n^1 \operatorname{ctg}^{n-1} x - C_n^3 \operatorname{ctg}^{n-3} x + C_n^5 \operatorname{ctg}^{n-5} - \dots}.$$

Primele două formule (pentru $n \leqslant 10$ şi cu alte notaţii) se datorează lui F. Viète (1593).

f) formule pentru funcţii trigonometrice ale semiunghiurilor:

$$\sin \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sin x} - \sqrt{1 - \sin x}}{2}$$

$$\cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \frac{\sqrt{1 + \sin x} + \sqrt{1 - \sin x}}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}}{\operatorname{tg} x'} = \frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{1 - \cos x}{\sin x}$$

$$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1 + \cos x}{1 - \cos x}} = \frac{1}{\operatorname{ctg} x \pm \sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 x}} = \frac{\sin x}{1 - \cos x} = \frac{1 + \cos x}{\sin x}$$

$$\sin x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\cos x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\mathrm{tg}\, x = \frac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}$$

$$\mathrm{ctg}\, x = \frac{1-\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{x}{2}}.$$

Ideea stabilirii acestor formule apare întîi la Cl. Ptolemeu (sec. 2), la care se întîlnește relația echivalentă cu prima dintre acestea.

g) formule pentru transformarea sumelor și diferențelor de funcții trigonometrice în produse:

$$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\sin x - \sin y = 2\sin\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x - \cos y = 2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{y-x}{2}$$

$$\mathrm{tg}\, x \pm \mathrm{tg}\, y = \frac{\sin(x\pm y)}{\cos x \cos y}$$

$$\mathrm{ctg}\, x \pm \mathrm{ctg}\, y = \frac{\sin(y\pm x)}{\sin x \sin y}.$$

Aceste formule au fost stabilite pentru prima dată (în cazul sinusurilor și cosinusurilor) de F. Viète (1593).

h) formule pentru transformarea produselor în sume sau diferențe:

$$\sin x \cos y = \frac{\sin(x+y)+\sin(x-y)}{2}$$

$$\cos x \cos y = \frac{\cos(x+y)+\cos(x-y)}{2}$$

$$\sin x \sin y = \frac{\cos(x-y)-\cos(x+y)}{2}$$

$$\mathrm{tg}\, x\, \mathrm{tg}\, y = \frac{\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y}{\mathrm{ctg}\, x + \mathrm{ctg}\, y}$$

$$\mathrm{ctg}\, x\, \mathrm{ctg}\, y = \frac{\mathrm{ctg}\, x + \mathrm{ctg}\, y}{\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y}.$$

Primul care a conceput o asemenea formulă (cazul $\cos x \cos y$, cu alte notații) a fost M. Al-Hassan (sec. 9).

i) formule trigonometrice în triunghiul dreptunghic:

$$b = a \sin B = a \cos C = c\,\mathrm{tg}\, B = c\,\mathrm{ctg}\, C$$

$$c = a \sin C = a \cos B = b\,\mathrm{tg}\, C = b\,\mathrm{ctg}\, B$$

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2} = \pm\sqrt{\frac{a-c}{a+c}};$$

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2} = \pm\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}.$$

j) formule trigonometrice în triunghiul oarecare:

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

unde R este raza cercului circumscris. Se mai numește *teorema sinusurilor* (dată de Al-Biruni, sec. 11);

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\,\cos A$$

(și analoagele obținute prin permutări circulare aplicate laturilor a, b, c și, respectiv unghiurilor A, B, C ale triunghiului considerat). Se mai numește *teorema cosinusului*; această relație a fost formulată explicit de către F. Viète, deși teorema corespunzătoare ei se întîlnește încă la Euclid (sec. 3 î.e.n.);

$$\frac{a+b}{a-b} = \frac{\operatorname{tg}\frac{A+B}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A-B}{2}} \text{ etc.,}$$

teorema tangentelor, descoperită de T. Fink (1583);

$$\frac{+b}{c} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{A+B}{2}} = \frac{\cos\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{C}{2}}$$

$$\frac{a-b}{c} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\sin\frac{A+B}{2}} = \frac{\sin\frac{A-B}{2}}{\cos\frac{C}{2}},$$

formulele lui K. Mollweide (publicate de acesta în 1808), dar stabilite de I. Newton (1707);

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}} \text{ etc.,}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}} \text{ etc.,}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p(p-a)}} \text{ etc.,}$$

$$\operatorname{ctg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{(p-b)\,(p-c)}} \text{ etc.,}$$

unde p este semiperimetrul triunghiului. Formulele au fost stabilite de G. Rheticus (1576).

k) formule trigonometrice într-un patrulater inscriptibil :

$$\sin\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-d)}{ad+bc}} \text{ etc.,}$$

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{ad+bc}} \text{ etc.,}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos A}{1+\cos A}} =$$

$$= \sqrt{\frac{(p-a)\,(p-d)}{(p-b)\,(p-c)}} \text{ etc.,}$$

unde p este semiperimetrul patrulaterului. Aceste formule își au originea în lucrările lui Cl. Ptolemeu (sec. 2). *(V.B.)*

FORTRAN [engl. *Formula translation*], limbaj de programare foarte răspîndit, creat de specialiști de la I.B.M. (*International Business Machines*) în 1956. Este folosit pentru probleme care necesită un volum mare de calcule numerice. *(T.B.)*

forță [lat. *fortia*] (în mecanica clasică; **F**, **f**), cauza determinantă a variației

vitezei unui punct material. În mecanica clasică, este admisă posibilitatea ca două corpuri materiale, care ocupă în spațiu regiuni necontingente, să acționeze unul asupra celuilalt, instantaneu și la distanță (ipoteza acțiunii la distanță). Valoarea noțiunii de forță rezidă din faptul că ea permite să se stabilească o relație cantitativă între variația impulsului unui punct material și alte mărimi caracteristice corpurilor cu care acest punct se găsește în interacțiune. Ecuația dimensională a forței este $[F] = MLT^{-2}$, astfel încît unitatea de forță în sistemul CGS este 1 dină (dyn) = $g \cdot cm/s^2$, iar în sistemul SI este 1 newton (N) = $kg \cdot m/s^2$, relația dintre ele fiind 1 N = 10^5 dyn. În sistemul MKfS, o unitate fundamentală este kilogramul forță (kgf), între acesta și unitatea precedentă existînd relația 1 kgf = 9,81 N. Forțele se clasifică din mai multe puncte de vedere. După natura lor față de un sistem de puncte materiale, ele sînt *interioare*, cînd reprezintă interacțiunea dintre punctele materiale ale sistemului considerat, fiind două cîte două egale și de sensuri contrarii, și *exterioare*, cînd provin din interacțiunile punctelor sistemului cu alte puncte care nu aparțin sistemului considerat. Forțele care apar datorită inerției corpurilor se numesc *forțe de inerție*. În studiul mișcării relative a unui punct material de masă m se introduc: *forța de transport* $\mathbf{F}_t = -m\mathbf{a}_t$, unde $\mathbf{a}_t$ este accelerația de transport și *forța lui Coriolis* $\mathbf{F}_c = -m\mathbf{a}_c$, unde $\mathbf{a}_c$ este accelerația lui Coriolis. $\mathbf{F}_t$ și $\mathbf{F}_c$ se numesc *forțe complementare*. Din punct de vedere al modului de acționare, avem *forțe concentrate*, care acționează practic într-un singur punct, *forțe masice*, care acționează asupra unor mase ce ocupă volume ale căror dimensiuni nu se pot neglija și *forțe distribuite* (sau *repartizate*), care acționează pe o anumită suprafață sau chiar, cu o bună aproximație, de-a lungul unei anumite linii. Dacă forța acționează într-un interval de timp foarte scurt (de obicei între 10^{-2} s la 10^{-4} s) și are o intensitate suficient de mare pentru a putea provoca variații apreciabile ale impulsului corpului asupra căruia acționează, forța se numește *percutantă*. Dacă suportul forței aplicate unui punct material trece în orice moment printr-un punct fix O, forța se numește *centrală*, și cînd forța este dirijată spre O, acest punct se numește, de obicei, centru atractiv. Cînd intensitatea forței este proporțională cu distanța de la punctul material la O, forța se numește *elastică*; cînd O este ales ca origine a reperului, $\mathbf{F} = -k\mathbf{r}$ sau $\mathbf{F} = k\mathbf{r}$, după cum forța este atractivă sau repulsivă, k fiind un coeficient pozitiv (numit uneori coeficient de elasticitate). *(Șt.G.)*

forță de legătură *(R)*, forță care reprezintă acțiunea mecanică pe care legăturile o exercită asupra punctelor materiale ale sistemului considerat. Se mai numește *reacțiune*. *(Șt.G.)*

forță generalizată, sumele definite prin $Q_k = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j \frac{\partial \mathbf{r}_j}{\partial q_k}$ $(k = 1,2, ..., n)$, dacă sistemul considerat e format din n puncte materiale, de vectori de poziție $\mathbf{r}_j$, asupra cărora acționează forțele de rezultantă $\mathbf{F}_j$, iar q_k $(k = 1,2, ..., n)$ sînt coordonatele generalizate. Cînd q_k are ecuația dimensională a unei lungimi, Q_k are ecuația dimensională a forței, dar în alte cazuri aceasta nu are loc; de exemplu cînd q_k este zero dimensional Q_k are ecuația dimensională a lucrului mecanic. *(Șt.G.)*

forțe de echilibru, sistem de forțe S care, acționînd asupra unui sistem P de puncte materiale, nu modifică

starea de repaus sau de mişcare a lui P faţă de un sistem de referinţă inerţial. Pentru ca S să fie în echilibru este necesar şi suficient ca torsorul lui S faţă de un punct oarecare să fie nul. *(Şt.G.)*

Fourier [furie], **Joseph Jean-Baptiste** (1768—1830), matematician francez. Profesor la Şcoala Normală din Paris şi la Şcoala Politehnică. Membru al Academiei de Ştiinţe din Paris şi secretar permanent al ei. Cercetări asupra rezolvării numerice a ecuaţiilor, şi, în special, privind teoria analitică a căldurii, în legătură cu care a introdus seriile Fourier, fapt pentru care a fost premiat de Academia din Paris (1812). Op. pr.: *Théorie analytique de la chaleur*, 1822; *Analyse des équations déterminées*, 1831. *(V.B.)*

fracţie [lat. *fractio* „frîngere"] $\left(\frac{m}{n}\right)$, termen folosit în aritmetică pentru a denumi un număr raţional. Numărul de sub linia de fracţie, numit *numitor*, indică în cîte părţi a fost împărţit un întreg, iar cel de deasupra liniei de fracţie, numit *numărător*, arată cîte astfel de părţi sînt considerate. Operaţiile cu fracţii erau cunoscute în Egiptul antic (papirusul lui Rhind, c. 2000 î.e.n.). Regula de aducere la cel mai mic numitor comun a fost formulată de Abul Vefa (sec. 10). M. Stifel (1544) a dat regula împărţirii a două fracţii, conform căreia prima fracţie se înmulţeşte cu a doua inversată. Notaţia fracţiilor este de origine indiană, astfel Brahmagupta (sec. 6) aşeza numărătorul deasupra numitorului, însă fără linia de fracţie care apare la L. P. Fibonacci (*Liber abaci*, 1202). Denumirea a fost adoptată în terminologia românească, pentru prima dată, de A. Pavlid (1852). Se mai numeşte *fracţie ordinară*. — *Fracţie algebrică*, raport a două polinoame. *(V.B.)*

fracţie continuă $([a_1, a_2, a_3, \ldots])$, expresie de forma:

$$a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots}},$$

finită sau nu, unde a_1 este un număr întreg, iar a_i, $i = 2, 3, \ldots$, sînt numere întregi pozitive. Orice număr raţional poate fi exprimat cu ajutorul algoritmului lui Euclid, sub forma unei fracţii continue finite. Ex.:

$$\frac{29}{38} = 0 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{3 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2}}}} =$$

$$= [0, 1, 3, 4, 2].$$

Orice număr iraţional poate fi exprimat sub forma unei fracţii continue infinite. Ex.:

$$\pi = 3 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{15 + \cfrac{1}{1 + \ldots}}} =$$

$$= [3, 7, 15, 1, \ldots],$$

expresie obţinută pentru prima dată de W. Brouncker (1668). Apariţia fracţiilor continue este veche, de ele s-au servit grecii şi hinduşii pentru extragerea rădăcinilor pătrate. J. Wallis (1656) a dat legea formării redurselor (fracţii succesive formate pînă la un a_i); notaţia a fost propusă de Chr. Huygens (opera postumă, 1703); L. Euler (1737) a enunţat teorema că orice număr raţional poate fi redat printr-o fracţie continuă finită, iar un număr iraţional, prin una infinită; fracţiile continue sînt folosite, după metoda lui J. Lagrange (1768), la rezolvarea ecuaţiilor diofantice; Ch. Hermite (1873), întrebuinţînd dezvoltarea în fracţie continuă a numărului e, a demonstrat transcendenţa lui. *(V.B.)*

fracţie zecimală, fracţie al cărei numitor este egal cu o putere naturală a lui 10. Descoperirea fracţiilor zecimale se datorează chinezilor (sec. 3). Folosirea virgulei pentru despărţirea părţii întregi de partea zecimală s-a impus la propunerea lui J. Neper (*Rhabdologiae seu numerationis per virgulas libri duo*, 1617). Contribuţii la studiul fracţiilor zecimale au adus: S. Stevin (1585), B. Pitiscus (1612), căruia i se datorează numeraţia zecimală (unde unităţile diferitelor ordine, luate succesiv, de la stînga la dreapta, formează o progresie geometrică descrescătoare, a cărei raţie este o zecime), W. Oughtred (1631) a publicat cel dintîi procedeu de înmulţire şi împărţire prescurtată a fracţiilor zecimale, care, după perfecţionarea adusă de J. Fourier (1831), este folosit şi acum. — *Fracţie zecimală periodică*, fracţie zecimală care are un grup de zecimale (numit *perioadă*) ce se repetă necontenit. Atunci cînd perioada urmează imediat după virgulă fracţia se numeşte *fracţie zecimală periodică simplă*. Ex.: $\frac{5}{6} = 1,666 \ldots = 1,(6)$. Dacă perioada nu urmează imediat după virgulă, fracţia se numeşte *fracţie zecimală periodică mixtă*. Ex.: $\frac{53}{110} = 0,32121 \ldots = 0,3(21)$. Fracţiile periodice au fost studiate pentru prima dată de J. Wallis (1657), care a arătat că la transformarea unei fracţii ordinare în fracţie zecimală, se obţine o fracţie cu un număr finit de zecimale, dacă numitorul admite ca divizor numai pe 2 şi (sau) 5, sau o fracţie zecimală periodică simplă, dacă numitorul nu admite ca divizor pe 2 şi 5, iar în celelalte cazuri, o fracţie zecimală periodică mixtă. Teoria completă a fracţiilor zecimale periodice a fost elaborată de Jean Bernoulli, L. Euler şi K. Gauss. În terminologia românească denumirea, folosită iniţial de Gh. Asachi (1814), s-a statornicit prin lucrările lui I. Eliade Rădulescu (1832), C. Valştain (1836) ş.a. *(V.B.)*

frecare, rezistenţa care se opune mişcării unui corp ce se găseşte în contact cu alt corp. După natura mişcării relative a corpului considerat, tipurile principale de frecări sînt: frecarea de alunecare, frecarea de rostogolire şi frecarea de pivotare. Frecările care se nasc în decursul mişcării unui sistem de puncte materiale, atît cele datorate mişcării relative a unui punct material faţă de altul cît şi cele datorate unor sisteme materiale exterioare cu care sistemul considerat se află în interacţiune, diminuează energia mecanică totală a acestuia. *Legile frecării* de alunecare au fost date de Ch. de Coulomb. Presupunînd o suprafaţă S fixă, un punct material P în contact cu S, notînd prin $\mathbf{N}$ şi $\mathbf{\Phi}$ componenta, după normala la S în punctul P a reacţiunii lui S asupra lui P, şi respectiv, componenta reacţiunii situată în planul tangent în acelaşi punct, în cazul echilibrului lui P pe S, sub acţiunea unei forţe $\mathbf{F}$, legile sînt: a) oricare ar fi forţa $\mathbf{F}$, $\Phi/N \leqslant f_0$, unde f_0 este un coeficient adimensional, numit coeficient de frecare de alunecare, în repaus; b) f_0 nu depinde decît de natura corpurilor în contact. Dacă P se mişcă pe o suprafaţă fixă sau mobilă, S, legile se enunţă: a) oricare ar fi $\mathbf{F}$, $\Phi/N = f$, unde f este un coeficient adimensional, numit coeficient de frecare de alunecare; b) f nu depinde de natura corpurilor în contact şi este independentă de viteza lor relativă; c) $\mathbf{\Phi}$ este opusă vitezei relative a lui P faţă de S. Cercetări mai aprofundate au arătat că, pentru valori foarte mari ale lui N, coeficientul de frecare nu mai este constant, crescînd foarte lent cu N; în plus, f variază cu viteza şi depinde de temperatura cor-

purilor în contact, de timpul cît ele au stat în contact pînă la momentul considerat etc. *(Şt. G.)*

frecvență → oscilație

frecvență absolută [lat. *frequentia*] (a unui eveniment aleator într-o serie de n probe), numărul probelor în care evenimentul s-a realizat. În cazul unei selecții dintr-o populație statistică, frecvența absolută a unei valori observate x a caracteristicii este egală cu numărul de apariții ale valorii x în selecția considerată. *(A.Ş.)*

frecvență relativă (a unui eveniment aleator într-o serie de n probe), raportul dintre frecvența absolută şi numărul n de probe considerate. *(A.Ş.)*

frontieră (a unei mulțimi dintr-un spațiu topologic), mulțimea punctelor cu proprietatea că orice vecinătate a lor conține puncte din mulțime şi din complementara sa. Ex.: în $\mathbf{R}^2$ frontiera mulțimii $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ este $\{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$. *(A.B.)*

funcția beta → funcții speciale

funcția constantă, funcție de forma $f(x) = c$, $c \in \mathbf{R}$. *(V.B.)*

funcția de gradul doi → funcție polinomială

funcția de gradul întîi → funcție polinomială

funcția densitate de probabilitate, funcția $\varphi(x)$ ce definește probabilitatea elementară (infinitezimală) dP, ca o variabilă aleatoare continuă X să ia o valoare din intervalul $(x, x + dx)$:

$$dP = \varphi(x)\,dx, \quad \varphi(x) \geqslant 0 \text{ şi}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(x)\,dx = 1.$$

Se mai numeşte *funcția densitate de repartiție*. *(V.B.)*

funcția gama → funcții speciale

funcția identică, funcție $f: E \to E$ cu $f(x) = x$. *(V.B.)*

funcția lui Euler $(\varphi(x))$, funcție definită pe mulțimea numerelor naturale care ataşează fiecărui $n \in \mathbf{N}$ numărul numerelor mai mici ca n şi prime cu n. Ex.: $\varphi(2) = 1$, $\varphi(5) = 4$, $\varphi(6) = 2$. Dacă descompunerea în factori primi a lui n este:

$$n = p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_k^{n_k},$$

atunci:

$$\varphi(n) = n\left(1 - \frac{1}{p_1}\right)\left(1 - \frac{1}{p_2}\right) \ldots \left(1 - \frac{1}{p_k}\right)$$

iar pentru un număr prim p:

$$\varphi(p) = p - 1.$$

Funcția a fost introdusă de L. Euler (1760), iar denumirea a fost propusă de K. Gauss (1801). Se mai numeşte *indicatorul lui Euler*. *(V.B.)*

funcția lui Hamilton (H), funcție ce depinde, în general, de coordonatele generalizate, de impulsurile generalizate şi de timp, definită prin expresia: $\sum_{1}^{n} p_j \dot{q}_j - L(q_1, \ldots, q_n; \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n; t)$, unde L este funcția Lagrange. Dacă funcția H nu depinde explicit de timp, ea reprezintă energia mecanică totală a sistemului de puncte materiale considerat, adică $H = T - U$. Această funcție joacă un rol important în mecanica analitică şi în fizica teoretică. *(Şt.G.)*

funcția lui Lagrange (L), suma energiei cinetice T şi a lui U, adică $L =$

$= T + U$, cînd există o funcţie de forţă U. Astfel L apare ca energia cinetică a sistemului de puncte materiale considerat, minus energia lui potenţială. Se mai numeşte *potenţial cinetic*. *(Şt.G.)*

funcţia omografică → **funcţie raţională**

funcţia parte întreagă *([x])*, funcţie definită pe mulţimea numerelor reale cu valori numere întregi, astfel: $f(x) = [x] = n$, unde n este cel mai mare număr întreg astfel ca $n \leqslant x$. Ex.: [2] = 2, [3, 4] = 3, [— 5,67] = = — 6. Este o funcţie discontinuă (pentru x întreg), fiind o funcţie în scară. Este utilizată, de exemplu, la determinarea exponentului k al unui număr prim p în factorialul

$$n\,!:k = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{p^r}\right],$$

unde $p^r \leqslant n \leqslant p^{r+1}$. *(V.B.)*

funcţia signum [lat. *signum* „semn"] *(sgn x)*, funcţie definită pe mulţimea numerelor reale prin:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} -1 \text{ dacă } x < 0 \\ 0 \text{ dacă } x = 0 \\ +1 \text{ dacă } x > 0. \end{cases}$$ *(V.B.)*

funcţie [lat. *functio* „îndeplinire, realizare"], triplet format dintr-o mulţime E, numită *domeniu de definiţie*, o mulţime F, numită mulţimea în care funcţia ia valori (codomeniu) şi o corespondenţă care asociază fiecărui element din E un element şi numai unul din F. Unui element $x \in E$, numit *argument* sau *variabilă independentă*, îi corespunde un element $y \in F$, notat $y = f(x)$, numit *imaginea* lui x prin funcţia f, sau *transformatul* lui x prin funcţia f, sau *valoarea* funcţiei f în punctul x. După cum E este o submulţime a lui **R** sau a lui **C** funcţia se numeşte de variabilă reală sau de variabilă complexă. Dacă E este o submulţime a lui $\mathbf{R}^n$ funcţia se numeşte de n variabile. Noţiunea de funcţie s-a cristalizat treptat în decursul evoluţiei matematicii. Ideea dependenţei mărimilor cu caracter geometric a apărut în Grecia antică, iar la I. Newton şi G. Leibniz noţiunea de funcţie avea de asemenea un caracter îngust, legat de limbajul geometric. Jean Bernoulli (1718) a definit funcţia fără a folosi reprezentările geometrice, iar pentru L. Euler noţiunea era legată de posibilitatea exprimării prin formule. În secolul 18 rezultatele obţinute cu ajutorul seriilor trigonometrice, pentru unele probleme de mecanică, au dus la lărgirea noţiunii de funcţie realizată efectiv în secolul 19, cînd P. J. Dirichlet (precizînd unele rezultate ale lui J. Fourier) a dat funcţiei o definiţie apropiată de cea actuală. Apariţia teoriei mulţimilor, creată de G. Cantor (1874), a permis definirea noţiunii de funcţie în forma în care este folosită astăzi. Termenul a fost folosit prima dată de G. Leibniz (1693), iar notaţia $f(x)$ a fost introdusă de L. Euler (1734). Se mai numeşte *aplicaţie* sau *transformare*. *(V.B.)*

funcţie analitică [gr. *ana* „prin", *litikos* „descompunere"], funcţie reală sau complexă $f(z)$, de variabilă reală sau complexă $z = x + iy$, definită univoc în fiecare punct dintr-un domeniu D, care poate fi reprezentată, în jurul fiecărui punct din D, printr-o serie de puteri; adică pentru orice $z_0 \in D$ se poate obţine:

$$f(z) = \sum_{n=k}^{\infty} c_n(z - z_0)^n \; (n \in \mathbf{N},\, k \in \mathbf{Z}),$$

într-un cerc cu centrul în z_0. Cazul $k \geqslant 0$ se referă la o funcţie olomorfă, altfel seria reprezintă o funcţie meromorfă în D. Ex.: polinoamele, funcţiile raţionale, funcţiile e^z, $\sin z$, $\cos z$

ş.a. sînt funcţii analitice. Funcţiile analitice au fost introduse de L. Euler (1769); teoria lor, bazată pe seria tayloriană, a fost dezvoltată de K. Weierstrass (1840) şi, simultan, de Ch. Méray. Denumirea a fost introdusă, dar într-un sens care nu coincide întocmai cu cel actual, de J. Lagrange (1806). *(V.B.)*

funcţie armonică → **laplacian**

funcţie bijectivă [lat. *bis* „de două ori", fr. *jeter* „a pune, a lega"], funcţie care este în acelaşi timp surjectivă şi injectivă. O funcţie bijectivă admite o funcţie inversă. Se mai numeşte *bijecţie*. *(V.B.)*

funcţie biunivocă [lat. *bis* „de două ori", *unus, a, um* = unul, *vox-vocis* „cuvînt"] → **funcţie injectivă**

funcţie caracteristică (a unei variabile aleatoare), valoarea medie a variabilei aleatoare e^{itX} $(i^2 = -1)$. În general, este o funcţie de argument real t, cu valori complexe. Este un element important al legii probabilistice a unei variabile aleatoare, fiind unic determinată de funcţia de repartiţie şi determinînd-o, la rîndul său, în mod unic pe aceasta. Datorită proprietăţilor sale, este foarte utilă în studiul unor probleme proprii variabilelor aleatoare. *(A.Ş.)*

funcţie compusă (a funcţiilor $f:E\to F$ şi $g:F\to G$; $g\circ f$), funcţia $g\circ f$: $E\to G$, care asociază unui $x\in E$ elementul $g(f(x))\in G$. *(V.B.)*

funcţie concavă [lat. *concavus* „scobit"] (pe un interval $I\subset E$), funcţie $f:E\to F$ $(E, F\subset \mathbf{R})$ astfel încît:

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)\geqslant\frac{f(x_1)+f(x_2)}{2},$$

pentru orice $x_1, x_2\in I$. În orice punct al graficului G_I tangenta se află deasupra graficului (fig. 72), unde cu G_I s-a notat porţiunea din graficul funcţiei f corespunzătoare intervalului I. Ex.: funcţia $f(x) = \sin x$ este concavă pe $[0, \pi]$. Dacă derivata a doua a funcţiei f este strict negativă pe I, atunci funcţia este concavă pe I. *(V.B.)*

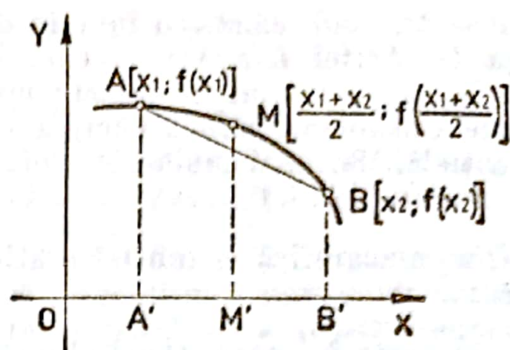


Fig. 72

funcţie continuă (într-un punct x_0 din domeniul de definiţie), funcţie cu proprietatea:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0).$$

Dacă funcţia $f:E\to F$ este continuă în orice punct $x\in E$, ea se numeşte *funcţie continuă pe E*. Mulţimea funcţiilor definite pe E şi continue pe E formează o algebră. Funcţiile elementare sînt funcţii continue. Continuitatea se defineşte analog pentru funcţii de mai multe variabile. Funcţia continuă pe un interval închis $[a, b]$ are proprietăţile: a) este mărginită şi îşi atinge marginile; b) are proprietatea lui Darboux; c) este uniform continuă. Definiţia modernă a continuităţii unei funcţii aparţine lui A. Cauchy (1821), iar ideea cercetării continuităţii funcţiilor, lui L. Euler (1748). — *Funcţie uniform continuă pe E*, funcţie $f:E\to\mathbf{R}$ cu proprietatea că pentru orice $\varepsilon > 0$ există un număr $\delta(\varepsilon) > 0$, astfel încît pentru orice $x', x''\in E$ cu $|x' - x''| < \delta(\varepsilon)$, să rezulte $|f(x') - f(x'')| < \varepsilon$. Orice funcţie uniform continuă pe E este continuă pe E, dar nu şi reciproc. *(V.B.)*

funcţie convexă [lat. *convexus* „bom-

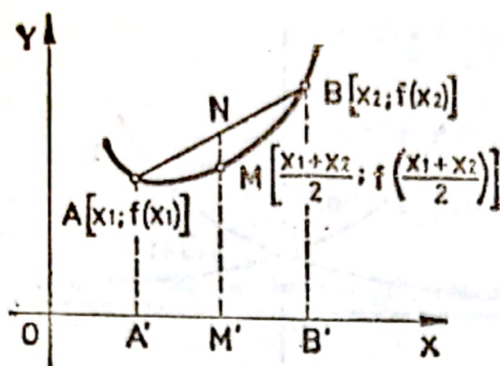


Fig. 73

bat"] (pe un interval $I \subset E$), funcţie $f: E \to F$ $(E, F \subset \mathbf{R})$ astfel încît:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2},$$

pentru orice $x_1, x_2 \in I$. În orice punct al graficului G_I tangenta se află sub grafic (fig. 73), unde cu G_I s-a notat porţiunea din graficul funcţiei f corespunzătoare intervalului I. Ex.: funcţia $f(x) = e^x$ este convexă pe tot domeniul său de definiţie. Dacă derivata a doua a funcţiei f este strict pozitivă pe I, atunci funcţia este convexă pe I. Studii aprofundate asupra funcţiilor concave şi convexe a întreprins J. L. Jensen (1906). *(V.B.)*

funcţie crescătoare (pe un interval $I \subset E$), funcţie $f: E \to F$ $(E, F \subset \mathbf{R})$ astfel încît, dacă $x_1 < x_2$, $(x_1, x_2 \in I)$, atunci $f(x_1) \leqslant f(x_2)$. — *Funcţia strict crescătoare*, funcţie pentru care $x_1 < x_2$ implică $f(x_1) < f(x_2)$. Ex.: funcţia $f(x) = \sin x$ este strict crescătoare pe $\left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$. Dacă derivata funcţiei f este (strict) pozitivă pe I, atunci funcţia este (strict) crescătoare pe I. *(V.B.)*

funcţie de distribuţie (a unei variabile aleatoare)→**funcţie de repartiţie**

funcţie de forţă *(U)*, **funcţie scalară, uniformă şi derivabilă într-un anumit domeniu** D, **a cărui gradient defineşte o forţă în** D: $\mathbf{F} = -\operatorname{grad} U$. *(Şt.G.)*

funcţie de probabilitate, funcţia $f(x) = P(X = x)$, reprezentînd probabilitatea cu care variabila aleatoare discretă X ia valoarea x. *(V.B.)*

funcţie de repartiţie (a unei variabile aleatoare), funcţie reală, cu valori reale, definită prin egalitatea:

$$F(x) = P(X < x),$$

unde X este o variabilă aleatoare unidimensională. Funcţia de repartiţie constituie cel mai important element matematic care caracterizează legea probabilistică a unei variabile aleatoare, şi are un rol important în definirea tuturor caracteristicilor acestei legi. Pentru o variabilă aleatoare de tip discret, putînd lua valorile $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$, funcţia de repartiţie este:

$$F(x) = \sum_{x_i < x} P(X = x_i).$$

Funcţia de repartiţie a legii normale reduse $(N(0,1))$, cunoscută sub numele de funcţia lui Laplace, este:

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{y^2}{2}} \, dy.$$

Se mai numeşte *funcţie de distribuţie*. — *Funcţie de repartiţie empirică*, funcţie care se defineşte pentru o selecţie $x_1, x_2, \ldots, x_n$ dintr-o populaţie statistică, în care valorile de selecţie sînt presupuse ordonate crescător, prin:

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 \text{ dacă } x < x_1 \\ \frac{k}{n} \text{ dacă } x_k < x \leqslant x_{k+1} \\ 1 \text{ dacă } x_n < x. \end{cases}$$ *(A.Ş.)*

funcţie descrescătoare (pe un interval $I \subset E$), funcţie $f: E \to F$ $(E, F \subset \mathbf{R})$, astfel încît dacă $x_1 < x_2$ $(x_1, x_2 \in I)$, atunci $f(x_1) \geqslant f(x_2)$. — *Func-*

ție strict descrescătoare, funcție pentru care $x_1 < x_2$ implică $f(x_1) > f(x_2)$. Ex.: funcția $f(x) = \frac{1}{x}$ este strict descrescătoare pe $(0, \infty)$. Dacă derivata funcției f este (strict) negativă pe I, atunci funcția este (strict) descrescătoare pe I. *(V.B.)*

funcție de selecție → selecție

funcție de variabilă complexă, funcție $f(z)$ cu argument număr complex. Funcțiile elementare de variabilă complexă apar la L. Euler (1769), iar fundamentarea teoriei funcțiilor de variabilă complexă se realizează prin lucrările lui A. Cauchy (1821), K. Weierstrass (1840), B. G. Riemann (1851). În țara noastră, studiul funcțiilor de variabilă complexă începe cu D. Emmanuel (1882), iar S. Stoilow a elaborat importante studii pe linia preocupărilor lui G. Riemann, folosind metode topologice. Teoria funcțiilor complexe s-a dovedit foarte utilă în aplicații, prilejuind rezolvarea multor probleme în diferite ramuri ale matematicii: mecanică (problema celor trei corpuri), hidrodinamică (calculul presiunii unui fluid asupra obstacolului), aerodinamică (profilele de aripi), acustică și optică (aplicații ale ecuației undelor), teoria numerelor (problema distribuției numerelor prime), geometrie (în interpretarea dată de H. Poincaré geometriei lui N. Lobacevski) etc. *(V.B.)*

funcție elementară, fiecare dintre funcțiile polinomială, rațională, radical, putere, exponențială, logaritmică, funcțiile circulare directe și inverse, precum și funcțiile obținute din acestea prin aplicarea succesivă, de un număr finit de ori, a operațiilor algebrice, a operației de compunere și a operației de inversare. *(V.B.)*

funcție exponențială, funcție de forma:

$$f(x) = a^x, \ (a > 0, \ a \neq 1),$$

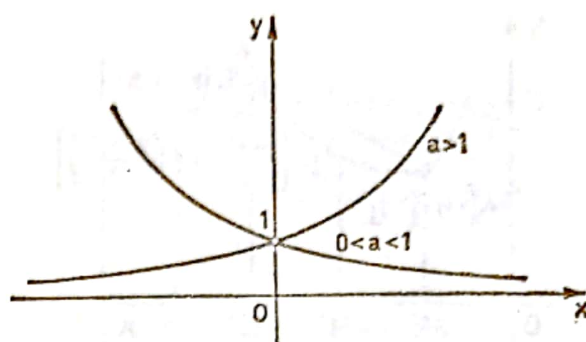


Fig. 74

definită pe mulțimea numerelor reale cu valori reale pozitive (*fig.* 74). Funcția exponențială este monotonă (descrescătoare cînd $0 < a < 1$, sau crescătoare dacă $a > 1$) și reprezintă o aplicație bijectivă a mulțimii numerelor reale pe mulțimea numerelor reale pozitive. A fost introdusă de J. Neper (1614), iar denumirea a fost propusă de Jean Bernoulli (1697). *(V.B.)*

funcție injectivă [fr. *en* „în", *jeter* „a pune"], funcție $f: E \to F$, astfel încît pentru orice $x_1, x_2 \in E$, $x_1 \neq x_2$ să avem $f(x_1) \neq f(x_2)$. Ex.: funcția $f: \mathbf{R}_+ \to \mathbf{R}$ cu $f(x) = x^2$ este injectivă, dar funcția $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $g(x) = x^2$ nu este injectivă căci $g(-x) = g(x)$. Se mai numește *injecție* sau *funcție biunivocă*. *(V.B.)*

funcție impară [lat. *im* „ne", *par-paris* „pereche"], funcție reală $f(x)$ de variabilă reală, cu proprietatea:

$$f(-x) = -f(x).$$

Graficul unei funcții impare este simetric față de originea sistemului de axe carteziene xOy. Ex.: funcția putere cu exponent natural impar (de aci și denumirea acestei clase de funcții), funcțiile sinus, tangentă, cotangentă. Denumirea a fost propusă de L. Euler (1748). *(V.B.)*

funcție inversă (a unei funcții bijective $f: E \to F$; f^{-1}), funcție $f^{-1}: F \to E$

cu $f^{-1}(y) = x$, unde $y = f(x)$. Are proprietățile: $f \circ f^{-1} = \mathrm{Id}_F$, $f^{-1} \circ f = \mathrm{Id}_E$, unde Id_F și Id_E sînt funcțiile identice definite pe F și E. Notația f^{-1} a fost propusă de J. Herchel (1813). Se mai numește *funcție reciprocă*. *(V.B.)*

funcție logaritmică, funcție de forma:

$$f(x) = \log_a x, \ (a > 0, \ a \neq 1)$$

definită pe $(0, \infty)$, cu valori pe $\mathbf{R}$ (fig. 75). Funcția logaritmică este monotonă (strict crescătoare, cînd $a > 1$, sau strict descrescătoare, cînd $0 < a < 1$) și reprezintă o aplicație bijectivă a mulțimii numerelor reale pozitive pe mulțimea numerelor reale. Este inversa funcției exponențiale. Graficul funcției logaritmice (curba logaritmică) a fost realizat de G. Grandi (1701). *(V.B.)*

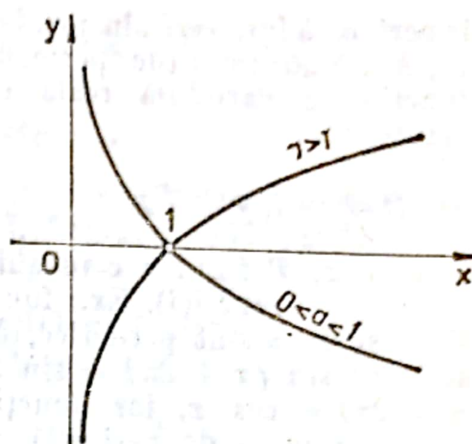


Fig. 75

funcție monogenă [gr. *monos* „unic, singur", *genos* „gen, fel"], funcție complexă $f(z)$, de variabilă complexă $z = x + iy$, definită univoc într-un domeniu D, care are derivată în fiecare punct z_0 din D, adică oricum ar tinde z către z_0 în D, raportul

$$\frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

tinde către o limită finită bine determinată. Condiția necesară și suficientă ca funcția:

$$f(z) = P(x, y) + iQ(x, y)$$

să fie monogenă în punctul $z_0 = x_0 + iy_0$ din D, este ca funcțiile $P(x, y)$ și $Q(x, y)$ să admită derivate parțiale de ordinul întîi continue în (x_0, y_0) și care, pentru $x = x_0$, $y = y_0$, să verifice condițiile Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Studiul funcțiilor de variabilă complexă în care s-a luat ca punct de plecare existența derivatei, fapt strîns legat de considerații geometrice, a fost dezvoltat inițial de A. Cauchy și, independent de acesta, de G. B. Riemann, ei fiind considerați ca fondatorii teoriei geometrice a funcțiilor de variabilă complexă. Denumirea i se datorează lui A. Cauchy (1825). *(V.B.)*

funcție monotonă [gr. *monos* „singur", *tonos* „ton"], funcție crescătoare sau descrescătoare. *(V.B.)*

funcție omogenă [gr. *homos* „asemănător, de același fel", *genos* „gen"] (de gradul n), funcție de m variabile reale, $f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, cu proprietatea: $f(tx_1, tx_2, \ldots, tx_m) = t^n f(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ pentru orice $t \in \mathbf{R}$. Ex.: $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ este o funcție omogenă de gradul 2. *(V.B.)*

funcție pară [lat. *par-paris* „pereche"], funcție reală, $f(x)$, de variabilă reală, cu proprietatea:

$$f(-x) = f(x).$$

Graficul unei funcții pare este simetric față de axa ordonatelor. Ex.: funcția putere cu exponent natural par (de aici și denumirea acestei clase de funcții), funcția cosinus. Denumirea a fost propusă de L. Euler (1748). *(V.B.)*

funcție periodică [gr. *peri* „în jur, împrejur", *hodos* „drum"] (de perioadă T), funcție de variabilă reală cu proprietatea:

$$f(x) = f(x + T),$$

pentru orice x, T fiind o constantă (numită *perioada* funcției). Ex.: funcțiile $\sin x$ și $\cos x$ sînt periodice, de perioadă 2π: $\sin(x + 2\pi) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi) = \cos x$, iar funcția $\operatorname{tg} x$ este periodică de perioadă π: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$. *(V.B.)*

funcție polinomială, funcție de forma

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n,$$

unde $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sînt numere reale (coeficienți). Domeniul maxim de definiție al funcției este mulțimea **R**. Se mai numește *funcție rațională întreagă*. — *Funcția de gradul întîi*, funcția:

$$f(x) = ax + b, \quad a \neq 0.$$

Funcția de gradul întîi este o aplicație bijectivă a mulțimii numerelor reale pe mulțimea numerelor reale, este monotonă (crescătoare, dacă $a > 0$; descrescătoare, dacă $a < 0$) pe întreg domeniul de definiție, iar graficul ei este o dreaptă. — *Funcția de gradul doi*, funcția:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \; a \neq 0.$$

Graficul funcției de gradul doi este simetric față de dreapta ce trece prin punctul de maxim (dacă $a < 0$) sau de minim (dacă $a > 0$), $x = -\frac{b}{2a}$, fiind o parabolă cu focarul $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{1-\Delta}{4a}\right)$ și cu vîrful în punctul $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$, unde $\Delta = b^2 - 4ac$. *(V.B.)*

funcție putere, funcție de forma:

$$f(x) = x^\alpha, \quad (\alpha \in \mathbf{R})$$

definită pe $(0, +\infty)$ cu valori în $(0, +\infty)$. Dacă $\alpha > 0$ funcția se definește și în $x = 0$ prin $f(0) = 0$. *(V.B.)*

funcție radical, funcție de forma:

$$f(x) = \sqrt[n]{x},$$

avînd domeniul de definiție $[0, \infty)$ dacă n este par și **R** dacă n este impar. *(V.B.)*

funcție rațională [lat. *ratio* „raport"], funcție de forma unui raport de polinoame:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots + b_m},$$

definită pe mulțimea numerelor reale x, pentru care $Q(x) \neq 0$. — *Funcția omografică* [gr. *homos* „asemănător", *graphein* „a descrie"], funcția:

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d},$$

unde a, b, c, d, sînt constante supuse condiției $ad - bc \neq 0$. Funcția omografică, definită pe $R - \left\{-\frac{d}{c}\right\}$, este biunivocă și monotonă (strict crescătoare, dacă $ad - bc > 0$, sau strict descrescătoare, dacă $ad - bc < 0$). *(V.B.)*

funcție rațională întreagă → **funcție polinomială**

funcție de două variabile reale, funcție definită pe o mulțime D de perechi de numere reale și cu valori reale; dacă perechii (x, y) îi corespunde numărul u, se folosește notația: $u = f(x, y)$. *(V.B.)*

funcţie reală de m variabile reale ($m > 1$), funcţie definită pe o mulţime D din spaţiul euclidian cu m dimensiuni şi cu valori reale; notaţie: $f(x_1, x_2, \dots x_m)$ sau $f(P)$ (adesea, $x_1, x_2, \dots, x_m$ se consideră coordonate ale punctului P). Introducerea funcţiilor de două şi, apoi, de mai multe variabile se datorează lui L. Euler şi J. Lagrange (1797). *(V.B.)*

funcţie reciprocă → **funcţie inversă**

funcţie simetrică [gr. *syn* „cu", *metron* „măsură"], funcţie de n variabile (cu $n > 1$), care îşi păstrează valoarea dacă variabilele se permută între ele. Ex.: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + \dots + x_{n-1}x_n$. Funcţiile simetrice au fost puse în evidenţă de G. Leibniz (1698). *(V.B.)*

funcţie surjectivă [fr. *sur* „pe", *jeter* „a arunca, a pune"], funcţie $f:E \to F$, astfel încît oricare ar fi $y \in F$, există un argument $x \in E$ cu $f(x) = y$. Ex.: funcţia $f: R \to \mathbf{R}_+$, cu $f(x) = x^2$ este surjectivă, dar funcţia $g: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ cu $g(x) = x^2$ nu este surjectivă, căci nu există $x \in \mathbf{R}$ asfel încît $g(x) = a$, dacă $a < 0$. Se mai numeşte *surjecţie*. *(V.B.)*

funcţie uniform continuă → **funcţie continuă**

funcţii circulare directe, funcţiile $\sin x$ (→*sinus*(3)), $\cos x$ (→*cosinus*(3)), $\operatorname{tg} x$ (→ *tangentă* (3)), $\operatorname{ctg} x$ (→ *cotangentă* (3)). Se mai numesc *funcţii trigonometrice* (G. Kulgel, 1770). *(V.B.)*

funcţii circulare inverse, funcţiile inverse ale funcţiilor circulare directe şi anume:

$$\arcsin x : [-1, +1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\arccos x : [-1, +1] \to [0, \pi]$$

$$\operatorname{arc\,tg} x : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arc\,ctg} x : \mathbf{R} \to (0, \pi).$$

Notaţiile acestor funcţii se datorează lui J. Lagrange (1772) şi H. Lambert (1776). *(V.B.)*

funcţii hiperbolice (de argument real), funcţiile:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ (sinus hiperbolic)}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (cosinus hiperbolic)}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \text{ (tangentă hiperbolică)}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \text{ (cotangentă hiperbolică).}$$

Graficele lor sînt date în fig. 76—79. Sinsusul şi cosinusul hiperbolic verifică relaţia:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = 1.$$

Denumirea este legată de semnificaţia geometrică, referitoare la hiperbola echilateră $X^2 - Y^2 = 1$. Dacă M este un punct al ramurii situate

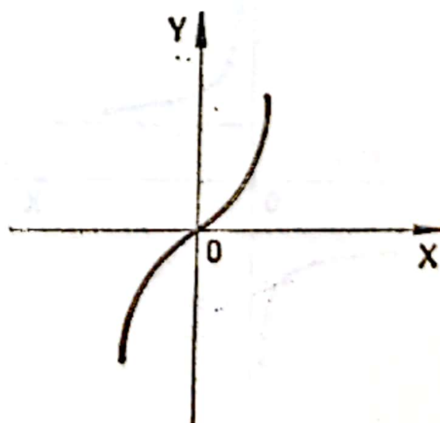


Fig. 76

funcţie reală de m variabile reale $(m > 1)$, funcţie definită pe o mulţime D din spaţiul euclidian cu m dimensiuni şi cu valori reale; notaţie: $f(x_1, x_2, \dots x_m)$ sau $f(P)$ (adesea, $x_1, x_2, \dots, x_m$ se consideră coordonate ale punctului P). Introducerea funcţiilor de două şi, apoi, de mai multe variabile se datorează lui L. Euler şi J. Lagrange (1797). *(V.B.)*

funcţie reciprocă → funcţie inversă

funcţie simetrică [gr. *syn* „cu", *metron* „măsură"], funcţie de n variabile (cu $n > 1$), care îşi păstrează valoarea dacă variabilele se permută între ele. Ex.: $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1x_2 + x_1x_3 + + \dots + x_{n-1}x_n$. Funcţiile simetrice au fost puse în evidenţă de G. Leibniz (1698). *(V.B.)*

funcţie surjectivă [fr. *sur* „pe", *jeter* „a arunca, a pune"], funcţie $f:E\to F$, astfel încît oricare ar fi $y \in F$, există un argument $x \in E$ cu $f(x) = y$. Ex.: funcţia $f:R \to \mathbf{R}_+$, cu $f(x) = x^2$ este surjectivă, dar funcţia $g:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ cu $g(x) = x^2$ nu este surjectivă, căci nu există $x \in \mathbf{R}$ asfel încît $g(x) = a$, dacă $a < 0$. Se mai numeşte *surjecţie*. *(V.B.)*

funcţie uniform continuă → funcţie continuă

funcţii circulare directe, funcţiile $\sin x$ (→*sinus*(3)), $\cos x$ (→*cosinus*(3)), $\operatorname{tg} x$ (→ *tangentă* (3)), $\operatorname{ctg} x$ (→ *cotangentă* (3)). Se mai numesc *funcţii trigonometrice* (G. Kulgel, 1770). *(V.B.)*

funcţii circulare inverse, funcţiile inverse ale funcţiilor circulare directe şi anume:

$$\operatorname{arc\,sin} x : [-1, +1] \to \left[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\operatorname{arc\,cos} x : [-1, +1] \to [0, \pi]$$

$$\operatorname{arc\,tg} x : \mathbf{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\operatorname{arc\,ctg} x : \mathbf{R} \to (0, \pi).$$

Notaţiile acestor funcţii se datorează lui J. Lagrange (1772) şi H. Lambert (1776). *(V.B.)*

funcţii hiperbolice (de argument real), funcţiile:

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \text{ (sinus hiperbolic)}$$

$$\operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \text{ (cosinus hiperbolic)}$$

$$\operatorname{th} x = \frac{\operatorname{sh} x}{\operatorname{ch} x} \text{ (tangentă hiperbolică)}$$

$$\operatorname{cth} x = \frac{\operatorname{ch} x}{\operatorname{sh} x} \text{ (cotangentă hiperbolică).}$$

Graficele lor sînt date în fig. 76—79. Sinsusul şi cosinusul hiperbolic verifică relaţia:

$$\operatorname{ch}^2 x - \operatorname{sh}^2 x = \text{L}.$$

Denumirea este legată de semnificaţia geometrică, referitoare la hiperbola echilateră $X^2 - Y^2 = 1$. Dacă M este un punct al ramurii situate

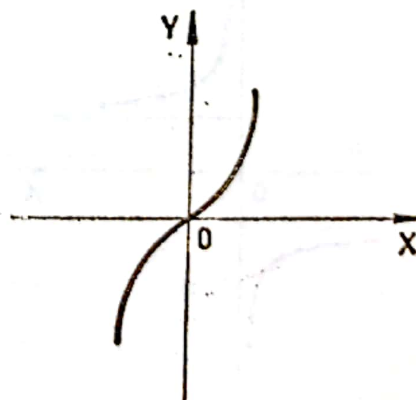


Fig. 76

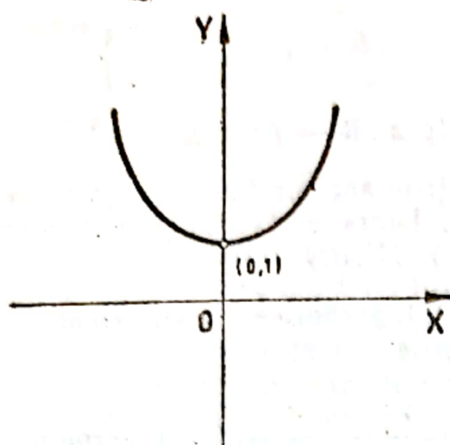


Fig. 77

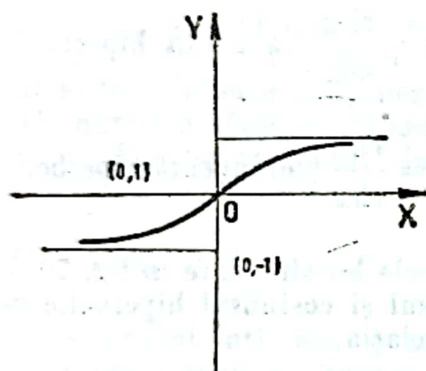


Fig. 78

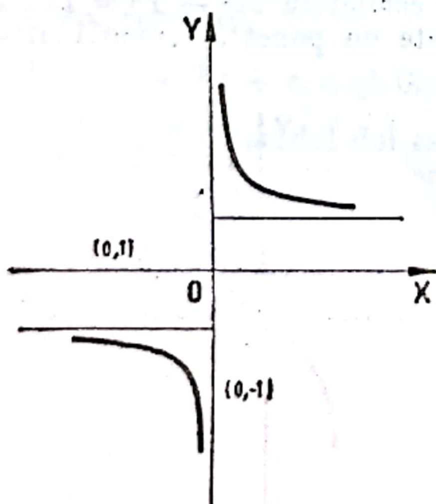


Fig. 79

în semiplanul $X > 0$, argumentul x reprezintă dublul ariei triunghiului curbiliniu AOM, format de semiaxa reală OA, de raza vectoare OM şi de arcul de hiperbolă AM şi $\operatorname{sh} x = NM$, $\operatorname{ch} x = ON$, $\operatorname{th} x = AP$. Au fost introduse de V. Riccati (1757). Funcţiile hiperbolice sînt folosite la studiul fenomenelor electrice. — *Funcţii hiperbolice inverse*, funcţiile inverse ale funcţiilor hiperbolice:

$$\operatorname{arc\,sh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), x \in \mathbf{R};$$

$$\operatorname{arc\,ch} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right),$$
$$|x| \geqslant 1;$$

$$\operatorname{arc\,th} x = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + x}{1 - x}, \quad |x| < 1;$$

$$\operatorname{arc\,cth} x = \frac{1}{2} \ln \frac{x + 1}{x - 1}, |x| > 1.$$

Notaţiile au fost propuse de J. Houël (1878). *(V.B.)*

funcţii speciale, funcţii care intervin în probleme speciale ale fizicii matematice. — *Funcţia gama* $(\Gamma(x))$, funcţia:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

Are proprietatea: $\Gamma(n+1) = n!$, pentru $n \in \mathbf{N}$. Funcţia gama are aplicaţii în fizica matematică, teoria numerelor, teoria probabilităţilor. A fost introdusă de L. Euler (1730), iar denumirea a fost propusă de A. Legendre (1814). — *Funcţia beta*, funcţia de două variabile:

$$B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1 - x)^{q-1} dx,$$
$$(p, q > 0).$$

Este legată de funcţia gama prin relaţia:

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\,\Gamma(q)}{\Gamma(p + q)}.$$

Are proprietățile: $B(p, q) = B(q, p)$ și $B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$. Funcția beta a fost introdusă de L. Euler (1730), iar denumirea a fost dată de J. Binet. *(V.B.)*

funcții trigonometrice → **funcții circulare directe**

funcțională, funcție definită pe o mulțime de funcții avînd valori reale. Ex.: funcționala care atașează fiecărei funcții $f(x)$, integrabile pe intervalul $[a, b]$, numărul real $\int_a^b f(x)dx$. Noțiunea a fost introdusă de V. Volterra, iar denumirea a fost propusă de J. Hadamard (1910); la noi, primul care a utilizat-o a fost Gr. C. Moisil (începînd cu 1928). *(V.B.)*

fus sferic, partea din suprafața sferei cuprinsă între două semicercuri mari

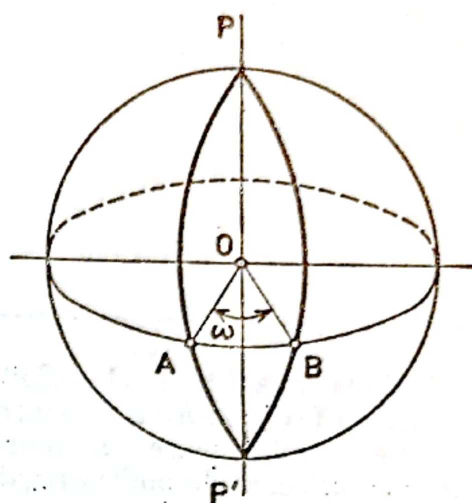


Fig. 80

(fig. 80). Aria fusului sferei cu raza r, avînd unghiul de $u°$, este:

$$A_u = \frac{\pi r^2 u°}{90°}.$$ *(V.B.)*

G

Galois [galuạ], **Évariste** (1811—1832), matematician francez. Arestat pentru ideile sale revoluționare, a murit într-un duel înscenat de poliția regală franceză. Fondator al algebrei moderne; a introdus noțiunea de grup pe care a folosit-o la rezolvarea ecuațiilor algebrice. Lucrările sale, alături de cele ale lui N. Abel și A. Cauchy, au constituit punctul de plecare al teoriei moderne a funcțiilor algebrice. Importantele sale memorii, depășind puterea de înțelegere a epocii sale, au apărut postum: *Oeuvres mathématiques*, 1897. *(V.B.)*

Gauss, Karl Friedrich (1777—1855), matematician și astronom german. Profesor la Universitatea din Göttingen și director al Observatorului astronomic de aici. Redescoperind legea reciprocității resturilor pătratice (găsită intuitiv de L. Euler și demonstrată insuficient de A. Legendre) îi dă șase demonstrații diferite. A conceput metoda celor mai mici pătrate; a rezolvat celebra problemă a construcției cu rigla și compasul a poligoanelor regulate la care numărul laturilor este un număr prim (construind astfel, poligonul regulat cu 17 laturi). În celebra sa teză de doctorat, Gauss a demonstrat teorema fundamentală a algebrei. A întemeiat calculul cu numere complexe (lui datorindu-i-se și denumirea acestor numere), a dat interpretarea geometrică a acestora, stabilind corespondența biunivocă dintre numerele complexe și punctele planului (1812); a introdus seria hipergeometrică ce a avut un rol important în teoria ecuațiilor diferențiale. În geometria diferențială, a dat formele fundamentale ale suprafețelor, curbura totală (care îi poartă numele), reprezentarea sferică a suprafețelor, o teorie a liniilor geodezice etc. A descoperit prin calcul (1800) planetele Ceres, Pallas, apoi Vesta, Junona; a determinat diferența de latitudine dintre Göttingen și Altona. Op. pr.: *Disquitiones arithmeticae*, 1801; *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, 1809; *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, 1827. *(V.B.)*

Gazeta matematică, prima revistă specială de matematică în limba română, cu cea mai lungă durată, care apare din 15 sept. 1895 pînă în prezent. După cum se precizează în articolul inaugural, scopul acestei reviste este: a) publicarea de articole originale de matematică; b) dezvoltarea gustului pentru studiul acestei științe și al cercetărilor originale. Deține un rol important în propășirea învățămîntului matematic din țara noastră, în pregătirea primilor pași ai școlii matematice române, în cultivarea unui spirit de solidaritate științifică. Fondatorii acestei reviste au fost: Vasile Cristescu, Andrei Ioachimescu, Ion Ionescu, Victor Balaban, Tancred Constantinescu, Emanoil Davidescu, Mauriciu Kinbaum,

Nicolae Niculescu, Mihail Roco și Ioan Zottu. O bogată activitate au desfășurat, încă de la apariția revistei, G. Țițeica și N. Abramescu, cărora li s-au alăturat mulți alții. A apărut la București, iar în timpul primului război mondial, la Iași, în forma inițială pînă în 1949, cînd a fost denumită „Gazeta matematică și fizică", seriile A și B; începînd cu 1964 s-a revenit la vechea denumire „Gazeta matematică", Seria A (cuprinzînd studii, articole de metodologie matematică, note, probleme și exerciții de matematică superioară, pentru studenți și profesorii din învățămîntul liceal) și Seria B (adresată elevilor). Titulatura a fost adoptată la sugestia lui V. Balaban. *(V.B.)*

generatoare [lat. *generator-oris* „cel care produce"], curbă care, deplasîndu-se după o anumită lege, generează o suprafață. *(V.B.)*

geodezică [gr. *ge* „pămînt", *daiein* „a diviza, a împărți"], curbă de pe o suprafață care realizează distanța minimă, măsurată pe curbă, între două puncte de pe acea suprafață. Geodezica este traiectoria unui mobil pe o suprafață, în absența forțelor (L. Euler, 1736). Pentru o suprafață regulată, dată prin ecuația implicită:

$$F(x, y, z) = 0,$$

ecuația diferențială a liniilor geodezice ale ei are forma:

$$\frac{d^2x}{F'_x} = \frac{d^2y}{F'_y} = \frac{d^2z}{F'_z}.$$

Ex.: pe sferă, geodezicele sînt arce de cercuri mari; pe un cilindru de rotație sînt elice; în general, geodezicele suprafețelor desfășurabile devin drepte prin desfășurare. Denumirea a fost dată de P. Laplace *(Mécanique céleste*, 1798*)* pentru cazul sferoidului terestru și a fost extinsă la suprafețele arbitrare de J. Liouville (1844). Studiul geodezicelor începe cu Jean Bernoulli (1687), care a stabilit ecuațiile lor diferențiale. Se mai numește *linie geodezică. (V.B.)*

geodezie [gr. *ge* „pămînt", *daiein* „a împărți"], știință care are ca obiect determinarea formei și dimensiunilor globului pămîntesc, măsurarea suprafeței terestre, împărțirea ei și măsurarea distanțelor dintre diferitele puncte, în scopul reprezentării acesteia pe planuri și hărți. Cercetările lui Jean și Jacques Bernoulli, L. Euler, A. Clairaut, P. Laplace ș.a. au dus la fundamentarea geodeziei ca știință. Denumirea, folosită inițial pentru desemnarea geometriei practice, se datorează lui Arhimede (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

geometrie [gr. *ge* „pămînt", *metron* „măsură"], ramură a matematicii care studiază formele corpurilor și rapoartele lor spațiale. Cuprinde geometria euclidiană, geometria analitică, geometria proiectivă, geometria afină, geometria descriptivă, geometria cinematică, geometria diferențială a curbelor și suprafețelor, geometria axiomatică, geometria neeuclidiană, geometria spațiilor generalizate, geometria globală, topologia combinatorie. Primele cunoștințe de geometrie, așa cum apar în documentele egiptene și caldeene (2000 de ani î.e.n.) constau în reguli practice pentru aflarea ariei triunghiului, a paralelogramului, a trapezului, a volumului paralelipipedului, piramidei și trunchiului de piramidă. Era cunoscută relația dintre catete și ipotenuza unui triunghi dreptunghic, în unele cazuri numerice. Geometria a fost dezvoltată foarte mult în Grecia antică, punîndu-se greutatea pe raționament. Tales (sec. 6 î.e.n.) a inițiat teoria figurilor asemenea. În școala lui Pitagora (?580—500 î.e.n.) era cunoscută teorema care-i poartă numele, în toată generalitatea, era cu-

noscută construcţia pentagonului regulat, folosind media şi extrema raţie, erau cunoscute poliedrele regulate. Hipocrate (sec. 5 î.e.n.) a trasat metoda raţionamentului deductiv, a calculat ariile unor figuri formate de arce de cerc. În şcoala lui Platon (429—348 î.e.n.) era cunoscută metoda locurilor geometrice. De la Euclid (sec. 3 î.e.n.) s-a păstrat cea mai veche carte de aritmetică şi geometrie, *Elementele*, completă, sistematică, concisă şi expusă axiomatic, carte de bază pentru studiul geometriei, primele două capitole ale cărţii fiind predate în universităţile medievale. Arhimede (?287—212 î.e.n.) a dat formula volumului sferei, a determinat centrul de greutate al triunghiului, trapezului şi segmentului parabolic, a considerat spirala care-i poartă numele, a determinat diverse arii şi volume mărginite de arce de parabolă sau de cuadrice de rotaţie; Apollonius (?262—200 î.e.n.) a studiat, sistematic şi profund, conicele. Ptolemeu (?120—190) a studiat triunghiurile şi patrulaterele situate pe sferă. Pappus (sec. 3) a dat numeroase teoreme care conţin germenii unor noţiuni proiective şi altele demonstrate prin consideraţii de statică. În Renaştere, Gerard Desargues (1593—1662) a dat reguli de reprezentare p'ană a figurilor din spaţiu, teorema triunghiurilor omologice; René Descartes (1596—1650) a creat, împreună cu Pierre Fermat (1601—1665), geometria analitică (1637) şi au aplicat analiza şi geometria analitică la studiul diverselor curbe plane speciale, studiu la care au contribuit şi Evanghelista Torricelli (1608—1647), Cristiaan Huygens (1629—1695), Wilhelm Leibniz (1646—1716), Jacques Bernoulli (1654—1705), Pierre Varignon (1654—1722), Jean Bernoulli (1667—1748), iar P. Fermat a studiat şi diverse teoreme de maxime şi minime geometrice. John Wallis (1616—1703) a arătat că axioma de paralelism este echivalentă cu afirmaţia că există figuri asemenea. Blaise Pascal (1623—1662) a dat primul exemplu de obţinere a unei teoreme relativ la conice dintr-o teoremă valabilă în cerc, teorema exagonului înscris. Philippe Lahire (1640—1718) a scris ecuaţia unui paraboloid eliptic, primul exemplu de ecuaţie a unei suprafeţe, introducînd coordonate în spaţiu. Isaac Newton (1642—1727) a arătat că există cinci tipuri de cubice, după modul în care le proiectăm. În Renaştere, în locul *Elementelor* lui Euclid, au fost scrise cărţi mai accesibile pentru învăţămînt, datorate diverşilor pedagogi. În secolul 18, privitor la fundamentele geometriei, Heinrich Lambert (1728—1777) a arătat că o geometrie în care axioma euclidiană de paralelism nu este valabilă s-ar realiza pe o sferă de rază imaginară, iar Adrien Legendre (1752—1833) a dat teoremele fundamentale de geometrie absolută, privind suma unghiurilor unui triunghi. În geometria analitică plană, au fost studiate proprietăţile generale ale curbelor algebrice prin lucrările lui James Stirling (?1696—1770), Colin Maclaurin (1698—1746), Gabriel Cramer (1704—1752). Leonhard Euler (1707—1783) a studiat sistematic reducerea ecuaţiei conicelor; Sylvester Lacroix (1765—1843) a dat o expunere sistematică a geometriei analitice plane (1798). În 1789 a fost creată geometria descriptivă de către Gaspard Monge (1746—1816). A fost definitivată geometria analitică în spaţiu prin lucrările lui L. Euler, Joseph Lagrange (1736—1813), G. Monge. A fost iniţiată teoria curbelor strîmbe şi a suprafeţelor prin lucrarea, din 1731, a lui Alexis Clairaut (1713—1765), care a scos în evidenţă torsiunea, a dat formula elementului de arc al unei curbe strîmbe şi o caracterizare geometrică a geodezicelor pe

suprafețele de rotație. L. Euler a introdus triedrul fundamental, într-un punct al unei curbe, a studiat suprafețele desfășurabile și variația razei de curbură a curbei unei suprafețe care trece printr-un punct; J. Lagrange a studiat reprezentarea conformă a suprafețelor; iar G. Monge desfășurata curbelor strîmbe și a introdus liniile de curbură pe o suprafață; Jean Meusnier (1754—1793) a studiat variația curburii normale. În secolul 19, în ceea ce privește fundamentele geometriei s-a rezolvat problema celebră a postulatului paralelelor. În 1829, Nikolai Lobacevski (1793—1856) și, în 1831, Janos Bolyai (1802—1860) au arătat că axioma de paralelism este independentă de celelalte axiome; Karl Gauss (1777—1855) a rezolvat altă problemă celebră, a posibilității construcției poligoanelor regulate; David Hilbert (1862—1943) a dat o nouă axiomatizare geometriei, în 1899. Geometria diferențială a suprafețelor s-a definitivat prin lucrările lui Charles Dupin (1784—1873), care a introdus reprezentarea parametrică, formele fundamentale și a scos în evidență proprietățile intrinseci, și ale lui Gaston Darboux (1842—1917) care, în cartea sa din 1887—1896, dă rezultatele fundamentale ale geometriei diferențiale clasice. A fost creată geometria proiectivă prin lucrările lui: Victor Poncelet (1788—1867), Jakob Steiner (1796—1863), August Möbius (1790—1868), Michel Chasles (1793—1880), geometria algebrică prin lucrările lui: Julius Plucker (1801—1868), George Salmon (1819—1904), Alfred Clebsch (1833—1872), Georges Halphen (1844—1888), Max Noether (1844—1921) și geometria cinematică prin lucrările lui Victor Mannheim (1831—1906), Karl Culman (1821—1881), Arthur Schoenfliess (1853—1928). S-a trecut la spațiul euclidian cu *n* dimensiuni prin lucrările lui Arthur Cayley (1821—1895), Hermann Grassmann (1809—1877), apoi la spațiul cu o metrică mai generală prin lucrările lui Bernhard Riemann (1826—1866), pentru care Gregorio Ricci (1853—1925) a introdus calculul tensorial. Felix Klein (1849—1925) a dat, în 1872, o extindere considerabilă a noțiunii de geometrie, ca studiu al invarianților unui grup de transformări. Henri Poincaré (1854—1912) a creat topologia. În secolul 20 au obținut rezultate remarcabile: Luigi Bianchi (1856—1930), Corrado Segre (1863—1924), Élie Cartan (1869—1951), Veniamin Kagan (1869—1953), Tullio Levi Civita (1873—1941), Francesco Severi (1879—1961), Serghei Finikov (1883—1964), Jan Schooten (n. 1883), Wilhelm Blaschke (1885—1961), Herman Weyl (1885—1955), Enrico Bompiani (n. 1889), Eduard Cech (1893—1960), Paul Finsler (n. 1894), Pavel Aleksandrov (n. 1896), Erich Kähler (n. 1906), Lev Pontriaghin (n. 1908), Viktor Vagner (n. 1908), Aleksandr Aleksandrov (n. 1912), Alexei Pogorelov (n. 1919), Shiing Shah Chern, L. Eisenhart, S. Kobayashi, K. Nomizu, W. Slebodzinski, Andrè Weyl, Oswald Veblen. În țara noastră, contribuții importante în domeniul geometriei diferențiale au adus Gheorghe Țițeica (1873—1939), Alexandru Myller (1879—1965), Octav Mayer (1895—1966), Dan Barbilian (1895—1961), Gheorghe Vrănceanu (n. 1900), Alexandru Pantazi (1896—1948), Tiberiu Mihăilescu (n. 1902), Mendel Haimovici (1906—1973) ș.a. *(N.M.)*

geometrie afină, subgrup al geometriei proiective, care lasă un plan fix, numit planul de la infinit. În această geometrie raportul segmentelor de pe aceeași dreaptă este invariant fundamental. De asemenea sînt invariante raportul ariilor, noțiu-

nea de paralelism, mijlocul unui segment, centrul unei curbe etc. Un caz particular de transformare afină este proiecția paralelă de pe un plan pe altul. *(N.M.)*

geometrie algebrică, ramură a geometriei care studiază curbele algebrice, suprafețele algebrice și, în general, varietățile definite prin ecuații algebrice. *(N.M.)*

geometrie analagmatică, ramură a geometriei care studiază figurile generate de cercuri și de sfere. Transformările grupului analagmatic sînt asemănările și inversiunile. Geometria analagmatică conservă unghiul a două curbe sau suprafețe, deci aparține grupului conform. *(N.M.)*

geometrie analitică [gr. *ana* „prin", *litikos*, „descompunere"], ramură a geometriei în care se studiază proprietățile figurilor geometrice cu ajutorul calculului algebric. După concepția lui R. Descartes *(Application de l'Algèbre à la théorie des courbes*, 1637) — deși, cum menționează însuși Descartes, încă din 1616 elaborase metoda sa — referitoare la figurile plane și extinsă pentru figurile spațiale de A. Clairaut *(Traité des courbes à la double courbure*, 1731), o figură e raportată la un sistem de coordonate astfel că, punctelor care compun figurile geometrice (de aici denumirea acestei geometrii) li se asociază unul sau mai multe numere (coordonate), ceea ce face ca proprietățile figurilor să fie exprimate prin relații între coordonate. Denumirea își are originea în expresia *ars analytica* a lui F. Viète (1593), fiind introdusă cu semnificația curentă de S.F. Lacroix (1798), iar ca titlu apare pentru prima dată la J.G. Garnier *(Eléments de géométrie analitique*, 1801); această titulatură s-a statornicit odată cu clasificarea științelor făcută de A.M. Ampère (1838). *(V.B.)*

geometrie axiomatică, ramură a geometriei care studiază fundamentarea geometriei din punct de vedere logic, plecînd de la un număr finit de axiome; sistemul axiomatic trebuie să fie lipsit de contradicții, axiomele să fie independente între ele și să formeze un sistem complet, adică în stare să rezolve toate problemele geometriei. *(N.M.)*

geometrie cinematică, ramură a geometriei care studiază figurile mobile ce se deformează în anumite condiții. Geometria cinematică este fundamentală pentru teoria mecanismelor. *(N.M.)*

geometrie descriptivă [lat. *descriptio* „desen, reprezentare"], ramură a geometriei în care figurile spațiale sînt reprezentate printr-un desen plan, folosind dubla proiecție ortogonală și o rabatere (dacă se urmărește determinarea dimensiunilor corpului), sau reprezentările axonometrice și perspectiva (dacă se urmărește aspectul corpului) ș.a. De obicei, sînt utilizate ca plane de proiecție planele triedrului tridreptunghic ale sistemului de referință: planul H (planul orizontal de proiecție, xOy), planul V (planul vertical de proiecție, xOz) și planul W (planul de profil, yOz). Apariția geometriei descriptive este, chiar din antichitate, legată de practica arhitecților și a pictorilor. Ca știință modernă, a fost creată de G. Monge *(Géométrie descriptive*, 1789). Geometria descriptivă are numeroase aplicații în arhitectură, construcții, teoria umbrelor, topografie; este baza teoretică a desenului tehnic. *(V.B.)*

geometrie diferențială, ramură a geometriei care studiază figurile geometrice (curbe, suprafețe, varietăți n — dimensionale), utilizînd metodele analizei matematice. Are aplicații în mecanică, în fizica teoretică, geodezie etc. *(N.M.)*

geometrie euclidiană [după numele lui Euclid], ramură a geometriei dezvoltată pe baza postulatului lui Euclid (printr-un punct exterior unei drepte şi în planul care le conţine există o singură paralelă cu cea dată), pe noţiunea de distanţă măsurată prin teorema lui Pitagora; are ca grup fundamental de transformări grupul deplasărilor (translaţii şi rotaţii) şi grupul omotetiilor, care lasă invariante egalitatea, paralelismul şi unghiurile. Se mai numeşte *geometrie parabolică* deoarece ea se realizează pe suprafeţele parabolice (planul, suprafeţele desfăşurabile) ce au curbura totală nulă. *(V.B.)*

geometrie globală, ramură a geometriei diferenţiale care studiază relaţiile dintre structurile diferenţiale şi topologice ale unei varietăţi diferenţiale. *(N.M.)*

geometrie integrală, ramură a geometriei în care se studiază proprietăţile măsurilor mulţimilor de elemente geometrice, probabilităţile geometrice, invarianţii integrali ai unui grup ş.a. Denumirea apare pentru prima dată la W. Blaschke *(Integralgeometrie,* 1935), deşi prima problemă de la care porneşte geometria integrală — „problema acului", o problemă de probabilităţi geometrice — a fost considerată de G.L. de Buffon (1777). *(V.B.)*

geometrie neeuclidiană, ramură a geometriei care diferă de geometria euclidiană prin axioma de paralelism. — *Geometria hiperbolică* (geometria Lobacevski-Bolyai), geometria dezvoltată pe axioma: printr-un punct exterior unei „drepte", în „planul" care le conţine, există două „drepte" distincte paralele cu cea dată. Denumirea este în legătură cu faptul că această geometrie se realizează pe suprafeţele hiperbolice (de exemplu, pe pseudosferă) la care în orice punct al lor curbura totală este o constantă negativă. Primele lucrări tipărite de geometrie neeuclidiană le constituie articolele lui N. Lobacevski *O nacialah gheometrii* (1829/1830) şi lucrarea lui J. Bolyai, *Appendix* (1831), deşi asupra acestei geometrii gîndise şi K. Gauss (1816). — *Geometria eliptică* (geometria lui G.B. Riemann), geometria dezvoltată pe axioma: printr-un punct exterior unei „drepte", în „planul" care le conţine, nu există nici o „dreaptă" care să fie paralelă cu cea dată. G.B. Riemann *(Über die Hypothesen welche der Geometrie zu Grunde liegen,* 1854 — publicată postum, 1867) prezintă geometria care, într-un anumit sens, se interpretează pe suprafaţa unei sfere (de unde şi epitetul „sferică"); aici rolul „dreptelor" (finite şi închise) e jucat de cercurile mari ale sferei, care se intersectează totdeauna în două puncte diametral opuse (de aceea în această geometrie nu mai este valabilă propoziţia din geometria euclidiană şi hiperbolică: două puncte diferite determină numai o dreaptă). Denumirea se motivează prin aceea că această geometrie se realizează pe suprafeţele eliptice, la care în orice punct curbura totală este o constantă pozitivă. Concordanţa logică a geometriilor neeuclidiene a fost evidenţiată prin crearea unor modele euclidiene pe care ele se realizează, de către E. Beltrami (1868), F. Klein (1871), H. Poincaré (1880) ş.a. Inexistenţa altui sistem de geometrie posibil afară de geometriile lui Euclid, Riemann, Lobacevski-Bolyai, precum şi independenţa fiecăreia de celelalte două au fost demonstrate de J.M. Tilly. Geometriile neeuclidiene au o mare importanţă în ştiinţă: ele şi-au dovedit eficacitatea ca teorie a relaţiilor spaţiale; prin generalizarea lor s-a ajuns la noţiunea de spaţiu abstract; însuşi N. Lobacevski a aplicat geometria sa la calculul integralei definite; de asemenea, lui

H. Poincaré i-a prilejuit crearea funcțiilor automorfe; și-a găsit aplicare în teoria numerelor; legea compunerii relativiste a vitezelor este identică cu legea compunerii segmentelor într-o geometrie tridimensională de tip Lobacevski-Bolyai; tot astfel, în optică și în teoria generală a propagării undelor, o descriere neeuclidiană a fenomenelor este uneori mai adecvată decît una euclidiană. Rezultatele întîlnite în geometriile neeuclidiene apar adesea într-o formă oarecum paradoxală și sînt în contrast cu felul nostru obișnuit de a vedea lucrurile — totuși ele intervenind în teoria relativității generalizate, desvăluie legătura profundă dintre spațiu și materie: proprietățile geometrice ale spațiului depind de distribuția maselor în Univers și de scara distanțelor. *(V.B.)*

geometrie proiectivă, ramură a geometriei avînd ca obiect studiul proprietăților invariante ale transformărilor proiective (proprietăți relative la poziția punctelor, dreptelor și planelor — de exemplu, coliniaritatea, concurența etc. —, care nu se schimbă prin proiecția figurii); invarianți fundamentali sînt rapoartele anarmonice și gradul curbelor și suprafețelor. Începuturile geometriei proiective apar odată cu lucrarea lui G. Desargues, *Brouillon project d'une atteinte aux événements des rencontres du cone avec un plan* (1639); contribuții de seamă au adus J. Poncelet (1822) și apoi Ch. Staudt (1849), care împreună cu F. Enriques, o axiomatizează. *(V.B.)*

geometrie riemanniană, ramură a geometriei care studiază proprietățile unui spațiu cu n dimensiuni, în care s-a introdus o metrică, printr-o formă diferențială pătratică. Geometria intrinsecă a unei suprafețe este un caz particular de geometrie riemanniană. Este fundamentală pentru teoria relativității generale. *(N.M.)*

geometrografie [*geometrie, graphein* „a scrie"], studiul determinării soluției celei mai simple și exacte a unei probleme de construcție geometrică. Simplicitatea și exactitatea construcțiilor se apreciază după numărul liniilor desenate și al operațiilor de pregătire necesare pentru desenarea figurii corespunzătoare problemei. La construcțiile cu rigla și compasul sînt considerate ca operații fundamentale următoarele:
a) potrivirea riglei pe un punct *(R_1)*;
b) trasarea unei drepte de-a lungul riglei așezate *(R_2)*;
c) așezarea vîrfului compasului într-un punct dat, sau într-un punct arbitrar al unei linii *(C_1)*;
d) descrierea cercului sau a unui arc de cerc după ce s-a așezat vîrful compasului *(C_2)*.
Fiecărei construcții i se asociază un simbol:

$$l_1R_1 + l_2R_2 + m_1C_1 + m_2C_2,$$

unde l_1, l_2, m_1, m_2 reprezintă, respectiv, numărul operațiilor executate, iar numărul:

$$S = l_1 + l_2 + m_1 + m_2,$$

se numește simplicitate, în timp ce numărul:

$$E = l_1 + m_1$$

redă măsura exactității. Aceste criterii reprezintă o schematizare a gradului de simplicitate și de exactitate, acestea depinzînd și de alte condiții. Ex.: construcției bisectoarei unui unghi îi corespunde simbolul $2R_1 + 1R_2 + 3C_1 + 3C_2$, iar $S = 9$, și $E = 5$; problemei determinării centrului unui cerc îi corespunde simbolul $4R_1 + 2R_2 + 3C_1 + 3C_2$, cu $S = 12$ și $E = 7$. Primul care a comparat între ele diferite construcții care duc la rezolvarea unei probleme, sub criteriul simplicității și al exactității, a fost J. Steiner (1833),

iar introducerea primelor criterii pentru stabilirea acestora, precum şi denumirea de geometrografie se datorează lui E. Lemoine (1902). *(V.B.)*

Germain [jermẽ], **Sophie** (1776—1831), matematiciană franceză. Premiată de Academia de Ştiinţe din Paris pentru o lucrare privind teoria matematică a suprafeţelor elastice: *Mémoire sur les vibrationes des lames elastiques*, 1816. Lucrări de teoria numerelor şi de fizică matematică. *(V.B.)*

Ghermănescu, Mihail (1899—1962), matematician român. Studii la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti (doctor la Universitatea din Cluj, 1933). Profesor la Politehnica din Timişoara (din 1940) şi la Institutul de construcţii din Bucureşti (din 1953). Lucrări referitoare la serii trigonometrice, derivata areolară (a introdus noţiunile de derivată parţială areolară şi diferenţială totală areolară), ecuaţii cu derivate parţiale (ecuaţia lui Ghermănescu), ecuaţii funcţionale, teoria funcţiilor. Op. pr.: *Ecuaţii funcţionale*, 1960; *Ecuaţiile fizicii matematice*, 1961. *(V.B.)*

Ghika, Alexandru (1902—1964), matematician român. Studii la Paris (doctor la Sorbona, 1929). Profesor la Universitatea din Bucureşti (din 1945). Membru al Academiei R.S. România (din 1963; membru corespondent din 1955). Contribuţiile sale se referă la analiza funcţională, unde a introdus noţiunile de funcţie cuasianalitică generală, paranormă, poliedroid convex, modul unitar topologic, precum şi operaţiile topologice de limită proiectivă, limită inductivă, reuniune şi intersecţie topologică de spaţii local convexe. Op. pr.: *Analiză funcţională*, 1967. *(V.B.)*

giroscop [gr. *gyros* „cerc", *skopein* „a privi"], solid cu un punct fix care are o mare viteză unghiulară iniţială în jurul unei axe principale de inerţie ce trece prin centrul maselor. *(Şt.G.)*

Goursat [gursa], **Edouard** (1858—1936), matematician francez. Profesor la Universitatea din Toulouse, apoi la Şcoala Normală Superioară din Paris şi în continuare la Sorbona. Autor al unor importante cercetări asupra teoriei funcţiilor, ecuaţiei hipergeometrice, ecuaţiilor cu derivate parţiale, ecuaţiilor integrale. În geometrie, contribuţiile sale privesc, mai ales, suprafeţele minime (pentru care a fost premiat de Academia de Ştiinţe din Paris) şi deformarea suprafeţelor. Autor al unui foarte răspîndit *Cours d'Analyse mathématique*, 3 volume, 1913—1915. *(V.B.)*

grad [lat. *gradus* „treaptă"], unitate de măsură pentru unghiuri, reprezentînd o unitate divizionară a unghiului drept. — *Grad centesimal* [lat. *centesimus* „a suta parte"], grad egal cu a suta parte dintr-un unghi drept, notat 1^g. Gradul centesimal conţine 100 de unghiuri de un minut, 1^c, iar acesta conţine 100 de unghiuri de o secundă, 1^{cc}. Ex.: $u = 52^g 04^c 97^{cc}$. Gradul centesimal a fost introdus de J. Delambre (1791). — *Grad sexagesimal* [lat. *sexagesimus* „al 60-lea"], grad egal cu a 90-a parte dintr-un unghi drept, notat $1°$. Gradul sexagesimal conţine 60 de unghiuri de un minut, $1'$, iar acesta conţine 60 de unghiuri de o secundă, $1''$. Gradul sexagesimal era folosit din antichitate, mai ales de astronomii din ţările elenistice, fiind inspirat de sistemul de numeraţie sexagesimal, folosit în Mesopotamia (c. 2000 î.e.n.). Minutul şi secunda sexagesimală precum şi notaţiile lor, au fost introduse de Cl. Ptolemeu (sec. 2). *(V.B.)*

grade de libertate, parametrii independenţi necesari pentru a defini poziţia unui sistem de puncte mate-

riale. Ex.: un punct material liber are 3 grade de libertate, un punct material obligat să rămînă pe o curbă fixă are un grad de libertate, un sistem de 2 puncte materiale care sînt obligate să păstreze o distanță invariabilă între ele are 5 grade de libertate. *(Șt.G.)*

gradient (al funcției $U = f(x, y, z)$, dată într-un domeniu D; grad U), vector care are ca proiecții pe axele triedrului cartezian $Oxyz$ pe $\partial U/\partial x$, $\partial U/\partial y$, $\partial U/\partial z$:

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\mathbf{k}.$$

Gradientul într-un punct este normal la suprafața U = const. (numită suprafață de nivel), direcția sa reprezentînd direcția celei mai rapide creșteri a funcției U. În mod formal, gradientul se obține prin aplicarea operatorului nabla unei funcții scalare de punct (după concepția lui J. Gibbs):

$$\text{grad } U = \nabla U.$$

Funcția U se mai numește, uneori, *potențial*, cînd gradientul apare ca un cîmp vectorial potențial. Noțiunea de gradient are obîrșia în lucrările lui W. Hamilton (1853), iar denumirea și notația se datoresc lui G.B. Riemann (1854) și J.C. Maxwell (1855). *(V.B).*

gradul unei curbe algebrice, gradul polinomului $P(x, y)$, în x și y, unde $P(x, y) = 0$ este ecuația curbei. *(V.B.)*

gradul unui polinom → polinom

graf [gr. *graphe* „scriere, desen"], ansamblu format dintr-o mulțime E și o aplicație f a lui E în mulțimea părților sale. Elementele mulțimii E (numite vîrfuri) se reprezintă prin puncte și dacă $x_j = f(x_i)$ se unesc punctele x_i, x_j cu o săgeată cu vîrful

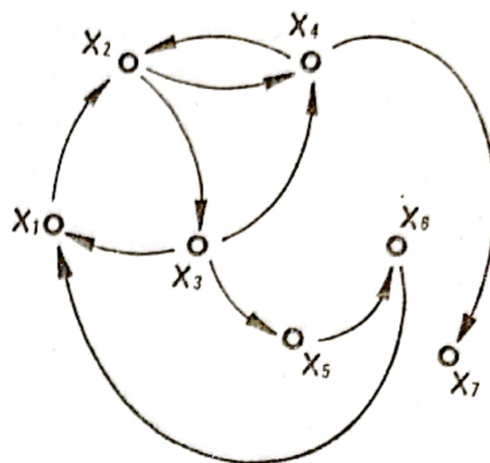


Fig. 81

în x_j (fig. 81). Orice graf (care nu este multigraf, adică vîrfurile nu sînt unite prin mai multe laturi) admite o reprezentare matricială; matricea, finită sau infinită, a unui graf este o matrice pătrată de ordin egal cu card$E$, ale cărei elemente sînt $a_{ij} = 1$, dacă există o latură care unește pe i cu j (orientată de la i la j) sau $a_{ij} = 0$, în caz contrar. Grafele matematizează după o schemă comună diferite situații, simplificîndu-le. Apărută ca un capitol legat mai mult de matematica distractivă, teoria grafelor a dobîndit o importanță deosebită datorită numeroaselor ei aplicații: la construirea schemelor de circuite electrice, la rezolvarea unor probleme de transport, în teoria relațiilor matematice, precum și în alte domenii: lingvistica matematică, arheologie, geografie, biologie, chimie ș.a. Prima lucrare cunoscută de teoria grafelor — un început al topologiei — aparține lui L. Euler (1736); denumirea a fost atribuită de D. König (1936). *(V.B.)*

grafic [gr. *graphikos* „scriere, desen"] (al unei funcții $f: E \to F$; G_f), mulțimea perechilor de forma $(x, f(x))$, cu $x \in E$:

$$G_f = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}.$$

G_f este o parte a produsului cartezian $E \times F$. Două funcții sînt egale dacă și numai dacă au același grafic. *(V.B.)*

Grassmann, Hermann Günther (1809—1877), matematician și filolog german. Opera sa (rămasă aproape neobservată la apariția ei) *Die Wissenschaft der extensiven Grössen oder die Ausdehnungslehre* (1844) cuprinde importante contribuții, conținînd într-o formă pur geometrică calculul cu sisteme de numere cu totul generale, așa numitele mărimi extensive constînd din n unități; tot aici, a exprimat și dezvoltat (aproape concomitent cu A. Cayley) noțiunea de spațiu cu n dimensiuni; a introdus cele șase coordonate „plückeriene" ale dreptei (pe care J. Plücker le-a utilizat mai tîrziu în lucrările sale), a dezvoltat soluția „problemei lui Pfaff" privind integrarea unei anumite ecuații cu derivate parțiale. În alte lucrări a abordat o nouă teorie a electrodinamicii, precum și teoria combinării culorilor. La vîrsta de 53 de ani a întreprins studiul limbii sanscrite, întocmind un *Wörtherbuch zum Rig-Veda*, 1875. *(V.B.)*

grup, mulțime nevidă G, pe care s-a definit o lege de compoziție $f: G \times G \to G$ avînd următoarele proprietăți:

a) $x \circ (y \circ z) = (x \circ y) \circ z$ (asociativitate);

b) există $e \in G$, astfel încît pentru oricare $x \in G$:

$e \circ x = x \circ e = x$ (element neutru);

c) oricare ar fi $x \in G$, există $x' \in G$, astfel încît:

$x \circ x' = x' \circ x = e$ (element simetric),

unde $f(x, y) = x \circ y$. Ex.: mulțimea numerelor întregi față de operația de adunare, mulțimea rădăcinilor de ordinul n ale unității față de înmulțire, mulțimea translațiilor față de compunerea lor etc. Denumirea a fost introdusă de E. Galois (1830), dar grupurile abstracte au fost studiate de R. Dedekind; C. Jordan (1868) a elaborat primul studiu al grupurilor infinite. — *Grup abelian*, grup a cărui lege de compoziție este comutativă. Se mai numește *grup comutativ*. — *Grup aditiv*, grup a cărui lege de compoziție este notată aditiv. Într-un grup aditiv elementul neutru se notează cu 0, iar simetricul elementului x cu $-x$. — *Grup multiplicativ*, grup a cărui lege de compoziție este notată multiplicativ. Într-un grup multiplicativ elementul neutru se notează cu 1, iar simetricul elementului x cu x^{-1}. *(V.B.)*

grupul lui Galilei, grupul de transformări prin care se trece de la mișcarea față de un reper fix T_1 la mișcarea față de un reper T aflat într-o mișcare de translație rectilinie și uniformă față de primul. Admițînd o schimbare de origine și pentru timp, notînd cu indicele 1 mărimile relative la reperul fix, în cazul coordonatelor carteziene formulele de transformare sînt: $\mathbf{r}_1 = \mathbf{C} + \mathbf{C}_* t + x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$, $t_1 = t_0 + t$, unde $\mathbf{C}$ și $\mathbf{C}_*$ sînt vectori constanți. *(Șt.G.)*

H

Hadamard [adamạ:r], **Jacques** (1865—1963), matematician francez. Profesor la Facultatea de Ştiinţe din Bordeaux, la Sorbona, Collège de France şi Şcoala Politehnică din Paris. Membru al Academiei Franceze de Ştiinţe şi membru de onoare al Academiei Române. Unul dintre fondatorii analizei funcţionale (a propus denumirea „funcţională") şi al teoriei geometrice a ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul doi. Lucrări de teoria numerelor şi teoria funcţiilor analitice. Op. pr.: *Leçon de géométrie élémentaire*, 1898 (traducere în lb. română, vol. I, 1961; vol. II, 1962); *Leçon sur le problème de Cauchy et les équations aux dérivées partielles linéaires hyperboliques*, 1922. *(V.B.)*

Haimovici, Mendel (1906—1973), matematician român. Studii la Universitatea din Iaşi şi Roma (doctor, 1933). Profesor de mecanică teoretică şi teoria elasticităţii la Universitatea din Iaşi (din 1946). Membru al Academiei R.S. România (din 1963; membru corespondent din 1949). Cercetări în domeniul geometriei (spaţii cu conexiune liniară, spaţii Finsler, spaţii neolonome), al analizei matematice (sisteme diferenţiale, ecuaţii cu derivate parţiale) şi al mecanicii. *(V.B.)*

Hamilton [hæmilton], **William Rowan** (1805—1865), matematician şi mecanician irlandez. Profesor la Universitatea din Dublin (la 22 de ani). Membru al Academiei Regale din Irlanda, primul membru străin al Academiei Naţionale din S.U.A. Contribuţii importante în calculul vectorial (unde a introdus noţiuni şi denumiri fundamentale). A extins conceptele algebrei asupra calculului cu mărimi complexe, culminînd cu introducerea cuaternionilor. A enunţat principiul minimei acţiuni şi a dat sistemul de ecuaţii diferenţiale canonice ale mecanicii; a scos în evidenţă analogia dintre optica geometrică şi mecanică (idee care a condus, mai tîrziu, la realizarea microscopului electronic). Op. pr.: *On a general method in dynamics*, 1834; *Lectures on Quaternions*, 1853; *Elements of quaternions*, 1866. *(V.B.)*

heptagon → eptagon

hexaedru → exaedru

hexagon → exagon

hidromecanică → mecanica fluidelor

Hilbert, David (1862—1943), matematician german. Profesor la Universitatea din Göttingen. I s-au conferit numeroase distincţii şi premii, a fost membru al mai multor academii. Contribuţiile sale privesc, în primul rînd, fundarea axiomatică a geometriei, apoi teoria formelor şi invarianţilor, teoria numerelor algebrice, analiza matematică, în special, ecuaţiile integrale (unde pe baza ideilor lui s-a dezvoltat studiul unui spaţiu metric, spaţiul Hilbert), fizica-matematică. Spre sfîrşitul activităţii sale, s-a ocupat cu axiomatizarea altor

discipline matematice. La Congresul internaţional de matematică de la Paris (1900), D. Hilbert a ţinut o conferinţă: *Probleme matematice*, propunînd lumii matematice 23 de probleme interesante. Op. pr.: *Grundlagen der Geometrie*, 1899; *Theorie der algebraischen Zahlkörper*, 1907, *Methoden der math. Phyzik*, 1924, *Grundzüge der theoret. Logik*, 1928; *Grundlagen der Mathem.*, 1934—1939 (în colab.). *(V.B.)*

hiperbolă [gr. *hyperbole* „exces"], curbă obţinută prin secţionarea unui con circular cu un plan care taie ambele pînze ale conului. Este locul geometric al punctelor pentru care diferenţa distanţelor la două puncte fixe (numite focare) este constantă (fig. 82). Hiperbola admite două axe de simetrie perpendiculare. În raport cu sistemul de referinţă format de axele ei de simetrie, ecuaţia hiperbolei este:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0.$$

(G. Lamé, 1818)

Elementele hiperbolei sînt: axa transversală $AA' = 2a$, axa $BB' = 2b$, focarele F, F' cu abscisele c şi $-c$, unde $c = \sqrt{a^2 + b^2}$. Hiperbola admite asimptotele $y = \pm \frac{b}{a} x$, care sînt diagonalele dreptunghiului construit pe axe. Ecuaţiile parametrice sînt:

$$x = a \sec t, \; y = b \operatorname{tg} t,$$

(A. Legendre, 1786)

unde t este unghiul făcut cu direcţia pozitivă a axei Ox de raza vectoare a punctului de pe hiperbolă. Ecuaţia hiperbolei în coordonate polare este:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta},$$

(S. Lacroix, 1798)

unde $p = \frac{b^2}{a}$ (parametrul hiperbolei),

iar $e = \frac{c}{a} > 1$ (excentricitatea).

Hiperbola a fost descoperită de Menechmus (sec. 4 î.e.n.), iar denumirea a fost dată de Apollonius (→*aplicarea ariilor*). Construcţia mecanică a hiperbolei a fost realizată iniţial de Guidubaldo del Monte (1579). — *Hiperbolă conjugată unei hiperbole date*, hiperbolă cu aceleaşi asimptote ca ale hiperbolei date şi cu axa transversală BB'. Hiperbola conjugată hiperbolei:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0$$

are ecuaţia:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + 1 = 0.$$

Denumirea şi considerarea hiperbolelor conjugate se datorează lui Apollonius (sec. 3 î.e.n.). — *Hiperbolă echilateră*, hiperbolă cu axele egale $a = b$, avînd ecuaţia:

$$x^2 - y^2 = a^2.$$

Asimptotele hiperbolei echilatere sînt perpendiculare. Ecuaţia hiperbolei echilatere raportată la asimptote este:

$$xy = \frac{1}{2} a^2. \qquad (V.B.)$$

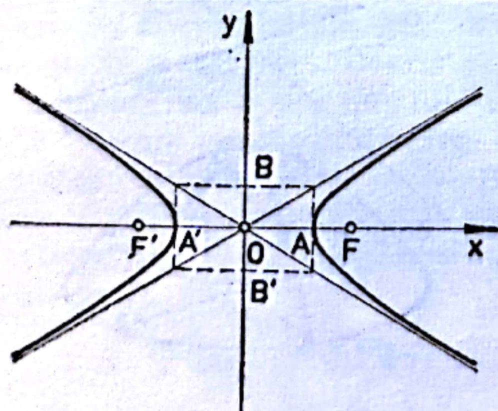


Fig. 82

hiperboloid [gr. *hyperbole* „hiperbolă", *eidos* „aspect"], suprafață generată de elipse mobile, omotetice, cu centrele pe o dreaptă d, perpendiculară pe planele lor și care se sprijină pe o hiperbolă ce are una din axe situată pe această dreaptă d. Hiperboloidul este o cuadrică. — *Hiperboloid cu o pînză*, hiperboloid obținut atunci cînd dreapta d este axa netransversă a hiperbolei de sprijin (fig. 83). Raportat la sistemul de referință format din dreapta d ca axă Oz și planul hiperbolei, ca plan yOz, hiperboloidul cu o pînză are ecuația:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

și admite un con asimptot de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Secțiunile prin plane paralele cu xOy sînt elipse, iar cele prin plane paralele la yOx sau xOz sînt hiperbole. Dacă $a = b$ se obține un hiperboloid de rotație în jurul axei Oz. — *Hiperboloid cu două pînze*, hiperboloid obținut atunci cînd dreapta d este axa transversă a hiperbolei de sprijin (fig. 84). Raportat la sistemul de referință format din dreapta d ca axă Oy și planul perpendicular pe d dus în centrul hiperbolei de sprijin ca plan xOy, hiperboloidul cu două pînze are ecuația:

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

și admite un con asimptot de ecuație:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 0.$$

Secțiunile prin plane paralele cu xOz sînt elipse, iar cele prin plane paralele

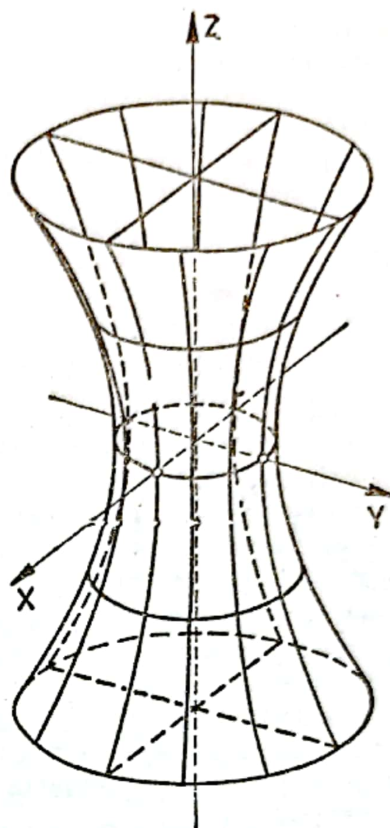


Fig. 83

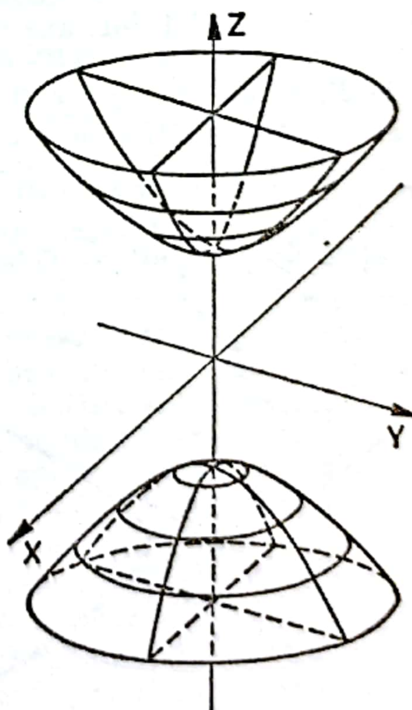


Fig. 84

cu xOy sau yOz sînt hiperbole. Dacă $a = c$ se obține un hiperboloid de rotație în jurul axei Oy. Hiperboloizii de rotație au fost considerați inițial de Arhimede (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

hipocicloidă [gr. *hypo* „sub, dedesubt", *kyklos* „cerc", *eidos* „înfățișare, aspect, formă"], curbă plană, loc geometric al unui punct situat pe un cerc, care se rostogolește în planul lui, fără alunecare, pe un cerc fix, rămînînd în interiorul acestui cerc. Notînd cu r_0 raza cercului fix și cu r raza cercului mobil, curba se închide, fiind algebrică și unicursală dacă $\frac{r}{r_0}$ este un număr rațional. Ecuațiile parametrice ale hipocicloidei sînt:

$$x = (r_0 - r)\cos t + r\cos\frac{r_0 - r}{r}t$$

$$y = (r_0 - r)\sin t - r\sin\frac{r_0 - r}{r}t,$$

unde t este unghiul format de raza mobilă a cercului fix ce trece prin punctul de tangență cu axa Ox (reperul cartezian xOy este ales astfel încît, pentru $t = 0$, punctul care descrie curba coincide cu punctul de tangență al cercurilor). După relația între r_0 și r se obțin hipocicloide particulare. Dacă $r_0 = 2r$, ecuațiile hipocicloidei devin: $x = 2\cos t$, $y = 0$, punctul mobil descriind diametrul de pe axa Ox al cercului fix, ceea ce se folosește în teoria mecanismelor pentru a transforma o mișcare circulară într-o mișcare rectilinie. Dacă $r_0 = 4r$, se obține astroida. — *Hipocicloida lui Steiner*, hipocicloida obținută cînd $r_0 = 3r$, avînd ecuațiile parametrice:

$$x = r(2\cos t + \cos 2t)$$

$$y = r(\sin t - \sin 2t).$$

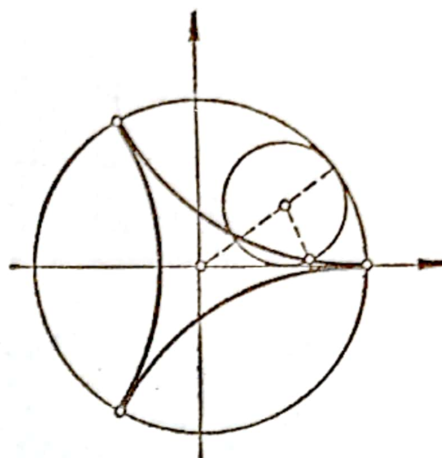


Fig. 85

Este o curbă închisă, avînd trei puncte de întoarcere $\left(\text{pentru } t = 0, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}\right)$; lungimea acestei hipocicloide este: $L = 4\pi r$, iar aria: $A = 2\pi r^2$ (fig. 85). Hipocicloida lui Steiner este, de asemenea, înfășurătoarea dreptelor Wallace-Simson asociate punctelor cercului circumscris unui triunghi. *(V.B.)*

histogramă [gr. *histos* „țesut", *grama* „scriere, desen"], reprezentare grafică a unei repartiții statistice constînd dintr-o succesiune de dreptunghiuri, fiecare dintre acestea avînd drept bază un subinterval al intervalului în care se găsesc valorile caracteristicii, iar drept înălțime, raportul dintre frecvența absolută (sau relativă) corespunzătoare subintervalului respectiv și lungimea acestuia (fig. 86). În cazul în care se iau în considerare frecvențele relative, suma ariilor dreptunghiurilor histogramei este egală cu 1. Histogramele sînt utilizate în statistica matematică, economie, demografie. *(V.B., A.Ș.)*

hodograf [gr. *hodos* „drum", *graphein* „a scrie"], curbă sau suprafață, loc geometric al extremităților vectorilor care reprezintă valorile unei funcții vectoriale de una sau mai multe

variabile scalare independente, presupunînd că vectorii au aceeași origine, într-un punct fix (polul hodografului). Ex.: hodograful vitezelor este locul geometric al extremităților vectorilor echipolenți cu vectorii viteză ai unui mobil, la diferite momente, duși printr-un punct fix. *(V.B.)*

Horezmi, Muhammed ibn Musa (c. 780—c. 850), matematician arab. S-au păstrat parțial (în formă prelucrată) cinci dintre lucrările sale: de aritmetică, *Carte despre adunare și scădere după sistemul indienilor* (de la numele autorului formîndu-se termenul algoritm); de algebră și geometrie, *Scurtă carte despre calculul prin completare și reducere* (termenul „al-djebr“ care apare în titlul acestei lucrări a condus la denumirea algebrei); de astronomie (în care sînt publicate primele tabele arabe de sinusuri și tangente) și o lucrare despre calendar, *Determinarea calendarului ebraic*. *(V.B.)*

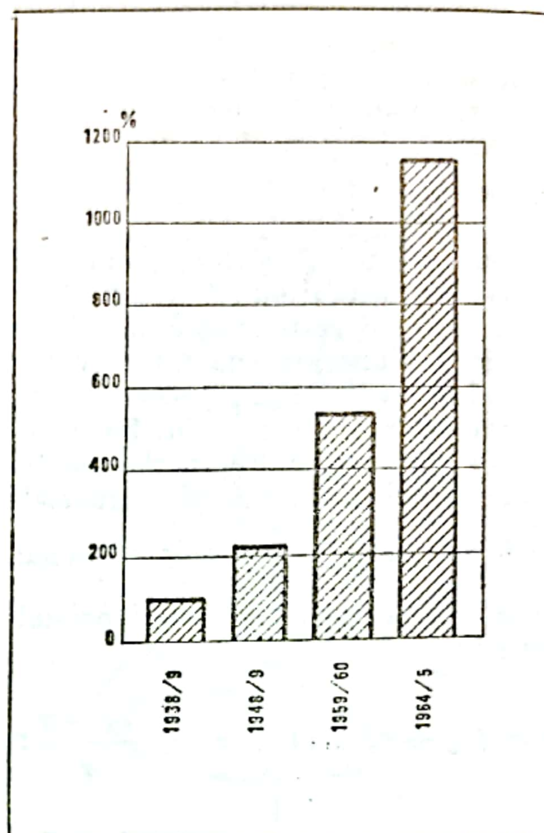


Fig. 86

Iacob, Caius (n. 1912), matematician și mecanician român. Studii la Facultatea de Științe din București și la Paris (doctor la Sorbona, 1935). Profesor de mecanică la Universitatea din Cluj (din 1943) și la Universitatea din București (din 1950). Membru al Academiei R.S. România (din 1963, membru corespondent din 1955). Face parte din comitetul de redacție al revistelor „Archive for Rational Mechanics Analysis" și „Journal de Mécanique". Premiat (în 1940) de Academia de Științe din Paris pentru lucrările sale privind mecanica fluidelor compresibile. Contribuții în domeniul matematicii privind ecuațiile cu derivate parțiale și problema derivatei oblice a lui H. Poincaré (cu aplicații în teoria mareelor). Numeroase studii în domeniul mecanicii fluidelor (a introdus metode exacte, și de aproximare, pentru studiul jeturilor gazoase) și al mecanicii generale. Op. pr.: *Sur la détermination des fonctions harmoniques conjugées par certaines conditions aux limites. Application à Hydrodinamique*, 1935; *Introducere matematică în mecanica fluidelor*, 1952 (ed. în lb. franceză, 1959), *Curs de matematici superioare*, 1957. *(V.B.)*

icosaedru [gr. *eikosi* „douăzeci", *hedra* „față"], poliedru cu douăzeci de fețe. Icosaedrul regulat este unul dintre cele cinci poliedre regulate; are fețele triunghiuri echilaterale ce fac, două cîte două, unghiuri diedre de cîte 138°11′22″,6, 30 muchii, 12 vîrfuri din care pornesc cîte 5 muchii (fig. 87). Aria și volumul icosaedrului regulat în funcție de muchia l, sînt date de formulele:

$$A = 5\sqrt{3}\,l^2,\quad V = \frac{5(3+\sqrt{5})\,l^3}{12}.$$

Relațiile dintre muchia l și razele r a sferei înscrise și R a sferei circumscrise icosaedrului regulat sînt:

$$l = \frac{\sqrt{3}(3-\sqrt{5})\,r}{6} = \frac{\sqrt{5(10-2\sqrt{5})}\,R}{5}.$$

Noțiunea se datorează lui Platon (sec. 4 î.e.n.), iar denumirea lui Teetet (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

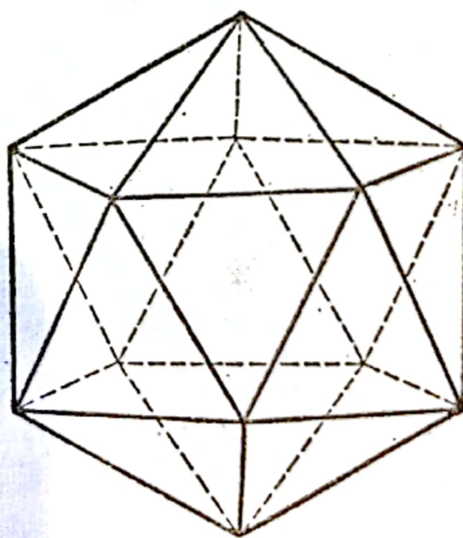


Fig. 87

ideal (bilateral), submulţime nevidă A, a unui inel M, $A \subset M$, pentru care sînt îndeplinite următoarele condiţii: a) $x + y \in A$, oricare ar fi $x, y \in A$; b) $mx \in A$, $xm \in A$, oricare ar fi $m \in M$ şi $x \in A$. Ex.: considerînd inelul numerelor întregi, submulţimea numerelor pare este un ideal. Noţiunea a fost introdusă de E. Kummer (1844), iar denumirea a fost propusă de P.L. Dirichlet. Contribuţii la studiul idealelor au adus şi matematicienii români: Gr. C. Moisil (*Inele şi ideale; Introducere în algebră*, 1954) şi D. Barbilian (*Teoria aritmetică a idealelor în inele necomutative*, 1956). *(V.B.)*

idempotenţă [lat. *idem* „aceeaşi", *potentia* „putere"], proprietate a unei legi de compoziţie internă, $f : M \times \times M \to M$, astfel încît:

$$f(a, a) = a,$$

pentru orice $a \in M$. Ex.: reuniunea şi intersecţia mulţimilor sînt idempotente: $A \cup A = A$, $A \cap A = A$. *(V.B., A.B.)*

identitate [lat. *identitas-tis* „acelaşi, aceeaşi"], relaţie de egalitate în care intervin elemente variabile, adevărată pentru orice valoare a acestor elemente. Simbolul identităţii ($\equiv$) a fost propus de G.B. Riemann (1899). Ex.: $(x + y)^2 \equiv x^2 + 2xy + y^2$; $\sin^2 x + \cos^2 x \equiv 1$. *(V.B.)*

imagine (a unui element din domeniul de definiţie a unei funcţii) → **funcţie**

implicaţie [lat. *implicatio* „înlănţuire"] ($p \to q$, $p \supset q$, Cpq), propoziţia „dacă p atunci q", falsă dacă p este adevărată iar q falsă, şi adevărată în rest. Tabelul de valori logice ale implicaţiei este:

$v(p)$	$v(q)$	$v(p \to q)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

unde $v(p)$ este valoarea logică a propoziţiei p. *(A.B.)*

impuls [lat. *impulsus* „lovire, mişcare, imbold"] (pentru un sistem de puncte materiale; **H**), vectorul definit prin $\sum_{j=1}^{n} m_j \mathbf{v}_j$. Constituie o măsură a mişcării mecanice referitoare la posibilitatea transmiterii sale de la un sistem la altul. Ecuaţia sa dimensională este $[H] = MLT^{-1}$. Albert de Saxa şi William d'Ockam considerau că dacă se aruncă un corp, acesta are un impetus (impuls) care se consumă în cursul mişcării. Se mai numeşte *cantitate de mişcare*. *(Şt. G.)*

impuls generalizat (p_k), funcţie legată de coordonatele generalizate şi vitezele generalizate $\dot{q}_k$ prin relaţia: $p_k = \partial L / \partial \dot{q}_k$ $(k = 1, 2, ..., h)$, L fiind funcţia lui Lagrange iar h numărul gradelor de libertate al sistemului. *(Şt. G.)*

incluziune [lat. *in* „în", *cludere* „a cuprinde"] $(M \subset N)$, relaţie între două mulţimi M şi N care au proprietatea că orice element al lui M este un element al lui N. Relaţia de incluziune este reflexivă $(M \subset M)$ şi tranzitivă (dacă $M \subset N$ şi $N \subset P$ atunci $M \subset P$). Simbolul incluziunii, $\subset$, a fost introdus de J. Gergonne (1817). *(V.B.)*

indicatorul lui Euler → **funcţia lui Euler**

indice [lat. *index* „care arată, indică"], simbol numeric sau literal aşezat la dreapta şi mai jos (indice inferior), sau mai sus (indice superior) decît simbolul numeric sau literal căruia îi precizează semnificaţia sau valoarea. Ex.: indici inferiori, în termenii unui şir: $a_1, a_2, ...$; indici superiori ca la coordonatele unui punct al spaţiului cu n dimensiuni, $P(x^1, x^2, ..., x^n)$; indici dubli, în

notația unui determinant, $|a_{ij}|$; indici de însumare, așa cum apar în expresia $\sum_{k=1}^{n} A_k = A_1 + A_2 + ... + A_n$. Folosirea indicilor se întîlnește inițial la F. Schooten (1649); G. Leibniz a recomandat (1675) scrierea indicilor inferiori și a indicilor multipli (1693). *(V.B.)*

inducție completă [lat. *inductio* „concluzie, dovedire"], procedeu de demonstrare a unei proprietăți, *P(n)*, depinzînd de un număr natural, prin parcurgerea următoarelor etape: a) stabilirea celui mai mic număr natural n_0 pentru care proprietatea are sens; b) verificarea proprietății în cazul $n = n_0$; c) demonstrarea faptului că $P(n+1)$ este adevărată, pe baza presupunerii că *P(n)* este adevărată. Parcurgerea acestor etape asigură adevărul proprietății *P(n)*, pentru orice $n \geqslant n_0$. Principiul inducției complete, sub o formă mai generală, apare în axiomatica numerelor naturale construită de G. Peano (1899), deși apariția lui a fost semnalată la grecii antici; L. Gherșonide (1321) l-a formulat explicit; caracterul lui demonstrativ a fost stabilit de H. Poincaré. *(V.B., A.B.)*

inecuație [lat. *in* „ne", *aequatio* „egalare"], inegalitate cu una sau mai multe variabile, adevărată numai pentru anumite valori date variabilelor. Ex.: $x^2 - 5x + 6 < 0$ este adevărată pentru $x \in (2, 3)$. *(V.B.)*

inegalitate [lat. *in* „ne", *aequalis* „egal"], relație între două elemente, care arată că unul dintre ele este mai mic sau mai mare decît celălalt, reprezentată prin simbolurile „<" sau „>" (inegalitate strictă). Ex.: $2 < 5$. Dacă inegalitatea poate deveni, eventual, o egalitate, notația corespunzătoare este „$\leqslant$" sau „$\geqslant$" (citindu-se „mai mic sau egal" sau „cel mult egal", respectiv „mai mare sau egal" sau „cel puțin egal"). Ex.: $\sin x \leqslant 1$. Semnele inegalităților „<", „$\leqslant$" au fost introduse de T. Harriot (*Artis analyticae aequationes algebraicas resolvendas*, tipărită postum, 1631) și respectiv, J. Wallis (*Philosophical Transactions*, 1670). *(V.B.)*

inegalitatea lui Bernoulli:

$(1 + a)^n \geqslant 1 + na$ (pentru $a \geqslant 0$, n natural). *(V.B.)*

inegalitatea lui Cauchy-Buniakovski-Schwarz:

$$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} b_i^2$$

(pentru a_i, b_i reale). *(V.B.)*

inegalitatea lui Minkovski:

$$\sqrt{\sum_{i=1}^{n} (a_i + b_i)^2} \leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^{n} a_i^2} + \sqrt{\sum_{i=1}^{n} b_i^2} \quad \text{(pentru } a_i,\ b_i, \text{ reale).}$$

(V.B.)

inel, mulțime nevidă *I*, înzestrată cu două legi de compoziție, numite adunare și înmulțire (notate cu + și ·), care satisfac axiomele:
a) *I* este grup abelian față de adunare;
b) înmulțirea este asociativă;
c) înmulțirea este distributivă față de adunare la stînga și la dreapta:

$$x \cdot (y+z) = x \cdot y + x \cdot z; \quad (x+y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,$$

pentru orice $x, y, z \in I$.

— *Inel cu element unitate*, inel în care există un element neutru pentru înmulțire, notat cu 1: $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$, pentru orice $x \in I$. — *Inel comutativ*,

inel în care înmulţirea este comutativă. Ex.: mulţimile numerice **Z**, **Q**, **R**, **C** sînt inele comutative cu element unitate; mulţimea matricilor pătratice de ordinul n este un inel necomutativ cu element unitate, mulţimea numerelor pare este un inel comutativ fără element unitate. Noţiunea a fost introdusă de J. Dedekind, iar denumirea se datorează lui D. Hilbert. *(V.B.)*

inel de polinoame (într-o nedeterminată X, cu coeficienţi într-un inel A; $A[X]$), mulţimea şirurilor $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, unde $a_i \in A$ şi numai un număr finit dintre elementele $a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...$ sînt diferite de zero, cu următoarea structură de inel:

$$(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...) + (b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...) = (a_0 + b_0, a_1 + b_1, a_2 + b_2, ..., a_n + b_n, ...);$$

$$(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)(b_0, b_1, b_2, ..., b_n, ...) = \left(a_0b_0,\ a_0b_1 + a_1b_0,\ a_0b_2 + a_1b_1 + a_2b_0, ..., \sum_{i=0}^{n} a_ib_{n-i}, ...\right).$$

Dacă $b \in A$ şi $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...) \in A[X]$, definim înmulţirea $b \cdot (a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...) = (ba_0, ba_1, ba_2, ..., ba_n, ...)$; cu această operaţie inelul $A[X]$ devine o A — algebră. Elementul $(0, 1, 0, 0, ..., 0, ...)$ este notat X şi numit *nedeterminată*. Deoarece $(0, 0, 1, 0, ..., 0, ...) = X^2$, $(0, 0, 0, 1, 0, ..., 0, ...) = X^3$ ş.a.m.d., elementul $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n, ...)$ se scrie $a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_nX^n + ...$ unde suma este finită (prin definiţie). Elementele lui $A[X]$ se numesc polinoame în nedeterminata X cu coeficienţi în inelul A şi se notează $P(X) = a_0 + a_1X + a_2X^2 + ... + a_mX^m$; dacă $P(X) \neq 0$, cel mai mare întreg m pentru care $a_m \neq 0$ se numeşte gradul polinomului $P(X)$. Polinomul nul nu are grad. Polinoamele de forma aX^m se numesc *monoame* de gradul m. Regulile de adunare şi înmulţire din $A[X]$ sînt exact „adunarea şi înmulţirea polinoamelor". Unui polinom $P(X) = a_0 + a_1X + ... + a_mX^m \in A[X]$ i se ataşează o funcţie $f_P: A \to A$, numită *funcţie polinomială* şi definită prin $f_P(b) = a_0 + a_1b + ... + a_mb^m = P(b) \in A$, pentru orice $b \in A$. Funcţia ataşată netedeterminatei X se numeşte variabilă şi este notată de obicei tot X. Trebuie făcută distincţia între polinom şi funcţia polinomială ataşată lui, deoarece două polinoame distincte pot da aceeaşi funcţie polinomială. De exemplu, polinomul $X^2 + X$ cu coeficienţi în inelul $\mathbf{Z}/2\mathbf{Z}$ al claselor de resturi modulo 2 este nenul, dar funcţia polinomială ataşată lui este nulă. Dacă inelul A este domeniu de integritate, atunci şi inelul $A[X]$ este domeniu de integritate. În acest caz se construieşte corpul $A(X)$ al fracţiilor raţionale în nedeterminata X cu coeficienţi în inelul A astfel (la fel cum se construieşte corpul **Q** al numerelor raţionale în inelul numerelor întregi): în mulţimea perechilor de polinoame (P, Q) se introduce relaţia de echivalenţă $(P_1, Q_1) \sim (P_1, Q_2)$ dacă $P_1Q_2 = P_2Q_1$. O astfel de clasă de echivalenţă (P, Q) se numeşte fracţie raţională, iar mulţimea lor se notează $A(X)$. Pe $A(X)$ se defineşte o structură de inel prin: $(P_1 Q_1) + (P_2, Q_2) = (P_1Q_2 + P_2Q_1, Q_1Q_2)$; $(P_1, Q_1)(P_2, Q_2) = (P_1P_2, Q_1Q_2)$. Inelul $A[X, Y]$ al polinoamelor în nedeterminatele X, Y cu coeficienţi în inelul A se construieşte analog cu $A[X]$: în mulţimea şirurilor $(a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02}, ..., a_{n0}, a_{n-1,1}, ..., a_{1,n-1}, a_{0n}, ...)$ în care numai un număr finit de termeni sînt diferiţi de zero, se notează $X = (0, 1, 0, ..., 0, ...)$, $Y = (0, 0, 1, 0, ..., 0, ...)$, iar adunarea şi înmulţirea se definesc „ca la polinoame", ţinînd cont de scrierea

$(a_{00}, a_{10}, a_{01}, a_{20}, a_{11}, a_{02},..., a_{n0},..., a_{n-1,1},..., a_{1,n-1}, a_{0n},...) = a_{00} + a_{10}X + a_{01}Y + a_{20}X^2 + a_{11}XY + a_{02}Y^2 + ... + a_{n0}X^n + a_{n-1,1}X^{n-1}Y + ... + a_{1,n-1}XY^{n-1} + a_{0n}X^n + ...$ (suma este finită, prin definiție). Inelul $A[X, Y]$ este izomorf cu inelul $(A[X])[Y]$ al polinoamelor în nedeterminata Y și avînd drept coeficienți polinoame în X (definiția prin recurență). Inelul $A[X_1,..., X_n]$ al polinoamelor în nedeterminatele $X_1, ..., X_n$ cu coeficienți în inelul A se construiește prin analogie cu $A[X, Y]$ și este izomorf cu inelul $(A[X_1,..., X_{n-1}])[X_n]$ (definiția prin recurență). Un element de forma $aX_1^{m_1}X_2^{m_2}...X_n^{m_n}$ cu $a \in A$ și $a \neq 0$ se numește monom de grad $m = m_1 + m_2 + ... + m_n$. Un polinom este o sumă (finită) de monoame; cel mai mare dintre gradele monoamelor a căror sumă formează polinomul se numește *gradul polinomului*. Unui polinom $P(X_1, ..., X_n) \in A[X_1,...,X_n]$ i se atașează o funcție polinomială $f_P: A^n \to A$, definită prin $f_P(a_1,..., a_n) = P(a_1,..., a_n)$, pentru $a_1,..., a_n \in A$. Dacă A este domeniu de integritate, $A[X_1,..., X_n]$ este de asemenea domeniu de integritate și se poate construi, ca mai sus, corpul $A(X_1,...,X_n)$ al funcțiilor raționale în nedeterminatele $X_1,...,X_n$ cu coeficienții în A. *(A.B.)*

inel sferic, corpul generat de un segment de cerc care se rotește în jurul unui diametru ce nu îl traversează. Volumul inelului sferic este a șasea parte din volumul unui cilindru avînd raza egală cu coarda segmentului și înălțimea egală cu proiecția acestei coarde pe axa de rotație. *(V.B.)*

infinit [lat. *in* „fără", *finis* „sfîrșit"] $(+\infty, -\infty)$, simboluri pentru limita șirului numerelor naturale (plus infinit) și, respectiv, pentru limita șirului numerelor întregi strict negative (minus infinit). Sînt două aspecte distincte privitor la infinit în matematică: actual și potențial. *Infinitul actual* are semnificația unei mulțimi infinite ca o prezență simultană a tuturor elementelor ei. Asupra acestor mulțimi s-a extins numărătoarea obișnuită tradițională, ceea ce a condus la noțiunea de mulțimi cu aceeași putere, existînd — prin analogie cu existența mulțimilor finite ce au un număr diferit de elemente — și mulțimi de puteri diferite: puterile inegale (strict crescătoare) a numărabilului, a continuului și a mulțimii funcțiilor. Infinitul actual a fost considerat în teoria mulțimilor de G. Cantor (1873). *Infinitul potențial* ilustrează un procedeu constructiv, vizînd o infinitate potențială de elemente ale unei mulțimi, de exemplu, după modelul șirului numerelor naturale (șir ce poate fi prelungit oricît de mult). Conceptul de infinit potențial a fost imaginat de Aristotel (sec. 4 î.e.n.). Simbolul pentru infinit, ∞, a fost propus de J. Wallis *(Arithmetica infinitorum*, 1656). *(V.B.)*

informatică, știință avînd drept obiect metodele și mijloacele de prelucrare a informației. Constituirea informaticii ca știință și dezvoltarea ei sînt legate de necesitatea de a lua decizii în concordanță cu un anumit obiectiv și este condiționată de perfecționarea echipamentelor electronice de calcul. Calculul automat, necesitînd formalizarea procesului de prelucrare a informației, determină interdependența informaticii cu cele mai abstracte discipline matematice, cum ar fi logica matematică, algebra superioară, teoria sistemelor și teoria algoritmilor. *(T.B.)*

injecție $\to$ **funcție injectivă**

instrucțiune, unitate sintactică a unui limbaj de programare indicînd o operație de executat și conținînd informația referitoare la operanzi. *(T.B.)*

integrală curbilinie — *Integrală curbilinie de primul tip* (a unei funcţii de-a lungul unei curbe C), limita finită a sumei integrale:

$$S = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i) \cdot l_i,$$

independentă de diviziunea curbei rectificabile C (raportată la un sistem de coordonate rectangulare) şi de alegerea punctelor $M_i(\xi_i, \eta_i)$ pe arcele elementare $A_{i-1}A_i$, de lungime l_i, în care este împărţită curba, unde $F(M) = F(x, y)$ este o funcţie reală definită într-un domeniu plan D ce conţine curba C, cînd $\max (l_i) \to 0$:

$$I = \int_C F(x, y)\,\mathrm{d}s,$$

iar pentru o curbă în spaţiu:

$$I = \int_C F(x, y, z)\,\mathrm{d}s.$$

Integrala curbilinie se reduce la o integrală definită obişnuită (integrală Riemann):

$$\int_C F(x, y)\mathrm{d}s = \int_a^b F(f(t),\ g(t)) \sqrt{[f'(t)]^2 + [g'(t)]^2}\,dt$$

cînd curba C este dată prin ecuaţiile parametrice

$$x = f(t),\ y = g(t)\ (a \leqslant t \leqslant b),$$

unde funcţiile $f(t)$ şi $g(t)$ sînt continue împreună cu primele lor derivate pe $[a, b]$, iar F este continuă pe $D \supset C$. Sensul drumului de-a lungul căruia se efectuează integrarea nu are un rol în cazul integralei de primul tip (deoarece lungimea l_i a arcului $A_{i-1}A_i$ nu depinde de sensul acestuia).

Ex.: integrala $I = \int_C xy\mathrm{d}s$, unde C este sfertul din primul cadran al elipsei $b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$, este:

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \cos t \cdot b \sin t \cdot \sqrt{a^2\sin^2 t + b^2\cos^2 t}\,\mathrm{d}t = \frac{ab(a^2 + ab + b^2)}{3(a + b)}.$$

— *Integrală curbilinie de al doilea tip* (a unei funcţii de-a lungul unei curbe C), limita finită I a sumei integrale:

$$S = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i) \cdot \Delta x_i,$$

independentă de diviziunea curbei rectificabile C (raportată la un sistem de coordonate rectangulare) şi de alegerea punctelor $M_i(\xi_i, \eta_i)$ pe arcele elementare $A_{i-1}A_i$, de lungime l_i, în care este împărţită curba, unde $F(M) = F(x, y)$ este o funcţie definită într-un domeniu plan $D \supset C$, iar Δx_i sînt lungimile proiecţiilor arcelor $A_{i-1}A_i$ pe axa Ox, cînd $\max (l_i) \to 0$:

$$I = \int_C F(x, y)\,\mathrm{d}x.$$

Considerînd proiecţiile Δy_i ale arcelor $A_{i-1}A_i$ pe axa Oy, se obţine analog:

$$I = \int_C F(x, y)\,\mathrm{d}y.$$

Dacă în domeniul $D \supset C$ sînt definite două funcţii $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ şi dacă integralele

$$\int_C P(x, y)\,\mathrm{d}x \quad \text{şi} \quad \int_C Q(x, y)\,\mathrm{d}y$$

există, atunci suma lor se numeşte *integrală curbilinie generală*:

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$
$$= \int_C P(x, y)\,dx + \int_C Q(x, y)\,dy;$$

analog în cazul unei curbe în spaţiu:

$$\int_C P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy +$$
$$+ R(x, y, z)\,dz = \int_C P dx +$$
$$\int_C Q dy + \int_C R dz.$$

La integrala curbilinie de al doilea tip se are în vedere sensul drumului (AB) de-a lungul căruia se efectuează integrarea:

$$\int_{BA} F(x, y)\,dx = -\int_{AB} F(x, y)\,dx$$
$$\int_{BA} F(x, y)\,dy = -\int_{AB} F(x, y)\,dy.$$

Pentru că o integrală curbilinie $\int_C P dx + Q dy$ să depindă numai de capetele drumului de integrare este necesar şi suficient ca expresia:

$$P dx + Q dy$$

să fie diferenţiala totală exactă a unei funcţii univoce de două variabile, definită şi diferenţiabilă în domeniul mărginit şi închis (din planul xOy) de existenţă al funcţiilor continue $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$, $D \supset C$. Integrala curbilinie de al doilea tip se reduce la o integrală riemanniană:

$$\int_C P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy =$$
$$= \int_a^b [P(f(t), g(t))f'(t) +$$
$$+ Q(f(t), g(t))g'(t)]\,dt,$$

dacă funcţiile $P(x, y)$ şi $Q(x, y)$ sînt continue pe $D \supset C$ şi dacă funcţiile $f(t)$ şi $g(t)$ din reprezentarea parametrică a curbei

$$x = f(t),\ y = g(t)\ \ (a \leqslant t \leqslant b)$$

sînt derivabile, cu derivata continuă pe $[a, b]$, ordinea aşezării limitelor corespunzînd cu sensul ales pe curbă (cînd parametrul t variază de la a la b, curba este descrisă de la A la B).

Ex.: integrala curbilinie $I = \oint y dx + 2x dy$ calculată de-a lungul cercului $x^2 + y^2 - 1 = 0$ este:

$$I = \oint_0^{2\pi} (-\sin^2 t + 2\cos^2 t)\,dt = \pi$$

(simbolul $\oint$ arată că drumul de-a lungul căruia se face integrarea este închis). Integralele curbilinii se folosesc pentru a calcula aria unei suprafeţe plane mărginită de o curbă închisă, aria unei suprafeţe de rotaţie, volumul unui corp mărginit de o suprafaţă de rotaţie, masa unui fir, momentul static al unei curbe plane în raport cu axele de coordonate, coordonatele centrului de greutate al unei bare, forţa de atracţie a unei curbe materiale asupra unui punct material, forţa cu care un conductor electric acţionează asupra unui magnet, lucru mecanic al unui cîmp de forţe, cantitatea de căldură absorbită de un gaz ş.a. Noţiunea de integrală curbilinie a fost introdusă de A.C. Clairaut (1743). *(V.B.)*

Integrală definită (a unei funcţii f de la a la b; $\int_a^b f(x)\,dx$), limita:

$$\lim_{p\to\infty} \sum_{i=1}^{n_p} f(\xi_i^{(p)})(x_i^{(p)} - x_{i-1}^{(p)}),$$

dacă există şi este finită, unde $a = x_0^{(p)} \leqslant x_1^{(p)} < x_2^{(p)} < \ldots < x_{n_p-1}^{(p)} < x_{n_p}^{(p)} = b$ este o diviziune din şirul de diviziuni $\{I_p\}$, $p = 1, 2, \ldots$, a intervalului $[a, b]$, $\xi_i^{(p)} \in \left(x_{i-1}^{(p)}, x_i^{(p)}\right)$, $i = 1, 2, \ldots, n_p$ şi norma diviziunii $\delta^{(p)} = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n_p} \left(x_i^{(p)} - x_{i-1}^{(p)}\right)$ este astfel ca $\lim\limits_{p \to \infty} \delta^{(p)} = 0$. În acest caz, funcţia se numeşte integrabilă pe $[a, b]$. Funcţiile monotone pe $[a, b]$ sau continue pe $[a, b]$, sînt integrabile pe $[a, b]$. Integrala definită este o funcţională liniară:

$$\int_a^b (\alpha f + \beta g)\,\mathrm{d}x = \alpha \int_a^b f\mathrm{d}x + \beta \int_a^b g\mathrm{d}x.$$

Noţiunea de integrală s-a cristalizat treptat în legătură cu unele probleme privind calculul ariilor unor domenii plane sau al volumelor unor corpuri de rotaţie, pentru care, încă din antichitate, Arhimede (sec. 3 î.e.n.) a dat unele metode, iar I. Newton (între 1661—1665), plecînd de la unele probleme de cinematică (determinarea legii de mişcare rectilinie a unui punct a cărui viteză se cunoaşte în fiecare moment) şi G. Leibniz (1675), preocupat de „problema inversă a tangentelor" (determinarea unei curbe plane cînd se cunoaşte în fiecare punct al ei panta tangentei) au pus bazele calculului integral. Definiţia actuală a fost dată de B. Riemann (1854), iar generalizări ale noţiunii de integrală au fost propuse de T.J. Stieltjes (1894) şi H. Lebesgue (1902). Pentru funcţiile de mai multe variabile, L. Euler (1769) a definit integrala dublă şi J. Lagrange (1773), integrala triplă. Pentru funcţii de argument complex, definiţia integralei a fost dată de A. Cauchy (1825). Denumirea a fost propusă de Jacques Bernoulli (1690), iar simbolul „$\int$", provenit din alungirea literei S (iniţiala cuvîntului *summa*), a fost propus de G. Leibniz (1686). *(V.B.)*

integrală multiplă — *Integrală dublă* (a unei funcţii pe un domeniu $D \subset \mathbb{R}^2$), limita finită I a sumei integrale:

$$S = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i) \cdot \text{aria } D_i,$$

pentru orice descompunere a domeniului închis şi mărginit D şi oricare ar fi punctele $M_i(\xi_i, \eta_i)$ pe porţiunile disjuncte D_i $\left(\bigcup\limits_{i=1}^{n} D_i = D\right)$ de diametre d_i în care este descompus D, unde $F(x, y)$ este o funcţie reală pe D, cînd $\max\,(d_i) \to 0$:

$$I = \iint_D F(x, y)\,\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint_D F(x, y)\,\mathrm{d}s.$$

Geometric, integrala dublă reprezintă suma volumelor cilindroizilor ce se sprijină pe domeniile elementare D_i limitaţi superior, dacă $F(x, y) \geqslant 0$ pe D, de graficul funcţiei F (cînd $F(x, y) \leqslant 0$ pe D, volumul se ia cu semnul minus). Integrala dublă a unei funcţii reale F, definită şi continuă pe domeniul închis şi mărginit D, definit de inegalităţile $a \leqslant x \leqslant b$, $f(x) \leqslant y \leqslant g(x)$, unde f şi g sînt funcţii continue pe $[a, b]$, simplu în raport cu axa Oy $(f(x) \leqslant g(x)$ pentru $a < x < b)$, se descompune în integrale simple:

$$\iint_D F(x, y)\,\mathrm{d}S = \int_a^b \left(\int_{f(x)}^{g(x)} F(x, y)\right) \mathrm{d}x.$$

Ex.: volumul corpului care are ca bază în planul xOy pătratul cu vîrfurile $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ şi e mărginit superior de planul $x + y + z - 3 = 0$ este:

$$V = \iint_{ABCD} (3 - x - y)\,dxdy = \int_0^1 dx \int_0^1 (3 - x - y)\,dy = \int_0^1 \left(3y - xy - \frac{y^2}{2}\right)\Big|_{y=0}^{y=1} dx = \int_0^1 \left(\frac{5}{2} - x\right) dx = 2.$$

Integralele duble se pot aplica la calculul ariilor plane, al momentelor de inerţie, al centrelor de greutate etc. Noţiunea de integrală dublă a fost introdusă de L. Euler (1769). — *Integrală triplă* (a unei funcţii, pe un domeniu $V \subset \mathbb{R}^3$), limita finită reală I a sumei integrale:

$$S = \sum_{i=1}^{n} F(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) \cdot \text{vol}\, V_i,$$

independentă de descompunerea domeniului închis şi mărginit $V \subset \mathbb{R}^3$ şi de alegerea punctelor $M_i(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)$ pe domeniile divizionare $V_i \left(\bigcup_{i=1}^{n} V_i = V\right)$ disjuncte, de diametre d_i, unde $F(x, y, z)$ este o funcţie reală pe V, cînd $\max\ (d_i) \to 0$:

$$I = \iiint_V F(x, y, z)\,dxdydz = \iiint_V F(x, y, z)\,dV.$$

Geometric, integrala triplă

$$\iiint_V dxdydz$$

reprezintă volumul domeniului V. Integrala triplă a funcţiei F continuă pe domeniul $V \subset \mathbb{R}^3$, definit de inegalităţile $f(x, y) \leqslant z \leqslant g(x, y)$, cu (x, y) din $D \subset xOy$, simplu în raport cu Oz ($f(x, y) < g(x, y)$ pentru orice punct (x, y) interior domeniului D) se descompune într-o integrală simplă urmată de una dublă:

$$\iiint_V F(x, y, z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} F(x, y, z)\,dz\right) dxdy,$$

iar dacă şi domeniul D este simplu în raport cu axa Oy, fiind definit de inegalităţi de tipul $h(x) \leqslant y \leqslant k(x)$, $a \leqslant x \leqslant b$, unde h şi k sînt funcţii continue pe $[a, b]$ şi $h(x) < k(x)$ pentru $a < x < b$, atunci integrala triplă se descompune în trei integrale simple succesive:

$$\iiint_V F(x, y, z)\,dxdydz = \int_a^b \left[\int_{h(x)}^{k(x)} \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} F(x,y,z)\,dz\right) dy\right] dx = \int_a^b dx \int_{h(x)}^{k(x)} dy \int_{f(x,y)}^{g(x,y)} F(x, y, z)\,dz.$$

Ex.: $I = \int_V xyz\,dxdydz$, la care V este definit de inegalităţile $0 \leqslant x \leqslant 1$, $2 \leqslant y \leqslant 3$, $4 \leqslant z \leqslant 5$, iar D, proiecţia ortogonală a lui V în planul xOy, definit de inegalităţile $0 \leqslant x \leqslant 1$, $2 \leqslant y \leqslant 3$, are valoarea:

$$I = \int_0^1 dx \int_2^3 dy \int_4^5 xyz\,dz = \int_0^1 dx \int_2^3 \frac{xyz^2}{2}\Big|_{z=4}^{z=5} dy =$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^1 dx\int_2^3 xydy =$$

$$= \frac{9}{2}\int_0^1 \frac{xy^2}{2}\Big|_{y=2}^{y=3} dx = \frac{45}{4}\int_0^1 xdx = \frac{45}{8}.$$

Prin integrale triple se exprimă, în principiu, toate mărimile geometrice și fizice legate de distribuția de mase într-un corp V, ca: masa corpurilor, forța de atracție sau potențialul masei unui corp asupra unui punct, momente de inerție în raport cu o axă, forța centrifugă pe care o dezvoltă un corp solid ce se rotește în jurul unei axe ș.a. La o integrală triplă, denumire ce se justifică prin faptul că ea se referă la funcție de trei variabile, a ajuns prima dată J. Lagrange (1773). *(V.B.)*

integrală nedefinită (a unei funcții f; $\int f(x)dx$), mulțimea $F + C$, $C \in \mathbf{R}$, a tuturor primitivelor funcției $f(x)$, unde F este o primitivă a lui $f(x): \int f(x)\,dx = F(x) + C$, după notația propusă de G. Leibniz (1675). Integralele nedefinite uzuale sînt date în tabelul 4. *(V.B.)*

integrare [lat. *integrare* „restabilire, întregire"] **1.** (Pentru o funcție f). Determinarea integralei (definite sau nedefinite) a funcției f. În cazurile cele mai simple integrarea se face pe baza integralelor nedefinite uzuale. Alte metode de integrare sînt a) metoda substituției: $\int f(u)u'(x)dx = \int f(u)\,du = F(u) + C$; b) metoda schimbării de variabilă: dacă $x = \varphi(t)$, atunci $\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)dt$, cu $\alpha = \varphi^{-1}(a)$ și $\beta = \varphi^{-1}(b)$; c) metoda de integrare prin părți: → *formula de integrare prin părți*; d) metode aproximative de calcul al integralelor definite:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\{f(a) + 2[f(x_1) + \dots + f(x_{n-1})] + f(b)\} + R,$$

unde x_i, $(i = 1, 2, \dots, n-1)$, sînt puncte din (a, b) astfel încît $x_1 - a = x_2 - x_1 = \dots = b - x_{n-1} = \dfrac{b-a}{n}$, iar $|R| \leq M\dfrac{(b-a)^3}{12n^2}$ $\left(M = \sup\limits_{x\in[a,b]} |f''(x)|\right)$, *numită formula trapezelor*.
2. (Pentru o ecuație diferențială). Determinarea soluției ecuației diferențiale. *(V.B.)*

interpolare [lat. *inter* „între", *pollere* „a fi cu valoare"], determinare a unei funcții (numită funcție de interpolare), de obicei polinom, care să aproximeze pe un interval $[a, b]$ o funcție $f(x)$ ale cărei valori sînt cunoscute numai în anumite puncte $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$. Metoda este folosită la prelucrarea datelor experimentale. Denumirea a fost introdusă de J. Wallis (1656). — *Interpolare liniară*, interpolare realizată cu o funcție liniară ale cărei valori în $x_0, x_1, \dots, x_n$ să coincidă cu valorile funcției f. Pe intervalul $[x_i, x_{i+1}]$, funcția de interpolare liniară $y(x)$ este definită prin:

$$y(x) = f(x_i) + (x - x_i)\frac{f(x_{i+1}) - f(x_i)}{x_{i+1} - x_i}.$$

Interpolarea liniară este utilizată la calculul valorilor intermediare în funcție de valorile date în tabelele logaritmilor funcțiilor trigonometrice sau ale altor funcții speciale. Interpolarea liniară își are originea în lucrările lui Cl. Ptolemeu (sec. 2). — *Polinomul de interpolare a lui Lagrange*, polinomul:

$P_n(x) = L_0(x)y_0 + L_1(x)y_1 + \dots + L_n(x)y_n$, unde $y_i = f(x_i)$,

iar

$$L_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)},$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n$. Valoarea sa în punctul x_i este y_i $(i = 0, 1, 2, \dots, n)$. *(V.B.)*

intersecție [lat. *intersectio* „întretăiere"] (a două mulțimi; $A \cap B$), operație care face să corespundă mulțimilor A și B, mulțimea formată din elementele lor comune, $A \cap B$. Este o operație asociativă: $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ și comutativă $A \cap B = B \cap A$. Pentru intersecția a n mulțimi A_i, $i = 1, 2, \dots, n$, se folosește notația $\bigcap_{i=1}^{n} A_i$. Simbolul intersecției „$\cap$" a fost propus de G. Peano (1897). *(V.B.)*

interval [lat. *intervallum* „spațiu între, distanță"], mulțime de numere reale de forma: a) $\{x \mid a < x < b\} = (a, b)$ numită *interval deschis*; b) $\{x \mid a \leqslant x \leqslant b\} = [a, b]$, numită *interval închis*; c) $\{x \mid a \leqslant x < b\} = [a, b)$, $\{x \mid a < x \leqslant b\} = (a, b]$ numite *intervale mixte*; d) $\{x \mid -\infty < x < a\} = (-\infty, a)$, $\{x \mid -\infty < x \leqslant a\} = (-\infty, a]$, $\{x \mid a < x < \infty\} = (a, \infty)$, $\{x \mid a \leqslant x < \infty\} = [a, \infty)$, numite *intervale nemărginite*. *(V.B.)*

Tabelul 4

$\int 0 \cdot dx = C$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$
$\int 1 \cdot dx = x + C$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$
$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \ (m \neq -1)$	$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C \ (a \neq 0)$
$\int \frac{dx}{x} = \ln \lvert x \rvert + C$	$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{a} + C \ (a \neq 0)$
$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C \ (a > 0, \ a \neq 1)$	$\int \cos x \, dx = \sin x + C$
$\int e^x dx = e^x + C$	$\int \sin x \, dx = -\cos x + C$

invariant (al unui grup de transformări), proprietatea unei noţiuni de a rămîne aceeaşi în transformarea considerată. De exemplu, distanţa este un invariant al grupului deplasărilor. Cercul fundamental este figură invariantă în transformarea prin inversiune. O expresie analitică este invariantă într-o transformare dacă nu-şi schimbă forma atunci cînd înlocuim coordonatele punctelor prin coordonatele punctelor transformate. *(N.M.)*

inversiune [lat. *inversio-onis* „reîntoarcere"], transformare geometrică punctuală determinată de un punct O (numit centru, sau pol, de inversiune) şi de un număr real k (numit modul de inversiune), astfel că unui punct M îi corespunde punctul M', coliniar cu O şi M, pentru care:

$$OM \cdot OM' = \pm k^2.$$

Într-o inversiune, segmentele OM şi OM', numite raze vectoare reciproce, sînt de acelaşi sens sau de sens contrar, după cum k^2 este precedat de semnul + sau —. Inversiunea este o transformare conformă. Inversiunea plană are o infinitate de puncte duble situate pe cercul cu centrul O şi raza k (numit cerc de inversiune fundamental). Inversiunea invariază dreptele ce trec prin pol. Transformata unei drepte ce nu trece prin pol este un cerc ce trece prin pol. Inversul unui cerc arbitrar este un cerc. Două perechi de puncte inverse sînt conciclice. În plan, în raport cu un sistem de axe rectangulare, avînd originea în polul de inversiune, între coordonatele carteziene ale unui punct $M(x, y)$ şi ale transformatului său $M'(x', y')$, există relaţiile:

$$x' = \frac{k^2x}{x^2 + y^2}, \quad y' = \frac{k^2y}{x^2 + y^2}.$$

În spaţiu, figura inversă unui plan este o sferă ce trece prin pol, şi reciproc. În general, o sferă se transformă într-o sferă. Ecuaţiile inversiunii în spaţiu sînt:

$$x' = \frac{k^2x}{x^2+y^2+z^2}, \quad y' = \frac{k^2y}{x^2+y^2+z^2},$$

$$z' = \frac{k^2z}{x^2+y^2+z^2}.$$

Inversiunea a fost definită prima dată de Apollonius (sec. 3 î.e.n.), iar în spaţiu, de P. Fermat (1679); contribuţii la studiul ei au adus G. Bellavitis (1837), W. Thomson şi J. Stubbe (1843). Denumirea a fost dată de A. Bravais (1850). *(V.B.)*

inversiune (într-o permutare), pereche (i_m, i_n) cu $i_m > i_n$, şi $m < n$, unde $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ este o permutare. Ex.: permutarea $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ are două inversiuni. *(V.B.)*

involuţie [lat. *involutio* „înfăşurare, răsucire"], omografie care compusă cu ea însăşi este transformarea identică. Ecuaţia unei involuţii este de forma:

$$axx' + b(x + x') + c = 0, \text{ cu}$$

$$b^2 - ac \neq 0.$$

Valorile x care coincid cu transformatele lor x' se numesc valori duble şi sînt rădăcinile ecuaţiei:

$$ax^2 + 2bx + c = 0.$$

O involuţie cu două valori duble reale se numeşte hiperbolică, iar în caz contrar, se numeşte eliptică. Într-o involuţie, două variabile omoloage sînt conjugate armonic în raport cu valorile duble (notate O şi O'):

$$(OO'xx') = -1.$$

— *Involuţia pe o dreaptă*, involuţie pentru care x şi x' reprezintă absci-

sele a două puncte M şi M' aflate pe aceeaşi dreaptă. Inversiunea şi simetria faţă de un punct sînt involuţii. Germenii ideii de involuţie apar la Pappus (sec. 3), dar introducerea acestei noţiuni, precum şi a denumirii, se datorează lui G. Desargues (1639). *(V.B.)*

Ionescu, Dumitru V. (n. 1901), matematician român. Studii la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti şi la Şcoala Normală Superioară din Paris (doctor, 1927). Profesor la Universitatea din Cluj (din 1934). Lucrări de analiză matematică (ecuaţii diferenţiale, ecuaţii cu derivate parţiale, calcule cu diferenţe finite, calculul funcţional, analiză numerică), mecanică generală (studiul mişcării tautocrone), algebră. Op. pr.: *Sur une classe d'équations fonctionnelles*, 1927; *Cuadraturi numerice*, 1957; *Ecuaţii diferenţiale şi integrale*, 1964. *(V.B.)*

Ionescu, Ion (1870—1946), inginer român. Profesor la Şcoala de poduri şi şosele (din 1919). Membru corespondent al Academiei Române (din 1919). Membru în Mathematical Society. A înfiinţat la 15 septembrie 1895, împreună cu alţi nouă membri fondatori, „Gazeta matematică", pe care a condus-o timp de 49 de ani şi în cadrul căreia a publicat 626 probleme, 77 articole şi 154 note matematice referitoare în special la aritmetică şi istoria matematicii. Ca inginer, a adus contribuţii în domeniul rezistenţei materialelor şi al teoriei elasticităţii şi a condus lucrările de construcţie a numeroase poduri (de la Cernavodă, 1894). Op. pr.: *Maxime şi minime geometrice*, 1941. *(V.B.)*

ipotenuză [gr. *hypo* „dedesubt", *teinein* „a întinde"], latură opusă unghiului drept, într-un triunghi dreptunghic (fig. 88). Denumirea, dată de Platon şi Eudem (sec. 4 î.e.n.), le-a fost sugerată de faptul că în tratatele

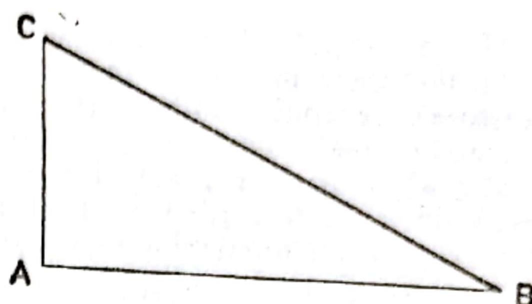


Fig. 88

geometrilor antici triunghiurile dreptunghice erau reprezentate, de obicei, avînd ca bază ipotenuza (latura care întinde unghiul drept). *(V.B.)*

ipoteza lui Goldbach: orice număr natural par, mai mare ca 4, este suma a două numere prime. Teorema a fost enunţată de Chr. Goldbach (1742), dar pînă în prezent, nu a fost demonstrată. *(V.B.)*

ipoteză [gr. *hypo* „sub", *thesis* „poziţie, punere"], ansamblul elementelor care sînt date şi pe baza cărora se demonstrează o teoremă sau se rezolvă o problemă. Denumirea a fost folosită prima dată în această accepţie de Platon (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

izomorfism [gr. *isos* „egal", *morphe* „formă"], omomorfism, între două mulţimi cu aceeaşi structură algebrică, care este funcţie bijectivă. Mulţimile izomorfe se identifică din punct de vedere al structurii (deşi au elemente diferite). — *Izomorfism de grup*, funcţie bijectivă definită pe un grup G (la care legea de compoziţie este notată cu $\top$), cu valori în grupul G' (la care legea de compoziţie este notată cu $\perp$), astfel încît:

$$f(x \top y) = f(x) \perp f(y),$$

pentru orice $x \in G$, $y \in G$.

Ex.: grupul $\mathbf{Z}$ al numerelor întregi este izomorf cu grupul P al numerelor întregi pare (faţă de adunare) prin funcţia $f(n) = 2n$; grupul V al vectorilor de poziţie este izo-

morf cu grupul T al translațiilor (față de operația de compunere a acestora), grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive și grupul aditiv al numerelor reale sînt izomorfe prin funcția $f(x) = \log_a x$, grupul aditiv al numerelor reale este izomorf cu grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive prin funcția $f(x) = a^x$. — *Izomorfism de inel*, funcție bijectivă definită pe un inel I, cu valori în inelul I', astfel încît:

a) $f(x+y) = f(x) + f(y)$;

b) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice $x \in I$, $y \in I$.

Ex.: inelul $\mathbf{Z}$ al numerelor întregi este izomorf cu inelul M al matricilor pătrate de forma $\begin{Vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{Vmatrix}$, $x \in \mathbf{Z}$, prin funcția:

$$f(x) = \begin{Vmatrix} x & 0 \\ 0 & x \end{Vmatrix}$$

— *Izomorfism de corp*, funcție bijectivă definită pe corpul K, cu valori în corpul K', astfel încît:

a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$;

b) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice x, $y \in K$.

— *Izomorfism de spațiu vectorial*, aplicație bijectivă definită pe spațiul vectorial X, cu valori în spațiul vectorial X', ambele peste același corp K, astfel încît:

a) $f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$;

b) $f(sx) = sf(x)$, pentru orice x, $y \in X$, și pentru orice scalar $s \in K$. Noțiunea de izomorfism de grup (cel dintîi studiat) se întîlnește inițial la K. Gauss și E. Galois; în forma generală, a fost studiată de C. Jordan (1870). *(V.B.)*

Î

împărțire [lat. *impartire*] **1.** (Pentru numere naturale; $a:b$). Operație care asociază perechii formate din numărul a (numit *deîmpărțit*) și numărul b (numit *împărțitor*), numărul c (numit *cît*), astfel încît $a = b \cdot c$. Operația nu este totdeauna posibilă. — *Împărțire cu rest*, operație care asociază perechii formate din numărul a *(deîmpărțit)* și numărul b *(împărțitor)*, numerele c *(cît)*, și r *(rest)*, astfel încît: $a = b \cdot c + r$ cu $0 \leqslant r < b$. **2.** (Pentru un grup multiplicativ G). Operație care asociază unei perechi de elemente $a, b \in G$ elementul $a \cdot b^{-1}$, unde b^{-1} este simetricul lui b. Simbolul împărțirii „:" a fost propus de G. Leibniz *(Acta Eruditorum*, 1684*)*; W. Oughtred (1657) l-a folosit anterior pentru proporții. Termenul a fost folosit întîia dată, în scrierile matematice românești, de către T. Iancovici (1777) și Gh. Șincai (1785) și s-a impus datorită lui Amfilohie Hotinul (1795) și Gh. Asachi (1836). *(V.B.)*

împărțirea unui segment în raport extrem și mediu, problemă care constă în a împărți un segment AB, cu ajutorul unui punct M, în două părți, astfel ca partea mai mare să fie medie proporțională între segmentul dat și cealaltă parte:

$$\frac{AB}{AM} = \frac{AM}{MB}.$$

Problema se reduce la a construi două segmente AM și $AB+AM$ cunoscînd diferența și media lor geometrică (egale cu AB). Valoarea raportului în care punctul M împarte segmentul AB este:

$$\frac{AM}{MB} = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \varphi,$$

și se numește, după propunerea lui Leonardo da Vinci (sec. 15), →*secțiunea de aur*. Numărul φ are proprietățile:

$$\varphi - \frac{1}{\varphi} = 1; \ \varphi = \sqrt{1+\sqrt{1+\sqrt{1+\ldots}}};$$

$$\varphi = 1 + \cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$$

Expresia „raport extrem și mediu" ce denumește împărțirea corespunzătoare a unui segment de dreaptă a fost introdusă de Euclid (sec. 3 î.e.n.). Această configurație a împărțirii unui segment în raport extrem și mediu, precum și raportul rezultat, dau impresia armoniei și echilibrului, ceea ce a făcut să fie utilizate, încă din antichitate, în arhitectură. Raportul se întîlnește și în natură (proporțiile între diferitele stadii de creștere organică, frunzele și florile pe ramuri ca și nodurile pe tulpină sînt așezate, în multe cazuri, după modelul împăr-

țirii în raport extrem și mediu — observația lui C. Darwin). *(V.B.)*

împărțitor → **împărțire**

înălțime [lat. *in-altum* „înalt, adînc"] *(h)* **1.** (Pentru un triunghi; h_a, h_b, h_c). Distanța de la un vîrf la latura opusă. Înălțimea poate fi calculată, în funcție de laturi, cu formula:

$$h_a = \frac{2}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

unde $p = \frac{a+b+c}{2}$. Notația a fost propusă de E. Lemoine (1882). **2.** (Pentru un trapez). Distanța între laturile paralele. **3.** (Pentru o prismă, cilindru (1), trunchi de piramidă, trunchi de con). Distanța între planele bazelor. **4.** (Pentru o piramidă sau un con (1)). Distanța de la vîrf la planul bazei. **5.** Dreaptă care trece printr-un punct al unei figuri și este perpendiculară pe o latură sau pe o față a figurii considerate, cu ajutorul ei măsurîndu-se înălțimile **1, 2, 3, 4,** *(V.B.)*

înfășurătoare [lat. *in-fasciolare* „a înfășura"], curbă sau suprafață tangentă la fiecare din curbele, respectiv suprafețele unei familii. Ecuația înfășurătoarelor unei familii de curbe, $f(x, y; \lambda) = 0$, se obține eliminînd parametrul λ din ecuațiile:

$$f(x, y; \lambda) = 0$$
$$\frac{\partial f(x, y; \lambda)}{\partial \lambda} = 0.$$

Ecuația înfășurătoarelor unei familii de suprafețe, $f(x, y, z; \lambda) = 0$, se obține eliminînd parametrul λ din ecuațiile:

$$f(x, y, z; \lambda) = 0,$$
$$\frac{\partial f(x, y, z; \lambda)}{\partial \lambda} = 0.$$

Ex.: familia de cercuri $f(x, y; \lambda) = (x-\lambda)^2 + y^2 - 1 = 0$, admite ca înfășurătoare dreptele $y = 1$, $y = -1$. *(V.B.)*

înmulțire [lat. *in* „în", *multus* „mult"] **1.** (Pentru numere naturale; $a \cdot b$, $a \times b$, ab). Operație care asociază perechii formate din numărul a (numit *deînmulțit*) și numărul b (numit *înmulțitor*) numărul c (denumit *produs*), astfel încît $c = a + a + a + \ldots + a$, unde suma are b termeni. **2.** Operație definită pe o mulțime M, prin analogie cu înmulțirea numerelor naturale. Ex.: înmulțirea numerelor raționale → *număr rațional*, înmulțirea matricilor → *matrice*. Este o operație asociativă. Introducerea punctului ca simbol al înmulțirii a fost propusă de T. Harriot *(Artis analyticae praxis ad aequationes resolvendas*, 1631*)*, iar semnul „×" a fost propus de W. Oughtred *(Clavis mathematicae*, 1631). Suprimarea semnului înmulțirii între factorii literali a fost propusă de W. Oughtred (1631) și R. Descartes (1637). În terminologia matematică românească, denumirea a fost adoptată de T. Iancovici (1777) și Gh. Șincai (1785), statornicindu-se datorită, mai ales, lui Amfilohie Hotinul (1795). *(V.B.)*

înmulțitor → **înmulțire**

înregistrare, unitate de informație ce poate fi distinsă într-un anumit context. — *Înregistrare logică*, înregistrare identificată din punctul de vedere al funcției, structurii și informației conținute. — *Înregistrare fizică*, înregistrare identificată din punctul de vedere al modului și formei în care ea este memorată și regăsită. Poate fi alcătuită din mai multe înregistrări logice. *(T.B.)*

J

Jacobi [iacọbi], **Karl Gustav Jacob** (1804—1851), matematician german. Profesor la Universitățile din Königsberg și Berlin. Membru al Academiei de Științe din Berlin. A creat, concomitent cu N. Abel, teoria funcțiilor eliptice, pe care a aplicat-o în teoria numerelor. A studiat integralele abeliene (și le-a atribuit acest nume, în cinstea lui N. Abel). Contribuții la teoria ecuațiilor diferențiale și sistemelor de ecuații diferențiale, la teoria determinanților precum și în dinamică și mecanica analitică (ecuația Hamilton-Jacobi, principiul minimei acțiuni). Op. pr.: *Fundamenta nova theoriae functionum ellipticarum*, 1829; *Canon arithmeticus*, 1839. *(V.B.)*

jacobian [după numele lui *K. Jacobi*], determinant funcțional de ordinul n, asociat unui ansamblu de n funcții cu n argumente $y_i = f_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $(i = 1, 2, \ldots, n)$, ale cărui elemente sînt derivatele parțiale ale fiecărei funcții în raport cu fiecare variabilă:

$$\frac{D(f_1, f_2, \ldots, f_n)}{D(x_1, x_2, \ldots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_2}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

Determinanții funcționali au fost introduși de K. Jacobi (1841); notația simbolică a fost propusă de către W.F. Donkin (1854). *(V.B.)*

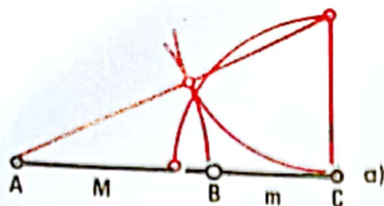
joc → teoria jocurilor

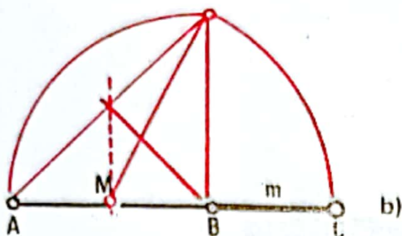
K

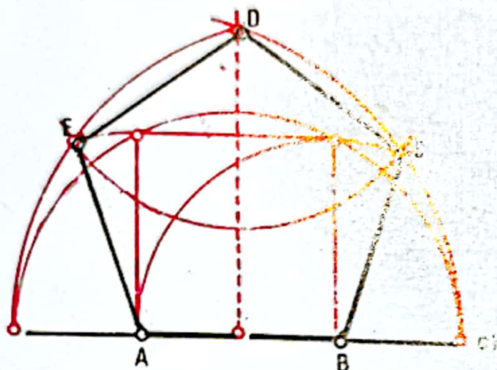
Klein [clain], **Felix** (1849—1925), matematician german. Profesor la universitățile din Erlangen, München, Leipzig și Göttingen. A inițiat „Programul de la Erlangen", conform căruia geometria este studiul invarianților unui grup de transformări. Lucrări de algebră (ecuația de gradul 5, teoria grafelor), teoria funcțiilor (hipereliptice și automorfe) și fizică matematică. A contribuit la apariția lucrării *Enzyklopädie der Mathematischen Wissenschaften* și a fost director (timp de 40 de ani) al revistei „Mathematische Annalen". Op. pr.: *Vergleichung Betrachtungen über neuere geometr. Forschungen*, 1872 („Programul de la Erlangen"); *Vorles, über d. Entwicklung d. Matematik im 19 Jh.*, vol. I, 1926; vol. II, 1927; *Vorlesungen über d. Theorie d. elliptischen Modulfunctionen*, vol. I, 1890; vol. II, 1892 (în colab.). *(V.B.)*

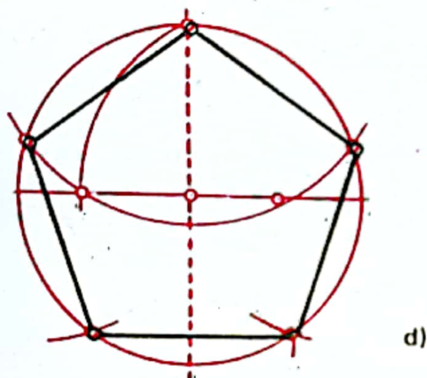
Kolmogorov, Andrei Nicolaevici (n. 1903), matematician sovietic. Profesor la Universitatea din Moscova. Membru al Academiei de Științe a U.R.S.S., al Academiei Polone și membru de onoare al Academiei R.S. România. Contribuțiile sale privesc teoria funcțiilor de variabilă reală (serii trigonometrice, serii de funcții ortogonale), teoria măsurii, generalizarea noțiunii de integrală, teoria aproximării funcțiilor în spații Banach, topologia, logica constructivă. Cele mai importante lucrări ale sale se referă la teoria probabilităților, culminînd cu axiomatizarea acestei teorii; a studiat procesele continue Markov, procesele aleatoare staționare. Op. pr.: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*, 1933; *Osnovîie paniatia teorii veroiatnostei*, 1936. *(V.B.)*

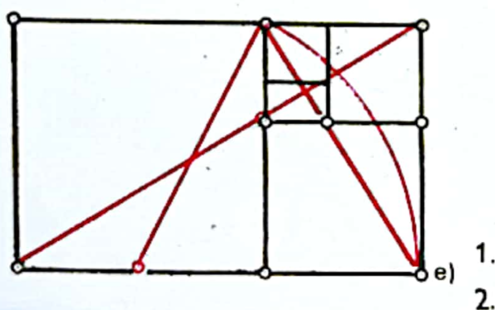
Kovalevskaia, Sofia Vasilievna (1850—1891), matematiciană rusă. Profesoară la Universitatea din Stockholm. Membru corespondent al Academiei de Științe din Petersburg. Elevă a lui K. Weierstrass. Lucrări privind teoria ecuațiilor cu derivate parțiale și integralele abeliene. Premiată de Academia de Științe din Paris și Academia Suedeză pentru lucrarea de mecanică: *Zadacia o vrascienii tverdovo tela vocrug nepogvijnoi tocika*, 1888. *(V.B.)*







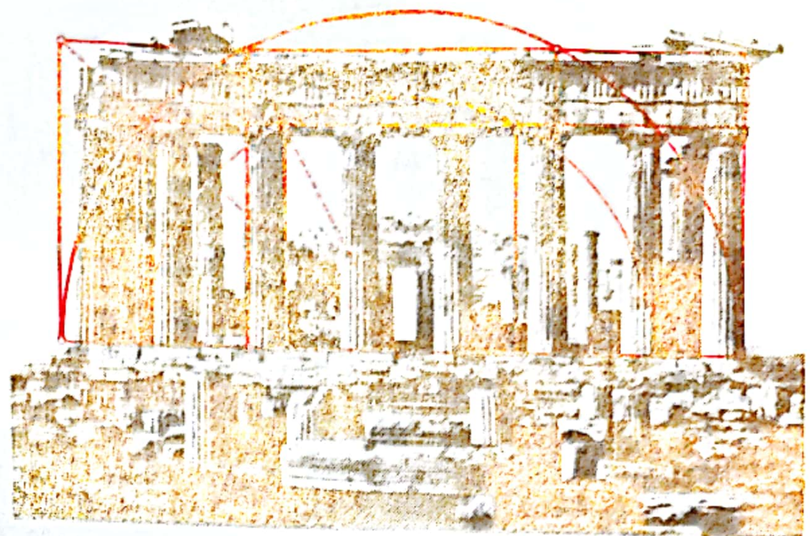




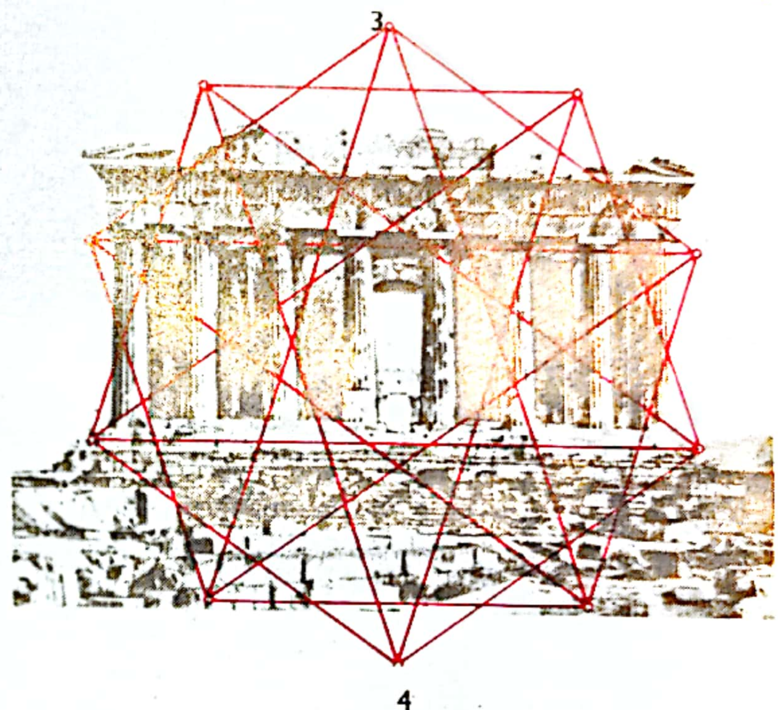
1.

2.





3



4

Figura 1. a) Împărțirea unui segment *AB* în medie și extremă rație: *M* și *m*. b) Determinarea lui $m=BC$ plecînd de la $M=AB$. c) Construcția pentagonului regulat de latură dată $AB=m$, diagonalele $AC=M$. d) Construcția pentagonului regulat înscris în cerc. e) Construcția dreptunghiului Φ din pătrat. Șirul infinit de pătrate înscrise lui.

Figura 2. Stea de mare (simetrie 5).

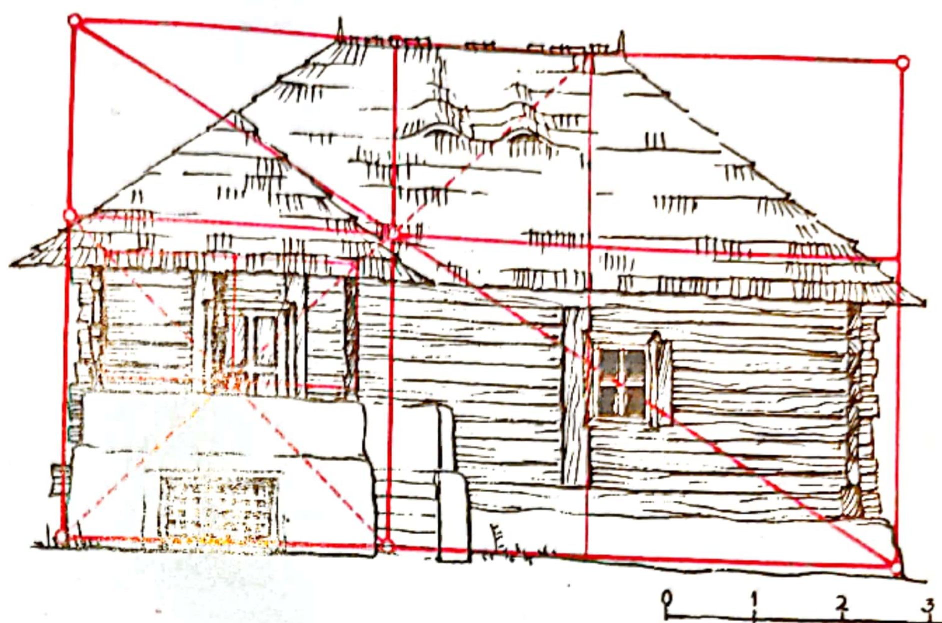
Figura 3. Fațada Partenonului și traseul global de dreptunghiuri Φ și $\sqrt{5}$ (Ad. Gheorghiu, 1960).

Figura 4. Înscrierea fațadei Partenonului în pentagramă (Ad. Gheorghiu, 1960).

1.

3.

Figura 1. Înscrierea corpului omenesc în pătrat şi cerc (Leonardo da Vinci).
Figura 2. Modulorul lui Le Corbusier.
Figura 3. Înscrierea faţadei loggiei cariatidelor de la Erechteion (Lucie Wolfer-Sulzer, 1941).



1.

2.

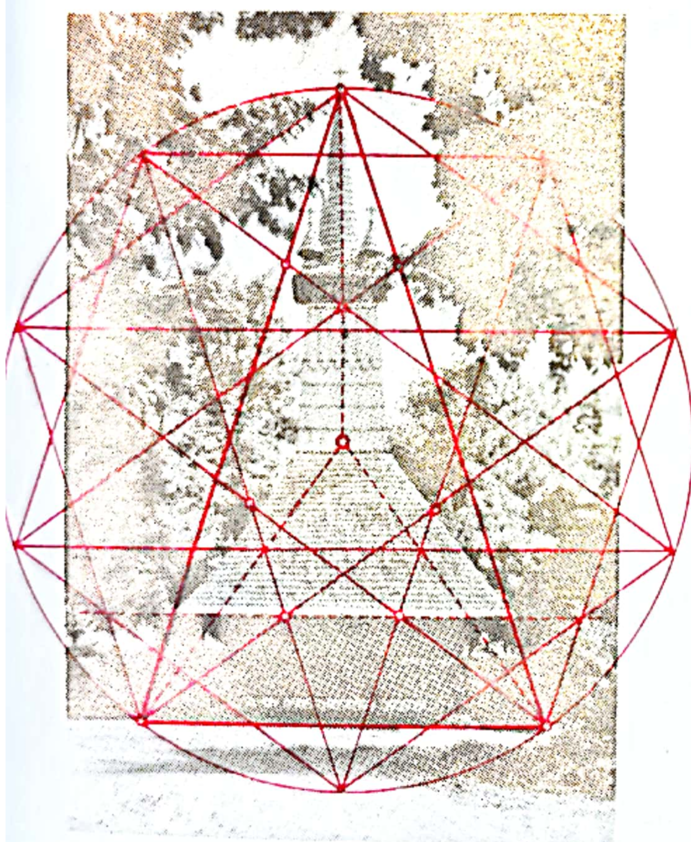


Figura 2. Biserica de lemn din Turea—Cluj (azi în Muzeul Satului—București) și înscrierea ei în pentagramă (Ad. Gheorghiu, 1970).

Figura 1. Casa cu foișor din Bîrzoteni—Vîlcea (azi în Muzeul Satului—București) și înscrierea ei în dreptunghiul Φ (Ad. Gheorghiu, 1956).

3.

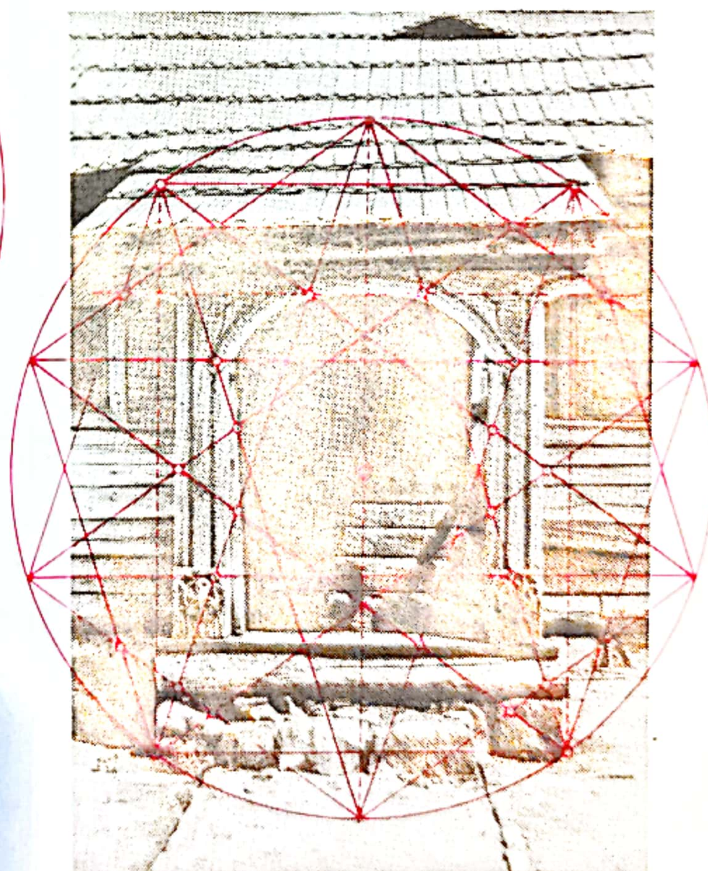


Figura 3. Portalul casei Mogoș din Ceauru—Gorj (Ad. Gheorghiu, 1966).

Trasee geometrice pentagonale pe sculptura lui Brâncuşi (Ad. Gheorghiu, 1966).

1

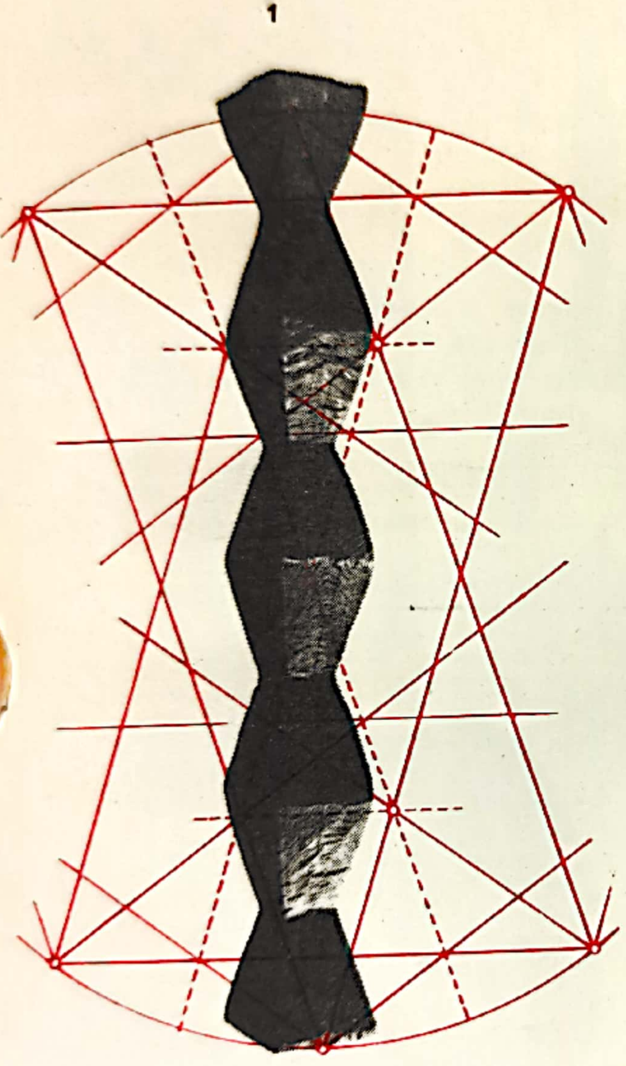


Figura 1. Coloana fără sfîrşit (lemn, 1918).

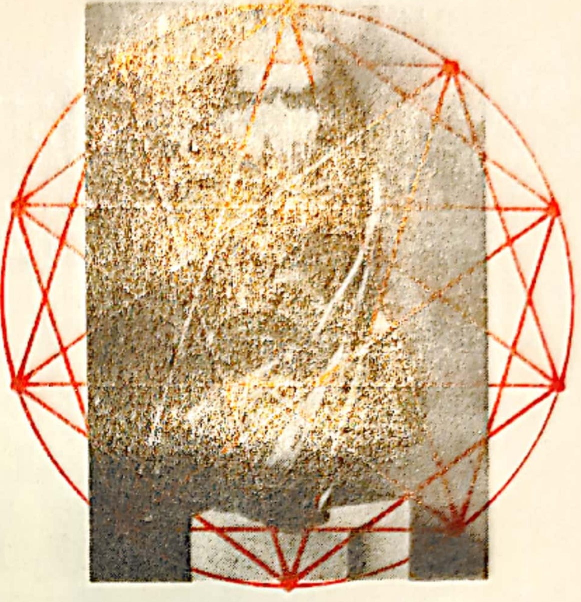


Figura 2. Portretul domnişoarei Pogany.

2

3.

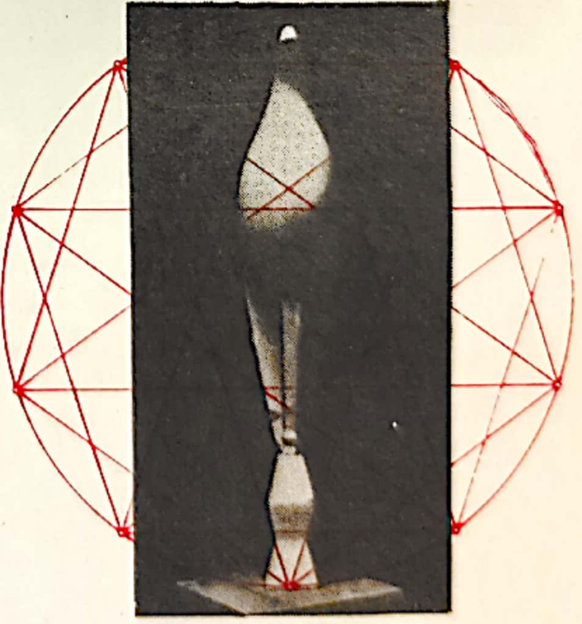


Figura 3. Pasărea măiastră (marmură, 1915).

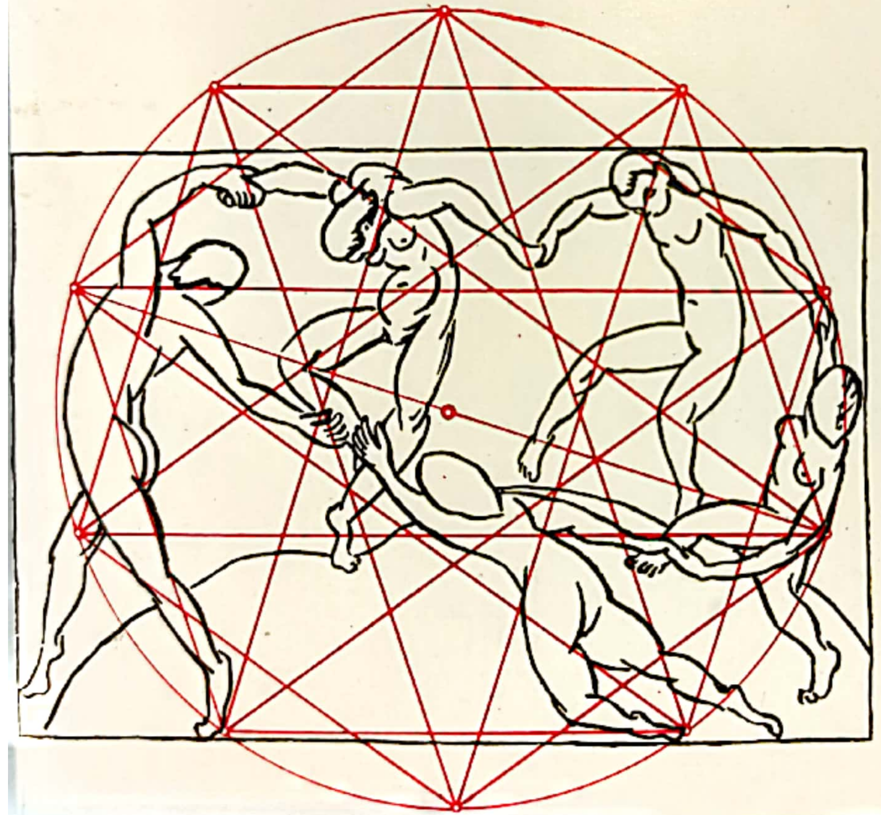
modul inițial

2 3 5 8

inversarea ascendentă a distribuirii descendente | distribuirea descendentă | modul inițial | inversarea descendentă

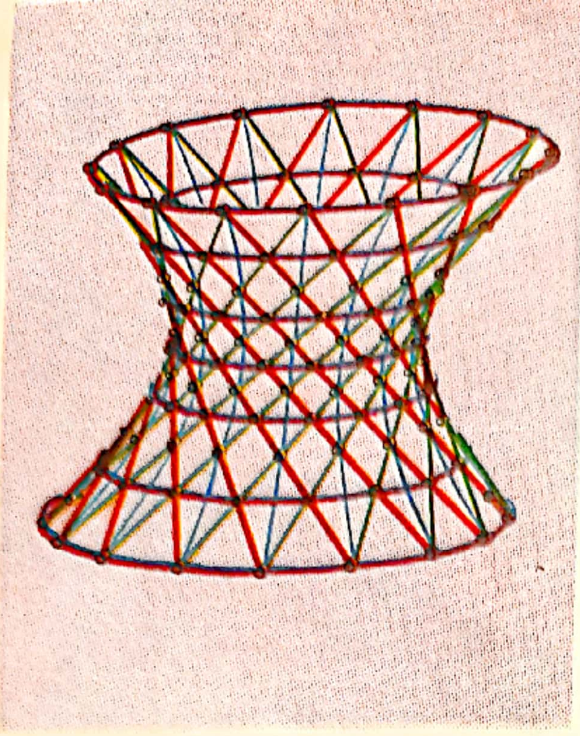
2 3 5 8 | 2 3 5 8 | 2 3 5 8 | 2 3 5 8

Moduri construite pe proporțiile *secțiunii de aur* (unitatea de măsură = semitonul; S=semiton, T=ton).
Distribuirea sunetelor în raport cu sunetul fundamental (W. Berger, *Moduri și proporții*, 1965).

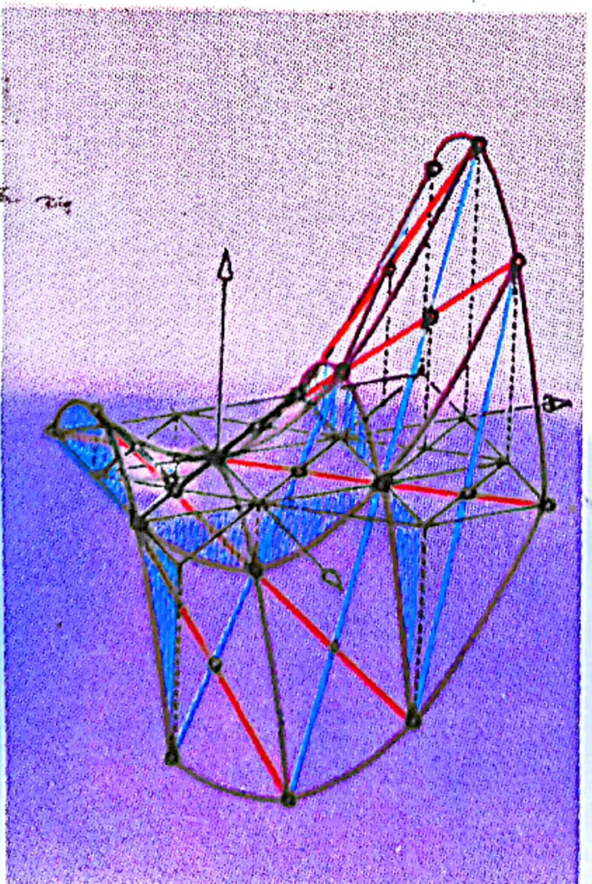




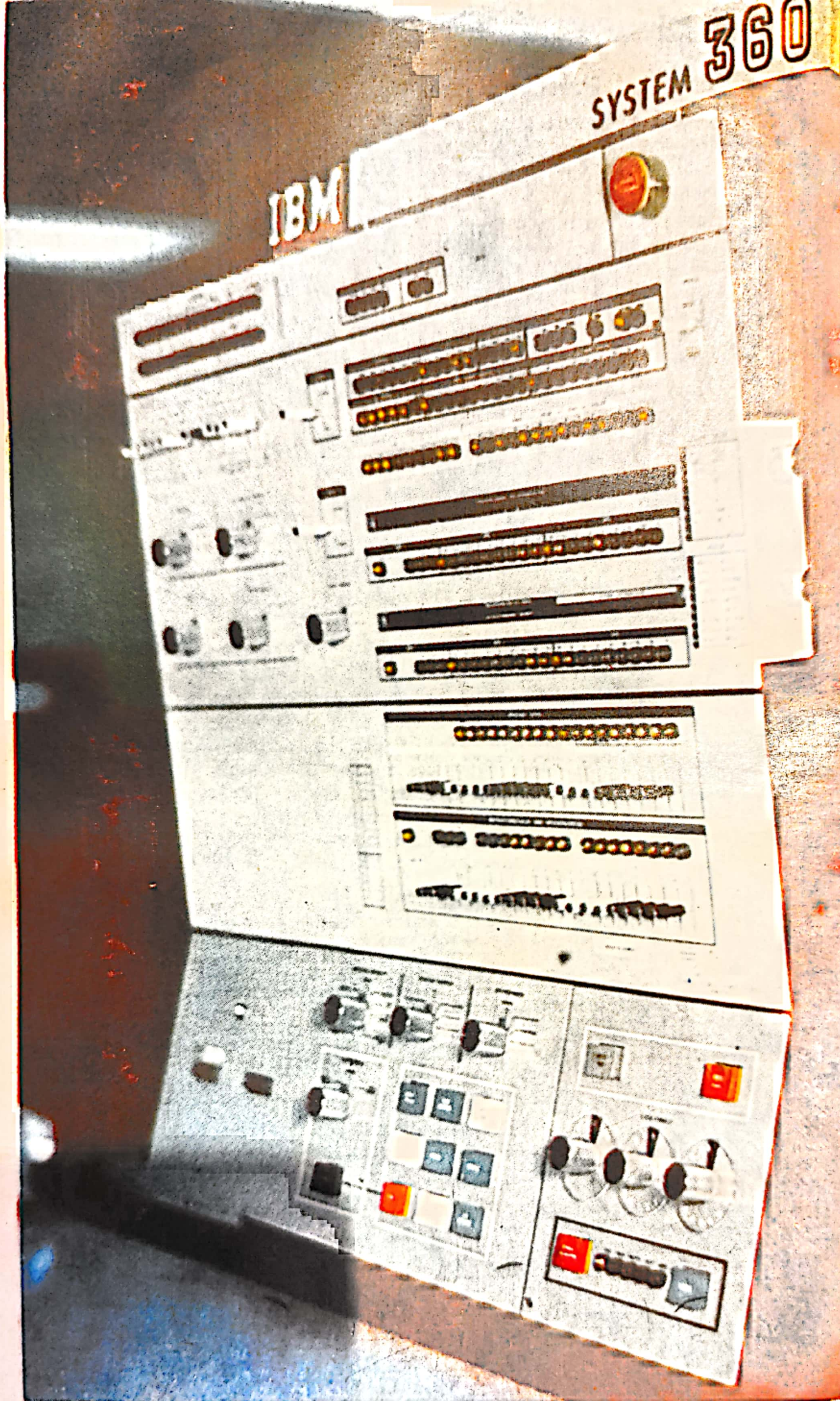
Dansul lui Matisse și înscrierea lui în pentagramă (Ad. Gheorghiu, 1972)



Hiperboloid cu o pînză.



Paraboloid hiperbolic.



Panou de comandă al unui calculator electronic (I.B.M./360).

L

Lagrange [lagrãj], **Joseph Louis** (1736—1813), matematician și mecanician francez. Profesor la școala militară din Torino (unde a înființat o societate științifică, devenită ulterior Academia de Științe din Torino), apoi la Paris, la Școala Normală Superioară și la Școala Politehnică. I-a succedat lui L. Euler la Academia de Științe din Berlin; membru asociat al Academiei de Științe din Paris. Creatorul mecanicii analitice (enunță principiul vitezelor virtuale, dă ecuațiile care-i poartă numele). Unul dintre inițiatorii calculului variațional. În domeniul ecuațiilor diferențiale, a dat metoda variației constantelor și a introdus noțiunea de integrală completă; în analiza matematică a extins dezvoltarea în serie a funcțiilor de mai multe variabile, a dat formula creșterilor finite și o formulă de interpolare. Contribuții în teoria numerelor, algebră, mecanica fluidelor. Pentru lucrările sale de mecanică cerească, a fost de cinci ori premiat de Academia de Științe din Paris. A contribuit la stabilirea sistemului zecimal de măsuri și greutăți. Op. pr.: *Mécanique analytique*, 2 volume, 1788; *Traité de la résolution numerique des équations de tous les degrés*, 1798; *Théorie des variations séculaires des éléments des planètes*, 1781. *(V.B.)*

Lalescu, Traian (1882—1929), matematician român. Studii la Facultatea de Științe din București, la Paris (doctor la Sorbona, 1908), unde îl are ca profesor pe E. Picard, și la Göttingen. Profesor la Școala de poduri și șosele (din 1911), la Universitatea din București (agregat din 1912; titular din 1916), rector și profesor al Școlii politehnice din Timișoara (din 1920). Înființează în 1921 „Revista matematică" din Timișoara. Contribuții importante la teoria ecuațiilor integrale; autor al primei monografii, pe plan mondial, referitoare la acest domeniu. Lucrări de geometrie (inclusiv geometrie elementară), matematică aplicată, istoria matematicii. Op. pr.: *Introducere în teoria ecuațiilor integrale*, 1911 (ed. în lb. franceză, 1912; în lb. polonă, 1918), *Tratat de geometrie analitică*, 1920—1927; *La géometrie du triangle*, 1937 (ed. în lb. română, 1958). *(V.B.)*

Laplace [laplas], **Pierre Simon, marchiz de** (1749—1827), matematician și astronom francez. Profesor la Școala Politehnică și la Școala Normală Superioară din Paris. Membru al Academiei de Științe din Paris. Lucrări de analiză matematică (funcții sferice de două variabile, integrale cu limite imaginare, ecuații cu diferențe finite, ecuații diferențiale și cu derivate parțiale), geometrie diferențială (suprafețe omofocale de ordinul doi, a propus denumirea geodezicelor), teoria probabilităților. Contribuții la crearea sistemului zecimal de măsuri și greutăți. În domeniul fizicii, a dat o teorie a capilarității și a undelor în lichide și a descris calorimetrul cu

gheață. Importante lucrări de astronomie: a studiat problema stabilității sistemului solar, a explicat inegalitățile mișcării lui Jupiter și Saturn, a dedus valoarea turtirii la poli a Pămîntului, prin studierea perturbațiilor Lunii, a dat o celebră teorie cosmogonică. Op. pr.: *Exposition du système du monde*, 1796; *Mécanique céleste*, 5 volume, 1799—1825; *Théorie analytique des probabilités*, 1812; *Essai philosophique sur les probabilités*, 1814. *(V.B.)*

laplacian (Δ, ∇^2), operator diferențial liniar de ordinul doi, definit formal în spațiul funcțiilor de clasă C^2, prin produsul scalar al operatorului nabla cu el însuși: $\nabla \cdot \nabla =$ $=$ divgrad, adică, într-un sistem de referință cartezian,

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Este singurul operator diferențial de ordinul doi invariant la o transformare ortogonală de coordonate, adică, dacă de la sistemul (x, y, z) se trece la sistemul (X, Y, Z) printr-o transformare ortogonală, deci $\varphi(x, y, z) =$ $= \Phi(X, Y, Z)$, atunci:

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} = \frac{\partial^2\Phi}{\partial X^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2\Phi}{\partial Z^2}.$$

În coordonate sferice (r, θ, φ), unde $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$,

$$\Delta = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2 \sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2},$$

iar în coordonate cilindrice (r, φ, z) unde $r^2 = x^2 + y^2$,

$$\Delta = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Ecuația $\Delta U = 0$ se numește ecuația lui Laplace, și joacă un rol important în mecanică și în fizica matematică; în acest caz, U primește denumirea de *funcție armonică*. *(V.B., Șt.G.)*

lanț cu legături complete (simplu, cu o mulțime finită de stări), proces stochastic cu parametru discret (T numărabilă) și cu mulțimea stărilor finită ($I = \{1, 2, ..., m+1\}$), cu proprietățile:

$$p_j^{(n+1)} = \varphi_{ij}^{(n)}\,(p_1^{(n)}, p_2^{(n)}, ..., p_m^{(n)}),$$

pentru orice $i, j \in I$, $n \in \mathbb{N}$, în ipoteza că la momentul n procesul a fost în starea i (cu $p_k^{(s)}$ s-a notat probabilitatea ca la momentul $s \in \mathbb{N}$ procesul să se găsească în starea $k \in I$). Funcțiile $\varphi_{ij}^{(n)}$ numite funcții fundamentale, verifică relațiile:

$0 \leqslant \varphi_{ij}^{(n)} \leqslant 1$, $\sum_{j\in I} \varphi_{ij}^{(n)} = 1$, pentru orice $i \in I$.

Lanțurile cu legături complete au fost introduse în teoria proceselor stochastice de către O. Onicescu și Gh. Mihoc (1935), ca o generalizare a lanțurilor Markov. Ulterior, studiul lanțurilor cu legături complete și al proceselor cu legături complete a fost dezvoltat de o serie de matematicieni, școala românească de teoria probabilităților avînd o contribuție importantă în acest domeniu. *(A.Ș.)*

lanț Markov, proces stochastic, în care mulțimea stărilor este cel mult numărabilă, satisfăcînd proprietatea lui Markov:

$$P(X_t = i_t \mid X_u = i_u,\ u \leqslant v) = P(X_t = i_t \mid X_v = i_v),\ t > v.$$

În cazul în care parametrul t descrie o mulţime discretă (de regulă N), un rol important pentru caracterizarea procesului revine probabilităţilor de forma:

$$P(X_{t+1} = j \mid X_t = i) = p_{ij}(t)$$

$$P(X_{t+n} = j \mid X_t = i) = p_{ij}^{(n)}(t),$$

numite *probabilităţi de trecere* (după un pas, respectiv n paşi), unde i şi j desemnează două stări oarecare din mulţimea stărilor I. — *Matrice stochastică*, matrice ale cărei elemente $p_{ij}(i, j \in I, I$ finită sau numărabilă$)$ satisfac relaţiile:

$$\sum_{j \in I} p_{ij} = 1, \text{ pentru orice } i \in I.$$

Matricea $P(t) = \| p_{ij}^{(t)} \|_{i, j \in I}$ (t fixat) a probabilităţilor de trecere ale unui lanţ Markov este o matrice stochastică. Teoria lanţurilor Markov constituie capitolul teoriei proceselor stochastice, în care s-au obţinut cele mai multe rezultate cu aplicaţii importante în multe ramuri ale ştiinţei (cercetare operaţională, biologie, sociologie etc.) *(A.Ş.)*

latice [engl. *latice* „reţea, structură"], mulţime M înzestrată cu două legi de compoziţie $f, g : M \times M \to M$, notate $f(x, y) = x \wedge y$ şi $g(x, y) = x \vee y$ (numite conjuncţie şi disjuncţie) avînd proprietăţile:

a) $x \wedge x = x$; $x \vee x = x$, pentru orice $x \in M$ (idempotenţă);

b) $x \wedge y = y \wedge x$; $x \vee y = y \wedge x$, pentru orice $x, y \in M$ (comutativitate);

c) $x \wedge (y \vee x) = x$; $x \vee (y \wedge x) = x$, pentru orice $x, y \in M$ (absorbţie).

Dacă disjuncţia este distributivă faţă de conjuncţie (rezultă atunci că şi conjuncţia este distributivă faţă de disjuncţie şi reciproc), laticea se numeşte distributivă. Mulţimea părţilor unei mulţimi este o latice distributivă. Orice algebră booleană este o latice distributivă. *(V.B., A.B.)*

latitudine [lat. *latitudinis* „lăţime, lărgime"], una dintre coordonatele polare spaţiale, φ, reprezentînd unghiul făcut de raza vectoare a unui punct dat, cu planul xOy al triedrului ortogonal, la care se raportează punctul. *(V.B.)*

lănţişor, curbă plană, reprezentînd poziţia de echilibru a unui fir greu şi omogen, flexibil şi inextensibil, ale cărui capete sînt fixate în două puncte. Ecuaţia carteziană a lănţişorului este:

$$y = a \operatorname{ch} \frac{x}{a}.$$

Lănţişorul este o curbă simetrică faţă de axa Oy, aşezată în semiplanul $y > 0$, la care punctul cu ordonata minimă, $A(0, a)$ reprezintă vîrful său (fig. 89). Aria trapezului curbiliniu determinat de un arc AB al lănţişorului şi de proiecţia lui pe axa Ox este proporţională cu lungimea s a arcului:

$$A = as.$$

Lănţişorul se întîlneşte ca extremală în unele probleme variaţionale; el

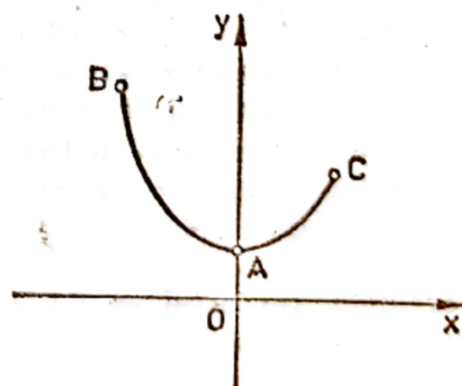


Fig. 89

apare în studiul bolților podurilor și în alte probleme practice. Problema de echilibru menționată a fost pusă de G. Galilei (1638). Ecuația lănțișorului a fost dată de G. Leibniz și Jean Bernoulli (1691), iar denumirea de Ch. Huygens. *(V.B.)*

Lebesgue [löbęg], **Henri** (1875—1941), matematician francez. Profesor la Universitățile din Rennes, Poitiers, la Sorbona și la Collège de France. Membru al Academiei de Științe din Paris. S-a remarcat îndeosebi prin contribuții în teoria măsurii, generalizînd noțiunile clasice de lungime și arie (măsura Lebesgue), ceea ce i-a permis să definească un nou tip de integrală, deschizînd un cîmp larg de aplicații. Op. pr.: *Leçon sur l'integrations et la recherche des fonctions primitives*, 1904. *(V.B.)*

legătură, restricție impusă mișcării unui sistem de puncte materiale. Ea reduce numărul gradelor de libertate ale sistemului. Dacă sistemul e alcătuit din N puncte materiale, acesta e supus la legături atunci cînd numărul gradelor de libertate este mai mic decît $3N$. Cînd sistemul de ecuații diferențiale care exprimă legătura este integrabil, legătura se numește *olonomă*; în caz contrar, ea se numește *neolonomă*. Dacă în ecuațiile care exprimă legătura apare explicit timpul t, ea se numește *reonomă*, iar dacă t nu apare explicit, avem o legătură *scleronomă*. Cînd legătura se exprimă printr-o ecuație, ea se numește *bilaterală*, iar cînd se exprimă printr-o inegalitate se numește *unilaterală*. Pentru un punct material, prima corespunde cazului cînd acesta nu poate părăsi legătura (de exemplu o suprafață), iar în al doilea caz punctul material poate părăsi legătura (de exemplu, contactul cu o suprafață poate înceta la un moment dat). O legătură, poate fi fără frecare (denumită atunci, uneori, legătură ideală) sau cu frecare. Paul Appell a luat ca definiție a legăturii fără frecare anularea lucrului mecanic virtual pentru toate deplasările elementare compatibile cu legătura. *(Șt. G.)*

legea atracției universale: între două puncte materiale P_1 și P_2, de mase m_1 și respectiv m_2, se exercită o atracție reciprocă, dirijată de-a lungul dreptei P_1P_2, de intensitate $fm_1m_2r^{-2}$, unde f este o constantă universală iar $r = |P_1P_2|$. Constanta f are ecuația dimensională $[f] = M^{-1}L^3T^{-2}$ și în sistemul CGS valoarea ei este $6{,}664 \cdot 10^{-8}$. Henri Cavendish a realizat în 1798 un dispozitiv pentru măsurarea în laborator a acestei constante. *(Șt.G.)*

legea lui Baer: un punct material care alunecă, fără frecare, pe un plan orizontal, este deviat, față de direcția vitezei inițiale, spre dreapta, în emisfera nordică și spre stînga, în emisfera sudică. Ea explică de ce rîurile atacă malul drept în emisfera nordică, malul stîng în emisfera sudică și de ce se abat vînturile alizee. *(Șt.G.)*

legea numerelor mari, lege statistică prin care se afirmă că raportul dintre numărul de apariții ale unui eveniment aleator A și numărul total n de experiențe, în care evenimentul poate apare, tinde spre probabilitatea lui A, cînd n crește foarte mult. Prima variantă a legii numerelor mari a fost formulată de Jacques Bernoulli (1705). Ulterior, au fost stabilite condiții mai largi în care ea este valabilă. S.Poisson (1837) i-a atribuit această denumire, P.L. Cebîșev (1867) a demonstrat-o riguros și în toată generalitatea ei. Legea numerelor mari constituie o expresie a legăturii dialectice dintre necesitate și întîmplare. *(V.B.)*

lege de compoziție internă (pe o mulțime M), funcție definită pe o parte a produsului cartezian $M \times M$, cu

valori în M. Ex.: scăderea este o lege de compoziție internă pe mulțimea **N** a numerelor naturale, definită pentru perechile (m, n) cu $m > n$. — *Lege de compoziție internă peste tot definită*, funcție definită pe produsul cartezian $M \times M$, cu valori în M. Ex.: operațiile aritmetice pe mulțimea numerelor reale, compunerea vectorilor, adunarea și înmulțirea matricilor pătratice. — *Lege de compoziție externă* (între elementele unei mulțimi M și elementele unei mulțimi K), funcție definită pe o parte a produsului cartezian $K \times M$, cu valori în M. Elementele mulțimii K se numesc operatori sau scalari. — *Lege de compoziție externă peste tot definită*, funcție definită pe produsul cartezian $K \times M$, cu valori în M. Ex.: înmulțirea cu scalari a vectorilor, înmulțirea cu numere reale a matricilor. Noțiunea de lege de compoziție, ca extensie a noțiunii de operație aritmetică, a apărut (după 1830) datorită algebriștilor englezi. *(V.B., A.B.)*

lege de repartiție → repartiție

Legendre [lŏjãdrə], **Adrian Marie** (1752—1833), matematician francez, profesor la Școala militară, la Școala Politehnică și la Școala Normală Superioară din Paris. Membru al Academiei de Științe din Paris. A făcut parte din comisia însărcinată cu operațiile geodezice care trebuiau să lege observatorul astronomic din Paris cu cel din Greenwich, a fost director la Bureau des Longitudes. Activitatea sa științifică a început cu memoriul *Recherches sur la trajectorie des projectiles dans les milieux résistans* (1782, pentru care a fost premiat de Academia din Berlin), continuînd cu cercetări privind atracția elipsoizilor, determinarea orbitelor cometelor (pentru care a introdus, independent de K. Gauss, metoda celor mai mici pătrate), calculul variațiilor, integrarea ecuațiilor cu derivate parțiale, analiza nedeterminată, demonstrarea iraționalității lui π, teoria numerelor (fiind cel dintîi care a formulat problema repartiției asimptotice a numerelor prime), teoria paralelelor și, mai ales, teoria funcțiilor eliptice. Op. pr.: *Eléments de géométrie*, 1794; *Essai sur la théorie des nombres*, 1798; *Nouvelle théorie des parallèles*, 1803; *Nouvelles méthodes sur la détermination des orbites des comètes*, 1806; *Traité des fonctions elliptiques et des integrales euleriennes*, 3 volume, 1825—1832. *(V.B.)*

legile lui Kepler, legi referitoare la mișcarea planetelor în jurul Soarelui. Considerîndu-se Soarele S și o planetă P ca niște puncte materiale, Johannes Kepler a dedus din observații că: a) P descrie o elipsă în jurul lui S, care ocupă unul din focare; b) raza SP descrie arii egale în intervale de timp egale; c) raportul dintre cubul axei mari a elipsei descrise de P și pătratul timpului de revoluție este același pentru orice planetă a sistemului solar. Primele două legi, într-o formulare puțin diferită, au apărut în *Astronomia nova* (1609), iar a treia în *Harmonices mundi* (1619). *(Șt.G.)*

Leibniz [lai̯bniț], **Gottfried Wilhelm** (1646—1716), matematician și filozof german. Primul președinte al Academiei de Științe din Berlin (la a cărei înființare a contribuit, 1700), membru în Royal Society din Londra și al Academiei de Științe din Paris. A întemeiat cunoscuta revistă „Acta Eruditorum“ (1682). Ca matematician, a fost autodidact (a studiat lucrările lui R. Descartes, B. Pascal ș.a.), orientarea sa spre matematică datorîndu-se lui Chr. Huygens. A creat (independent de I. Newton) calculul diferențial și integral; a stabilit regulile de derivare (dînd, printre altele, formula pentru derivata de ordin n a unui produs de funcții),

a încadrat variatele probleme de cuadraturi în problema generală a integrării, a dat formula de derivare sub integrală, a integrat funcţii raţionale (prin descompunere în fracţii simple), trigonometrice, logaritmice, a propus denumiri şi notaţii fundamentale. A rezolvat ecuaţii diferenţiale prin metoda coeficienţilor nedeterminaţi sau cu ajutorul seriilor. În domeniul algebrei, a pregătit noţiunea de determinant, a făcut distincţie între funcţiile algebrice şi transcendente; a adus contribuţii la dezvoltarea analizei combinatorii, a calculului probabilităţilor şi aritmeticii binare. În mecanică, a enunţat legea conservării energiei cinetice. A inventat o maşină de calcul, a proiectat instrumente tehnice, elevatoare, baraje, pontoane metalice, tunuri. Opera sa este cuprinsă în memoriile pe care le-a publicat în „Acta Eruditorum" şi într-o bogată corespondenţă (c. 15 000 scrisori). *(V.B.)*

lema lui Cesàro: orice şir mărginit conţine un subşir convergent. *(V.B.)*

lemă [gr. *lemma* „propoziţie luată ca argument"], propoziţie ajutătoare folosită la demonstrarea unei teoreme. Ex. lema: mărimea sumei unor vectori situaţi pe aceeaşi axă este egală cu suma mărimilor vectorilor daţi, ajută la demonstrarea teoremei: proiecţia sumei unor vectori, pe o axă, este egală cu suma proiecţiilor vectorilor, pe aceeaşi axă. Lemele au fost folosite iniţial de Euclid (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

lemniscată [gr. *lemniscos* „panglică"], curbă plană, loc geometric al punctelor pentru care produsul distanţelor la două puncte fixe este egal cu pătratul jumătăţii distanţei dintre punctele fixe:

$$MF_1 \cdot MF_2 = a^2,$$

unde F_1, F_2 sînt punctele fixe, $F_1F_2 = 2a$ (fig. 90). Lemniscata este un

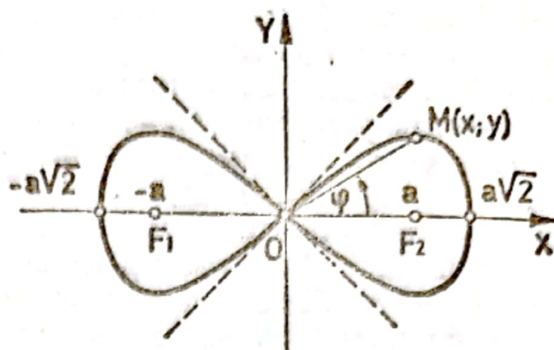


Fig. 90

oval. Ecuaţia carteziană a lemniscatei este:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) = 0,$$

iar ecuaţia polară (cu polul în originea sistemului cartezian):

$$r^2 = 2a^2 \cos 2\theta.$$

Aria unei bucle a lemniscatei este: $A = 2a^2$. Lemniscata a fost considerată şi denumită astfel de Jacques Bernoulli (1694), ca soluţie a unei probleme de mecanică. *(V.B.)*

Levi-Civita, Tullio (1873—1941), matematician şi mecanician italian. Profesor la universităţile din Padova şi Roma. Membru al Academiei de Ştiinţe din Paris, al Academiei dei Lincei (Italia) şi în Royal Society din Londra. Creator (împreună cu G. Ricci) al calculului tensorial. Lucrări de teoria ecuaţiilor diferenţiale, geometrie diferenţială, hidrodinamică, teoria relativităţii. Op. pr.: *Lezzioni di meccanica razionale*, 3 vol., 1923—1927 (în colab.); *Lezzioni di calcolo differenziale assoluto*, 1925. *(V.B.)*

L'Hôspital [lopital], **Guillaume François de** (1661—1704), matematician francez. Membru al Academiei de Ştiinţe din Paris. A purtat o intensă corespondenţă cu G. Leibniz. A scris primul manual de calcul diferenţial, *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes* (1696), unde, pe lîngă prezentarea

ideilor lui G. Leibniz, dă aşa-numita regulă a lui l'Hôspital (care i-a fost comunicată de Jean Bernoulli). A scris o lucrare referitoare la secţiunile conice *„Traité analytique des sectiones coniques"* (publicată postum, 1707). *(V.B.)*

limbaj de programare, ansamblu de reguli sintactice şi semantice ce trebuie urmate în scrierea unui program. Regulile sintactice descriu simbolurile de bază ale limbajului, fac posibilă distincţia formală între entităţile limbajului şi permit recunoaşterea textelor corecte în limbajul respectiv, în timp ce regulile semantice descriu rolul pe care entităţile îl au în procesul algoritmic. — *Limbaj maşină,* limbaj de programare ale cărui instrucţiuni sînt şiruri binare, interpretate direct de unitatea centrală. Constituie prima treaptă de comunicare între om şi calculator. — *Limbaj orientat către calculator,* limbaj de programare apropiat de limbajul maşină, dar care foloseşte metode de adresare mai convenabile şi coduri mnemonice pentru operaţii. Ex.: ASSEMBLER, ASSIRIS. — *Limbaj orientat către problemă,* limbaj care permite descrierea problemelor pentru care o soluţie generală a fost programată. Astfel, limbajul RPG (engl. *R*eport *P*rogram *G*enerator) este capabil să elaboreze proiectul unui raport dat. — *Limbaj orientat către procedură,* limbaj care permite descrierea problemei similar cu modul în care ea este exprimată şi cu procedeul de rezolvare. Astfel de limbaje sînt FORTRAN, COBOL, PL/1. — *Limbaj simbolic,* limbaj ale cărui instrucţiuni trebuie traduse, înainte de executare, în limbaj maşină. Sistemele de convenţii ale limbajelor simbolice sînt apropiate de convenţiile matematice uzuale şi de limbajul uman, astfel încît programarea devine uşoară şi lasă impresia unei „conversaţii" cu calculatorul. *(T.B.)*

limita unei funcţii [lat. *limes-limitis* „limită, hotar"] (într-un punct x_0; $\lim_{x\to x_0} f(x)$), numărul l, astfel încît oricare ar fi şirul $x_n \to x_0$ format din puncte $x_n \neq x_0$, din domeniul de definiţie E, şirul $(f(x_n))$ al valorilor funcţiei tinde către l (x_0 fiind un punct de acumulare al lui E). Condiţii echivalente sînt date de următoarele teoreme: a) $l = \lim_{x\to x_0} f(x)$ dacă şi numai dacă pentru orice vecinătate U a lui l există o vecinătate V a lui x_0, astfel încît, oricare ar fi $x \neq x_0$ din $V \cap E$ să avem $f(x) \in U$; b) $l = \lim_{x\to x_0} f(x)$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$, există $\delta > 0$, astfel încît oricare ar fi $x \in E$, $x \neq x_0$, cu $|x - x_0| < \delta$, să avem $|f(x) - l| < \varepsilon$. Simbolul „lim", propus de S. Lhuilier (1788), s-a impus datorită lui A. Cauchy (1821). — *Limită la dreapta (respectiv la stînga),* numărul l_d (respectiv l_s) astfel încît oricare ar fi şirul $x_n \to x_0$ format din puncte $x_n > x_0$ (respectiv $x_n < x_0$) din E, şirul $(f(x_n))$ să tindă la l_d (respectiv la l_s). Se mai folosesc notaţiile $l_d = \lim_{x\searrow x_0} f(x) = f(x_0 + 0)$ (respectiv $l_s = \lim_{x\nearrow x_0} f(x) = f(x_0 - 0)$). Aceste limite se numesc *limite laterale.* Dacă limitele laterale există şi sînt egale, atunci funcţia are limită în x_0 egală cu valoarea comună a limitelor laterale. Notaţiile folosite pentru limitele laterale au fost propuse de P. Dirichlet (1837). *(V.B.)*

limita unui şir (de numere reale; $\lim_{n\to\infty} a_n$, $a_n \to a$), numărul a, astfel încît, în afara oricărei vecinătăţi a lui a se află (cel mult) un număr finit de termeni ai şirului. Un şir care admite limită se numeşte convergent, iar un şir care nu admite limită, divergent. Dacă există, limita unui şir este unică. O condiţie echivalentă de conver-

genţă a unui şir este dată de teorema: $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ dacă şi numai dacă pentru orice $\varepsilon > 0$ se poate găsi un rang n_ε (care depinde de ε), astfel încît pentru toţi termenii a_n de rang mai mare ca n_ε $(n \geqslant n_\varepsilon)$ să aibă loc inegalitatea $|a_n - a| < \varepsilon$. Prima trecere la limită se întîlneşte la A. Tacquet (1654); J. Wallis (1656) a fost cel dintîi care a considerat valoarea limitei ca rezultat al unui proces infinit. *(V.B.)*

linia apsidelor → apside

linie → curbă

linie de forţă, curbă care are în fiecare punct al ei tangenta dirijată după forţele cîmpului. *(Şt.G.)*

linie geodezică → geodezică

linie mijlocie 1. (Pentru un triunghi). Segmentul care uneşte mijloacele a două laturi. Linia mijlocie este paralelă cu a treia latură a triunghiului şi este egală cu jumătate din ea. **2.** (Pentru un trapez). Segmentul care uneşte mijloacele laturilor neparalele. Linia mijlocie este paralelă cu bazele şi egală cu semisuma lor. *(V.B.)*

Lobacevski, Nicolai Ivanovici (1792—1856), matematician rus. Profesor la Universitatea din Kazan. Membru al unor societăţi ştiinţifice printre care şi Societatea regală din Göttingen (la propunerea lui K. Gauss). Creatorul (concomitent cu J. Bolyai) primei geometrii neeuclidiene, ale cărei idei le-a expus în lucrarea *Précis de géometrie fondée sur une théorie générale et rigoureuse des parallèles*, 1826. *(V.B.)*

loc geometric, mulţime de puncte. Ex.: mediatoarea unui segment este locul geometric al punctelor din plan egal depărtate de extremităţile segmentului; bisectoarea unui unghi este locul geometric al punctelor din planul unghiului egal depărtate de laturile unghiului. Primele referiri asupra noţiunii aparţin lui Platon (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

logaritm [gr. *logos* „proporţie", *arithmos* „număr"] (al unui număr real N, $N > 0$, în baza b, $b > 0$, $b \neq 1$; $\log_b N$), exponentul n la care trebuie ridicată baza b pentru a obţine numărul N:

$$\log_b N = n \text{ echivalent cu } b^n = N.$$

Ex.: $\log_2 8 = 3$, $\log_3 \frac{1}{9} = -2$. Proprietăţile logaritmilor sînt exprimate în relaţiile:

$$\log_b 1 = 0$$

$$\log_b b = 1$$

$$\log_b AB = \log_b A + \log_b B$$

$$\log_b \frac{A}{B} = \log_b A - \log_b B$$

$$\log_b A^p = p \log_b A, \ (p \in \mathbf{R})$$

$$\log_b A = \frac{\log_c A}{\log_c b}$$ (formula schimbării bazei).

Folosirea logaritmilor înlesneşte efectuarea calculelor numerice deoarece înmulţirea numerelor se înlocuieşte prin adunarea logaritmilor lor; împărţirea, prin scădere; ridicarea la putere, prin înmulţirea logaritmului cu un număr, iar extragerea rădăcinii, prin împărţirea logaritmului cu un număr. Logaritmii au fost inventaţi de J. Neper (*Mirifici logarithmorum canonis descriptio*, 1614) în urma asocierii termenilor unei progresii aritmetice cu cei ai unei progresii geometrice. J. Neper a folosit logaritmii în baza e, numiţi logaritmi neperieni sau naturali (notaţi ln N) şi a propus denumirea de logaritm. H. Briggs (*Arithmetica logarithmica*,

1624) a calculat logaritmii zecimali (logaritmi în baza 10, notați lg N) pentru numerele naturale cuprinse între 1—20 000 și 90 000—100 000. Primele notații abreviate pentru logaritmi apar la J. Kepler (1624: Log) și B. Cavalieri (1632: log și 1643: l), iar abrevierile pentru logaritmii neperieni și zecimali au fost propuse de A. Cauchy (1821). *(V.B.)*

logică matematică [gr. *logos* „rațiune, discurs"], știință care are ca obiect studiul formelor propoziționale și legile de raționare cu expresii propoziționale, precum și metodele care permit realizarea acestui studiu. În studiul propozițiilor sau expresiilor propoziționale, logica matematică este interesată numai de valoarea logică, adică de adevărul sau falsitatea acestora. R. Descartes, prin încercarea de a forma o știință matematică generală, a stimulat cercetările logice în direcția simbolismului matematic, lucru realizat parțial de G. Leibniz. La jumătatea secolului 19, G. Boole și A. De Morgan au introdus metodele matematice în logică, creînd logica matematică. Calculul logic al lui G. Boole se face după regulile din algebră, punîndu-se în evidență izomorfismul dintre unele formule logice și matematice. Contribuții ulterioare au adus G. Frege, G. Peano, B. Russel, ultimul fiind și autor (împreună cu A. N. Whitehead) al primului tratat modern de logică matematică, *Principia Mathematica* (1910—1913). Într-o etapă următoare, apar primele sisteme de logică polivalentă datorate lui J. Lukasiewicz și L.E. Post. În țara noastră, cercetările de logică matematică au fost inițiate de Gr. Moisil (1933) și cunosc în prezent o remarcabilă dezvoltare. Aplicațiile logicii matematice, se referă la teoria algebrică a automatelor, programarea automată, limbaje informaționale, iar cercetările contemporane tind să extindă considerabil sfera aplicațiilor. *(A.B.)*

longitudine [lat. *longitudo-inis* „lungime, întindere"], una dintre coordonatele polare spațiale, θ, reprezentînd unghiul făcut de planul dus prin axa *Oz* și raza vectoare a unui punct cu planul *xOz* al triedrului ortogonal la care se raportează punctul dat. *(V.B.)*

loxodromă [gr. *loxos* „oblic", *dromos* „drum"], curbă situată pe sferă, care taie meridianele acesteia sub un unghi constant (fig. 91). Traiectoria unei nave dirijate constant către un același punct al busolei este o loxodromă. Elementul de arc pe loxodromă este proporțional cu diferența latitudinilor. Loxodroma a fost descoperită de P. Nunes (1537), care o denumise „rumbus"; termenul actual aparține lui W. Snellius (1624). — *Loxodromă a unei familii de curbe pe o suprafață*, curbă care intersectează curbele familiei sub un unghi constant. *(V.B.)*

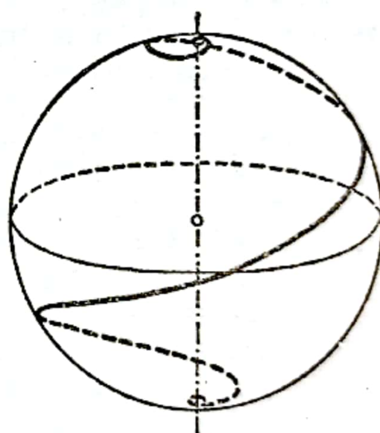


Fig. 91

lucru mecanic *(L, W)*, schimbare a formei mișcării privită din punct de vedere cantitativ, un proces în decursul căruia o anumită formă de mișcare trece în altă formă de mișcare. Pentru un punct material a cărui poziție e determinată de **r** și asupra căruia acționează o forță **F**, măsura acestei transformări între două puncte ale traiectoriei sale este dată de:

$$L = \oint_A^B \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}.$$

În cazul forțelor conservative, L nu depinde decît de extremitățile A și B ale drumului parcurs. *(Șt. G.)*

lucru mecanic motor *(L_m)*, lucrul mecanic cheltuit pentru funcționarea unei mașini. În timpul funcționării de regim, lucrul mecanic motor este egal cu lucrul mecanic rezistent. *(Șt. G.)*

lucrul mecanic pasiv *(L_p)*, lucrul mecanic consumat în timpul funcționării unei mașini pentru învingerea frecărilor. *(Șt. G.)*

lucrul mecanic rezistent *(L_r)*, lucrul mecanic produs în timpul funcționării unei mașini de forțele rezistente și cuplurile rezistente. El se compune din lucrul mecanic util și lucrul mecanic pasiv. *(Șt. G.)*

lucrul mecanic util *(L_u)*, lucru mecanic realizat de o mașină, în scopul pentru care este ea destinată. *(Șt.G.)*

lunulă [lat. *lunula* „semiluna"], figură plană formată din două arce de cerc avînd aceleași extremități. — *Lunulele lui Hipocrate*, cele două lunule obținute prin construcția unor semicercuri pe ipotenuza și catetele unui triunghi dreptunghic. Suma ariilor lor este egală cu aria triunghiului dat (fig. 92). Prin studiul lunulelor, Hipocrate (sec. 5 î.e.n.) a dat primul exemplu de cuadratură a unei figuri curbilinii. *(V.B.)*

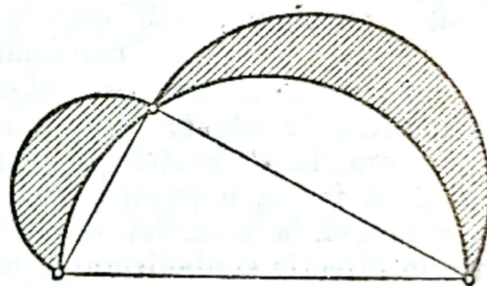


Fig. 92

M

macroinstrucţiune, grup de instrucţiuni desemnat simbolic printr-un singur cod. *(T.B.)*

majorant [lat. *major* „mai mare"] (al unei mulţimi $M \subset \mathbf{R}$), număr a, cu proprietatea $a \geqslant x$, pentru orice $x \in M$. *(V.B.)*

mantisă [lat. *mantissa* „completare"], partea zecimală (totdeauna pozitivă, prin convenţie) a logaritmului unui număr. Mantisa logaritmului (zecimal) unui număr este aceeaşi, indiferent de locul virgulei sau de numărul zerourilor finale ale acelui număr. Ex.: lg2 sau lg0,002 sau lg20 au aceeaşi mantisă: 30103. Termenul a fost propus de J. Wallis *(Mathematica universalis*, 1657*)* pentru desemnarea părţii zecimale a fracţiilor. *(V.B.)*

marcă → etichetă

margine inferioară [lat. *margo-inis* „extremitate"] (a unei mulţimi $M \subset \mathbf{R}$; inf M, $\inf\limits_{x \in M} \{x\}$), număr α cu proprietăţile: a) $\alpha \leqslant x$ pentru orice $x \in M$; b) pentru orice $\varepsilon > 0$ există un element $x_\varepsilon \in M$ astfel încît $\alpha + \varepsilon > x_\varepsilon$. Marginea inferioară a mulţimii M este cel mai mare minorant al mulţimii M. *(V.B.)*

margine superioară (a unei mulţimi $M \subset \mathbf{R}$; sup M, $\sup\limits_{x \in M} \{x\}$), număr α cu proprietăţile: a) $\alpha \geqslant x$ pentru orice $x \in M$; b) pentru orice $\varepsilon > 0$ există un element $x_\varepsilon \in M$, astfel încît $\alpha - \varepsilon < x_\varepsilon$. Marginea superioară a mulţimii M este cel mai mic majorant al mulţimii M. *(V.B.)*

Marinescu, Gheorghe (n. 1919), matematician român. Studii la Universitatea din Bucureşti (doctor, 1949). Profesor la Universitatea din Bucureşti (din 1960). Membru al Academiei R.S. România (din 1974; membru corespondent din 1963). Cercetări în domeniul analizei funcţionale (spaţii pseudotopologice) şi al teoriei probabilităţilor. A publicat primele monografii în limba română privind spaţiile vectoriale normate şi spaţiile vectoriale topologice şi pseudotopologice. Op. pr.: *Spaţii vectoriale normate*, 1956; *Spaţii vectoriale topologice şi pseudotopologice*, 1959; *Espaces vectorielles pseudotopologiques et théorie des distributions*, 1962. *(V.B.)*

Markov, Andrei Andreevici (1856—1892), matematician rus. Profesor la Universitatea din Petersburg. Membru al Academiei de Ştiinţe din Petersburg. Lucrări de teoria numerelor, analiză matematică (ecuaţii diferenţiale, serii, teoria celei mai bune aproximări) şi mai ales teoria probabilităţilor (a introdus noţiunea de lanţ Markov). Op. pr.: *Iscislenie veroiatnostei*, 1900. *(V.B.)*

masă *(m)*, mărime care măsoară principala proprietate inerţială a unui corp material, aceea de a opune

o rezistenţă la schimbarea mişcării sale. Legătura materiei cu spaţiul, care-i constituie suportul geometric, este dată prin ceea ce se numeşte repartiţia masei ei. Masa este o mărime aditivă, finită în orice parte finită a spaţiului. Repartiţia masei se prezintă ca o mulţime cel mult numărabilă de mase spaţial indivizibile, localizate în puncte izolate, definite prin vectorii de poziţie $\mathbf{r}_j (j = 1, 2, \ldots, N)$, cu masele respective m_j, sau ca o masă indefinit divizibilă, odată cu spaţiul ocupat. La viteze mici în comparaţie cu viteza luminii, masa unui corp este independentă de viteza sa. Atunci, pentru două puncte materiale în interacţiune, de mase m_1 şi, respectiv m_2, care capătă în urma interacţiunii acceleraţii de mărimi a_1 şi, respectiv a_2, există relaţia: $\frac{m_1}{m_2} = \frac{a_2}{a_1}$. În acest fel masa oricărui punct material se poate măsura faţă de un punct material standard. Pentru un mediu continuu, care ocupă la un moment dat un domeniu tridimensional D raportat la un sistem fix de referinţă, se admite existenţa unei funcţii continue, pozitiv definită, $\varrho(x, y, z, t)$, numită *masă specifică* sau *densitate*, astfel încît masa oricărei părţi din mediu care ocupă domeniul $\mathfrak{D}$, cu $\mathfrak{D} \subseteq D$, să fie de

$$m_{\mathfrak{D}} = \iiint_{\mathfrak{D}} \varrho(x, y, z, t) \, dx \, dy \, dz.$$

Prin aplicarea teoremei mediei, rezultă că masa care ocupă la un moment t un domeniu de volum dV este $dm = \varrho(x, y, z, t) \, dV$, unde (x, y, z) reprezintă un punct al acestui domeniu. *Masa (totală) a unui sistem* de puncte materiale care au masele m_j, $j = 1, 2, \ldots, n$, este egală cu suma maselor tuturor punctelor sistemului, adică $M = \sum_{1}^{n} m_j$. *Masa inertă* a unui corp caracterizează proprietatea materiei de a-şi modifica viteza sub influenţa unei anumite acţiuni, iar *masa grea*, proprietatea corpului de a crea cîmpuri gravitaţionale şi de a fi acţionat de asemenea cîmpuri. Masa grea a unui punct material se calculează din legea atracţiei universale a lui Newton, dacă se cunoaşte intensitatea forţei gravitaţionale exercitată asupra sa şi acceleraţia gravifică a punctului material în poziţia dată. Newton a considerat masa inertă echivalentă cantitativ cu masa grea, iar experienţele lui R. Eötvös (1890) şi cele ale lui R. Dicke (1959—1964), care a extins precizia la 10^{-11}, au confirmat egalitatea celor două mărimi. Fenomenele inerţiale şi cele gravitaţionale oglindesc manifestări diferite ale masei ca o însuşire fundamentală a materiei. Teoria relativităţii a fundamentat teoretic egalitatea masei inerte cu masa grea. *(Şt.G.)*

maşina lui Atwood, aparat care serveşte la determinarea experimentală a acceleraţiei gravitaţionale şi constă

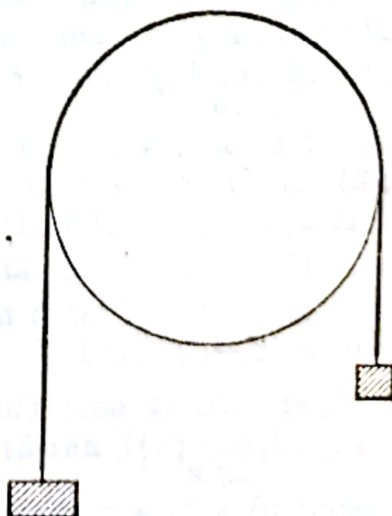


Fig. 93

dintr-un scripete cu axa orizontală, un fir flexibil şi inextensibil, de masă neglijabilă, trecut peste scripete şi avînd la capetele sale *A* şi *B* două greutăţi neegale (fig. 93). Inventată de G. Atwood (sec. 18). *(Şt. G.)*

Matematica în România. Pe teritoriul patriei noastre primele şcoli au fost înfiinţate după constituirea celor trei formaţiuni politice de sine stătătoare Transilvania, Ţara Românească şi Moldova; odată cu scrisul şi cititul erau predate şi primele noţiuni de aritmetică. Cu toate că între cele trei state au existat trainice legături economice, politice şi culturale, ele au avut, datorită condiţiilor istorice deosebite, o dezvoltare diferită. În Ţara Românească şi Moldova, care au avut de suferit de pe urma repetatelor incursiuni prădalnice ale turcilor şi tătarilor, şcoala nu avea condiţii favorabile de dezvoltare. Prima şcoală de nivel mai înalt a apărut într-o vreme de relativă stabilitate, şcoala de la Trei Ierarhi, din Iaşi, din 1644; în cadrul cursurilor de filozofie erau predate aici şi noţiuni de aritmetică, geometrie şi cosmografie. În Transilvania, ferită de condiţiile vitregi care au afectat viaţa internă a Ţării Româneşti şi Moldovei, au existat, în afara şcolilor elementare întreţinute de comune, vechi colegii catolice sau protestante şi o universitate catolică la Cluj, între 1581—1603; în cadrul cursurilor de filozofie erau predate şi cunoştinţe de matematici, la nivelul universităţilor similare din Occident. Între 1622—1658 a funcţionat Academia protestantă din Alba Iulia, unde au fost profesori Johann Alsted (1588—1638) şi Johann Bisterfeld. În 1698 au fost reluate cursurile la Universitatea din Cluj, care a funcţionat pînă în 1773 şi unde profesori de seamă au fost Nicolae Ianosi (1701—1741) şi Maximilian Hell (1720—1790). În Ţara Românească şi Moldova, un rol deosebit l-au jucat academiile domneşti, cu predarea în limba greacă, de la Bucureşti, din 1679, şi Iaşi, din 1714. Ca profesori de matematică în aceste academii s-au remarcat Manase Eliadis, Iosif Mesiodax, Ion Comnea, Nicolae Cercel, Nikifor Teotokis, Grigore Constanda, Dimitrie Gobdela ş.a. Aceste academii, care şi-au desfăşurat activitatea pînă în 1820, sînt comparabile cu universităţile din apusul Europei. Prima şcoală românească de grad mediu a românilor din Transilvania a fost cea de la Blaj, din 1754. Aici au predat matematica profesori ca: Grigore Major (1715—1785), Samuel Micu (1745—1806), Gheorghe Şincai (1754—1816). Doctori în filozofie la Roma, ei aveau astfel cea mai înaltă calificare posibilă atunci. Gh. Şincai este şi autorul primei aritmetici tipărite în limba română, în 1785. În secolul 18, mai existau în Transilvania şcoli cu caracter mediu, în Năsăud şi Caransebeş, întreţinute de comunele româneşti organizate în regimentele grănicereşti. O importanţă deosebită a avut-o Preparandia (şcoala normală) din Arad, din 1812, profesori de matematici fiind aici Iosif Iorgovici (1792—1820), doctor în filozofie, şi Alexandru Gavra (1797—1884). Cursuri complete de matematici în limba română au ţinut pentru prima oară Gheorghe Asachi (1788—1869), la Iaşi (1814—1818) şi Gheorghe Lazăr (1779—1823), la Bucureşti (1818—1820). Ei au pregătit primii ingineri topografi români. Şcoala de la Sf. Sava, întemeiată de Gh. Lazăr, a funcţionat fără întrerupere, cursurile de matematică fiind predate în continuare de profesori ca: Ion Eliade Rădulescu (1802—1872), Petrache Poenaru (1799—1875), Gheorghe Pop, Dumitru Pavel (1795—1883) ş.a. În Moldova, primii profesori de matematici după Asachi au fost: Vasile Bob (1795—1836), Teodor Sta-

mati (1812—1852), Alexandru Costinescu (1812—1872), Anton Velini (?1817—1873) ş.a. În prima parte a secolului 19 s-au tradus sau prelucrat primele manuale de nivel mediu în limba română, datorate lui Ion Eliade Rădulescu (*Aritmetica*, 1832), Petrache Poenaru (*Geometria*, 1837), Gheorghe Asachi (*Algebra*, 1837), Dumitru Pavel (*Trigonometria*, 1850). În a doua jumătate a secolului 19 s-a extins reţeaua liceelor. În afara manualelor traduse, apar şi cărţi originale, scrise metodic, mai ales de către universitari. La sfîrşitul secolului (1895) a apărut „Gazeta Matematică“, redactată mai ales de Ion Ionescu (1870—1946), de o deosebită importanţă pentru învăţămînt. În 1860 s-a înfiinţat Universitatea din Iaşi, profesori de matematici cu o mai îndelungată activitate fiind Ştefan Emilian (1819—1899), Nicolae Culianu (1832—1915), Ion Melic (1840—1889), Miltiade Ţoni (1843—1898), Constantin Climescu (1844—1926), Ion Ralet (1851—1916). Din 1863 datează Facultatea de matematici din Bucureşti, deşi cursurile de matematici superioare datează cel puţin din 1851, sub forma de cursuri complementare, la liceul Sf. Sava. Profesori de matematici, în secolul trecut, cu o activitate îndelungată au fost: Alexandru Orăscu (1847—1894), Ermil Pangrati (1864—1931), Spiru Haret (1851—1912), Constantin Gogu (1854—1897), David Emmanuel (1854—1941), Nicolae Coculescu (1866—1952). Primele cursuri de matematici superioare în limba română, traduceri sau prelucrări, se datorează lui Alexandru Orăscu (*Geometria descriptivă*, 1851), Emanoil Bacaloglu (*Algebră superioară*, 1866), Ştefan Emilian (*Perspectivă*, 1866), Nicolae Culianu (*Calculul diferenţial şi integral*, 1870), Constantin Climescu (*Geometrie analitică*, 1898). În ceea ce priveşte activitatea ştiinţifică, Paul Şipoş (1759—1816) a scris în 1790 un memoriu, premiat de Academia din Berlin, prin care rectifică elipsa cu ajutorul arcului de cohleoidă; Farkaş Bolyai (1775—1856) a scris mai multe cărţi, tratate în mod personal, urmărind o fundamentare riguroasă; Ianos Bolyai (1802—1860) a publicat în 1831 la Tîrgu Mureş lucrarea *Appedix*, prin care împarte cu N.I. Lobacevski, gloria creării geometriei neeuclidiene. Emanoil Bacaloglu (1830—1891) este autorul unor lucrări originale de matematică, fizică şi chimie, publicate, între 1859—1863, în periodicele internaţionale de specialitate; el a propus o altă măsură a curburii suprafeţelor. Primii români doctori în matematici de la Paris, au fost: Spiru Haret, din 1878, cu o teză în care demonstrează, contrar opiniei generale, că sistemul solar nu este stabil; David Emmanuel, în 1879, cu o teză despre inversarea integralelor abeliene; Constantin Gogu, în 1882, care dovedeşte că acţiunea planetei Marte asupra Lunii este insensibilă; Nicolae Coculescu, în 1895, cu o teză despre termenii de ordin ridicat în dezvoltarea funcţiei perturbatoare. În prima jumătate a secolului 20, profesori de prestigiu ai Universităţii din Bucureşti au fost Gheorghe Ţiţeica (1873—1939), Anton Davidoglu (1876—1958), Traian Lalescu (1882—1929), Dimitrie Pompeiu (1873—1954), Gheorghe Nichifor (1886—1946), Octav Onicescu (n. 1892), Dan Barbilian (1895—1961), Victor Vâlcovici (1885—1970), Nicolae Racliş (1896—1966), Gabriel Sudan (n. 1899), Alexandru Pantazi (1896—1948), Alexandru Ghica (1902—1964), Gheorghe Demetrescu (1885—1969), Gheorghe Vrănceanu (n. 1900), Simion Stoilow (1887—1961) ş.a. La Politehnica din Bucureşti profesori de matematici au fost: Andrei Ioachimescu (1868—1943), Ernest Abason (1897—1942), Nicolae Cioränescu (1903—1957) şi unii profesori ai Universităţii. La

Universitatea din Iaşi, au fost profesori de matematici: Victor Costin (1872—1939), Constantin Popovici (1879—1958), Alexandru Myller (1879—1965), Vera Myller (1880—1970), Simeon Sanielevici (1870—1963), Octav Mayer (1895—1966) ş.a. La Universitatea din Cluj, au fost profesori: Nicolae Abramescu (1884—1947), Aurel Angelescu (1886—1938), Teodor Angheluţă (1882—1964), Gheorghe Bratu (1881—1941), Gheorghe Iuga (1871—1958), Petre Sergescu (1893—1954), Gheorghe Călugăreanu (n. 1902), Dumitru V. Ionescu (n. 1901), Tiberiu Popoviciu (n. 1906), Tiberiu Mihăilescu (n. 1902), ş.a. La Politehnica din Timişoara, au fost profesori de matematici Valeriu Alaci (1884—1955), Ovidiu Ţino (1881—1963), Mihail Ghermănescu (1899—1962), Emanoil Arghiriade (1903—1971), Ioan Curea (n. 1901) ş.a. În ceea ce priveşte activitatea ştiinţifică, în prima jumătate a secolului 20, menţionăm în ordinea susţinerii doctoratelor, domeniile cercetate de matematicienii români mai reprezentativi. Gheorghe Ţiţeica a studiat congruenţele speciale, reţelele, sistemele triplu conjugate, deformarea suprafeţelor, geometria afină diferenţială; în 1907 a scos în evidenţă o clasă de suprafeţe, numite astăzi suprafeţe Ţiţeica, cu caracter centroafin; în 1924 a scris o carte fundamentală privind teoria proiectivă a reţelelor. Dimitrie Pompeiu a dovedit, în 1905, existenţa funcţiilor analitice uniforme continue pe mulţimea singularităţilor lor; în 1921 a introdus noţiunea de derivată areolară. Alexandru Myller a extins paralelismul pe varietăţi şi a introdus, în 1924, noţiunea de direcţii concurente în spaţii cu conexiune. Traian Lalescu a studiat ecuaţiile integrale şi seriile trigonometrice; în 1911 a elaborat o lucrare de sinteză despre ecuaţiile integrale. Constantin Popovici a studiat ecuaţiile interfuncţionale. Victor Vâlcovici a studiat hidrodinamica mişcărilor cu suprafeţe de discontinuitate, cu vîrtej constant etc. Aurel Angelescu a generalizat polinoamele Legendre. Simion Stoilow a studiat legătura dintre singularităţile datelor şi ale soluţiilor ecuaţiilor liniare cu derivate parţiale, proprietăţile generale ale funcţiilor de variabile reale, transformările interioare; în 1938 a publicat o importantă lucrare despre proprietăţile topologice ale funcţiilor analitice. Octav Mayer a rezolvat problema orientabilităţii spaţiilor proiective, în 1944; a considerat diferite geometrii proiective cu subgrup fundamental. Octav Onicescu a dat o nouă axiomatizare teoriei probabilităţilor cu ajutorul noţiunii de funcţie sumă cu valori într-un spaţiu Banach, a dat o nouă teorie a gravitaţiei; a scris numeroase cărţi fundamentale de teoria probabilităţilor. Gheorghe Vrănceanu a introdus noţiunea de transformări de congruenţe, de spaţii neolonome, a construit o teorie unitară neolonomă a energiei şi gravitaţiei, a studiat geometrizarea ecuaţiilor cu derivate parţiale, geometria globală. Gabriel Sudan a studiat numerele transfinite şi geometrizarea teoriei numerelor. Gheorghe Călugăreanu a construit o teorie invariantă a funcţiilor analitice. Alexandru Pantazi a studiat deformarea hipersuprafeţelor, congruenţele stratificabile. Miron Nicolescu (n. 1903) a studiat funcţiile poliarmonice, funcţiile policalorice, analiza globală, funcţiile de variabilă reală. Dumitru V. Ionescu a studiat ecuaţiile funcţionale, analiza numerică. Nicolae Ciorănescu a studiat ecuaţiile cu derivate parţiale. Alexandru Froda (n. 1895) a studiat discontinuităţile funcţiilor de variabilă reală, a dat o nouă fundamentare mecanicii. Dan Barbilian a studiat probleme de geo-

metrie algebrică, a generalizat noţiunea de spaţiu neeuclidian prin metrizarea unei mulţimi date în raport cu o mulţime absolută, a introdus noţiunea de geometrie proiectivă cu inel fundamental, a adîncit problemele de axiomatica geometriei şi a mecanicii, a adus contribuţii în teoria lui Galois şi în teoria numerelor. Grigore Moisil (1906—1973) a studiat spaţiul riemannian singular, mişcarea corpurilor elastice, hidrodinamica fluidelor incompresibile, funcţiile olomorfe în spaţiu, ecuaţiile cu derivate parţiale, algebrele neasociative, algebra logicii, mecanismele automate etc. Alexandru Ghika a studiat reprezentarea analitică a funcţiilor monogene uniforme, a introdus noţiunea de puncte interstiţiale, a extins noţiunea de cuasianaliticitate, a studiat ecuaţiile funcţionale. Nicolae Teodorescu (n. 1908) a generalizat derivata areolară, a studiat ecuaţiile cu derivate parţiale ale fizicii matematice. Tiberiu Popoviciu a studiat funcţiile convexe, analiza numerică. Mendel Haimovici (1906—1973) a studiat spaţiile finsleriene, spaţiile neolonome, geometrizarea ecuaţiilor cu derivate parţiale. Gheorghe Mihoc (n. 1906) a studiat proprietăţile variabilelor statistice independente, lanţurile Markov, lanţurile cu legături complete. Mihail Ghermănescu a studiat ecuaţiile funcţionale. Caius Iacob (n. 1912) a studiat probleme la limită în analiză, mecanica fluidelor. Constantin Drîmbă (n. 1907) a studiat problema celor trei corpuri. Tiberiu Mihăilescu a studiat varietăţile neolonome ale spaţiului proiectiv. Gheorghe Marinescu (n. 1919) a studiat analiza funcţională, spaţiile de distribuţie etc. Rezultate deosebite au fost obţinute şi de alţi matematicieni români şi mai ales de cercetătorii tineri din Institutele de matematică ale Academiei R.S. România, create din anul 1949. *(N.M.)*

matrice [lat *matrix-icis*], tablou format din mn numere reale sau complexe a_{ij} $(i = 1, 2, ..., m; j = 1, 2, ..., n)$, dispuse în m linii şi n coloane:

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Perechea ordonată (m, n) se numeşte *tipul matricii A*. Noţiunea şi denumirea, precum şi notaţia, au fost introduse de A. Cayley (1858); uneori, pentru notarea matricilor se folosesc paranteze drepte (după propunerea lui C.E. Cullis, 1913), sau paranteze rotunde (la sugestia lui M. Bôcher, 1919). — *Adunarea matricilor*, operaţie definită pentru două matrici $A = \|a_{ij}\|$, $B = \|b_{ij}\|$, de acelaşi tip (m, n), astfel: $A + B = C$, unde $C = \|c_{ij}\|$ este o matrice de tip (m, n), cu $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$, pentru fiecare i, j. — *Produsul dintre numărul $\alpha (\alpha \in \mathbf{R})$ şi matricea $A = \| a_{ij} \|$*, operaţie definită prin $\alpha A = B$, unde $B = \| b_{ij} \|$, cu $b_{ij} = \alpha a_{ij}$, pentru fiecare i, j. — *Înmulţirea a două matrici*, operaţie definită pentru două matrici $A = \|a_{ij}\|$, de tip (m, n), şi $B = \|b_{ij}\|$ de tip (n, p), prin: $A \cdot B = C$, unde $C = \|c_{ij}\|$ este o matrice de tip (m, p), cu $c_{ij} = \sum_{h=1}^{n} a_{ih} b_{hj}$, pentru fiecare i, j. Înmulţirea matricilor nu este comutativă. Pentru matrici pătrate de acelaşi ordin, are loc relaţia: $\det (AB) = \det A \cdot \det B$. *(V.B.)*

matrice coloană, matrice de tip $(m, 1)$. *(V.B.)*

matrice diagonală, matrice pătrată $A = \|a_{ij}\|_n$, cu proprietatea $a_{ij} = 0$, pentru orice i, j cu $i \neq j$. *(V.B.)*

matrice inversă (a unei matrici nesingulare A; A^{-1}), matricea A^{-1} cu proprietatea $A \cdot A^{-1} = A \cdot A^{-1} = I$, unde I este matricea unitate. Dacă $A = \| a_{ij} \|_n$, atunci $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$, unde A^* este reciproca lui A. *(V.B.)*

matrice linie, matrice de tip $(1, n)$. *(V.B.)*

matrice nesingulară, matrice pătrată A, cu proprietatea $\det A \neq 0$. *(V.B.)*

matrice pătrată, matrice la care numărul liniilor este egal cu numărul coloanelor $(m = n)$. Mulţimea matricilor pătrate de ordinul n este un inel (necomutativ) cu element unitate. *(V.B.)*

matrice reciprocă (a unei matrici pătrate A; A*), matricea care se obţine înlocuind în matricea transpusă A^τ, a lui A, fiecare element cu complementul său algebric în $\det (A^\tau)$. Dacă $A = \| a_{ij} \|_n$, atunci $A^* = \| \Gamma_{ji} \|_n$. *(V.B.)*

matrice singulară, matrice pătrată A, cu proprietatea $\det A = 0$. *(V.B.)*

matrice stochastică → **lanţ Markov**

matrice transpusă (a unei matrice A; A^τ), matrice care se obţine schimbînd în A liniile în coloane. Dacă A este o matrice pătrată, atunci $\det A = \det A^\tau$. *(V.B.)*

matrice unitate, matrice diagonală $I = \| e_{ij} \|$, cu proprietatea $e_{ii} = 1$, pentru orice i. Este elementul neutru pentru înmulţirea matricilor pătrate. *(V.B.)*

matrice zero, matrice cu toate elementele egale cu zero. Matricea zero este elementul neutru pentru adunare. *(V.B.)*

maxim [lat. *maximus* „cel mai mare"] (al unei funcţii f), numărul $f(M)$, unde M este un punct de maxim al funcţiei f. *(V.B.)*

Mayer, Octav (1895—1966), geometru român. Studii la Facultatea de Ştiinţe din Iaşi (doctor, 1920). Profesor la Universitatea din Cernăuţi (agregat din 1925, titular din 1928) şi la Universitatea din Iaşi (din 1929). Membru al Academiei R.S. România (din 1955). A condus revistele: „Analele ştiinţifice ale Universităţii din Iaşi" (din 1935) şi „Studii şi cercetări ştiinţifice" ale filialei Iaşi a Academiei (din 1955). Lucrări de geometrie diferenţială (în special geometrie centroafină), geometrie proiectivă (a considerat o clasă de suprafeţe, care îi poartă numele). Op. pr.: *Curs de geometrie analitică*, 1951 (în colab.). *(V.B.)*

măsură [lat. *mensura* „cîtime, mărime"] (pozitivă), funcţie $m: K \to \mathbf{R}$, unde K este un clan, cu proprietăţile:

a) $m(A) \geqslant 0$, pentru orice $A \in K$;
b) $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$, pentru orice $A, B \in K$ cu $A \cap B = \emptyset$. O măsură m mai are următoarele proprietăţi:
$m(A - B) = m(A) - m(B)$, dacă $A \supset B$;
$m(A) \leqslant m(B)$, dacă $A \subset B$;
$m(A \cup B) \leqslant m(A) + m(B)$, pentru orice $A, B \in K$. Noţiunea de măsură a unei mulţimi în spaţiul euclidian (începînd cu cazul unei mulţimi liniare) generalizează noţiunea de lungime a unui segment de dreaptă, de arie a unui poligon, de volum al unui poliedru etc. Pentru măsura unei mulţimi de puncte din spaţiul cu una sau mai multe dimensiuni s-au dat definiţii de către G.B. Riemann, G. Cantor, G. Darboux; s-au statornicit trei feluri de măsuri: măsura Jordan (J), introdusă de C.M. Jordan (1887); măsura Borel (B), datorată lui E. Borel (1898) şi măsura Lebesgue (L), definită de H. Lebesgue (1902). *(V.B.)*

mecanica fluidelor, parte a mecanicii care se ocupă cu echilibrul şi mişcarea fluidelor. Ea se divide în: hidrostatică, care studiază echilibrul maselor fluide, fundamentată în special prin lucrările lui Arhimede şi B. Pascal, cinematica fluidelor care studiază mişcarea fluidelor, făcîndu-se abstracţie de forţele ce acţionează asupra particulelor fluide, şi hidrodinamică. Mai cuprinde şi dinamica gazelor care studiază mişcarea gazelor sub acţiunea forţelor aplicate asupra lor. Se mai numeşte *hidromecanică*. *(Şt.G.)*

mecanica solidelor deformabile, parte a mecanicii care se ocupă cu echilibrul şi mişcarea solidelor cînd se consideră deformările pe care acestea le pot avea sub acţiunea forţelor aplicate. Cînd corpurile sînt considerate elastice, echilibrul lor se studiază în elastostatică, iar mişcarea lor în elastodinamică. Capitolele în care se consideră şi influenţa altor factori poartă denumiri corespunzătoare, de exemplu magnetoelasticitate, cînd se ţine seama de influenţa cîmpurilor electromagnetice sau termoelasticitate, cînd se consideră acţiunea cîmpului termic. *(Şt.G.)*

mecanică [gr. *mehanika* „maşină, mecanism"], una dintre ştiinţele fundamentale ale naturii (alături de fizică, chimie şi biologie), avînd ca obiect studiul primei forme de mişcare a materiei, mişcarea mecanică. Este cea mai veche dintre ştiinţele fundamentale ale naturii. Primele cunoştinţe de mecanică au fost folosite încă din antichitate pentru realizarea construcţiilor, deplasarea greutăţilor, navigaţie etc. Cel dintîi text de mecanică scris, care s-a păstrat pînă în zilele noastre, pare să fie *Mehanika problemata*, consacrat studiului maşinilor simple, iar prima parte a mecanicii care s-a dezvoltat în antichitate a fost statica. Arhytas din Tarent (430—365 î.e.n.) a studiat scripetele, iar Arhimede (287—212 î.e.n.) a studiat centrele de greutate ale unor corpuri în lucrarea *Despre echilibrul planelor*, a enunţat unul dintre principiile fundamentale ale hidrostaticii, după care, un corp cufundat într-un fluid este supus la o forţă ascensională egală cu greutatea volumului de fluid dezlocuit, şi a făcut numeroase invenţii, printre care o maşină pentru irigarea cîmpurilor (şurubul lui Arhimede). Cu lucrările lui Simon Stevin (1548—1620), Gilles Personnier de Roberval (1602—1675) şi Pierre Varignon (1654—1722), statica se poate considera ca definitiv fondată. Primul a studiat echilibrul corpurilor grele pe un plan înclinat, iar ultimul a studiat maşinile simple. Ulterior, Louis Poinsot (1777—1859) aduce o completare importantă prin teoria cuplurilor. Rezolvarea problemelor propriu-zise de mişcare a prezentat dificultăţi mari, legate în primul rînd de insuficienţa mijloacelor de investigaţie şi de respectarea cu orice preţ a unor texte considerate imuabile, fie că ele erau socotite de inspiraţie divină, fie că erau decretate de autorităţi ca indiscutabile. După Aristotel (384—322 î.e.n.), care se ocupă de probleme de mecanică, în special, în tratatele sale de fizică şi despre cer, materia se împarte în materie cerească, imuabilă, incoruptibilă şi indestructibilă şi materie pămîntească, lipsită de aceste calităţi; mişcările sînt clasificate în mişcări naturale şi mişcări violente. Mişcarea perfectă era mişcarea circulară uniformă, ca fiind continuă, fără început şi fără sfîrşit, Pămîntul era considerat ca perfect sferic şi aşezat în centrul Universului etc. Anaxagoras din Clazomene (499—428 î.e.n.) arătase că aerul este greu, însă, după Aristotel, apa faţă de pămînt şi aerul faţă de apă nu pot fi grele. Mecanica lui Aristotel (numită şi mecanica peripatetică), precum şi cosmologia lui, au fost

reluate și dezvoltate de Cl. Ptolemeu (sec. 2) într-o operă, care a fost transmisă de arabi sub numele de *Almagest.* Mulți comentatori s-au ocupat de ideile lui Aristotel, căutînd să le pună de acord cu Biblia, și chiar în secolul 16, Sorbona cerea ca cei ce le combat să fie pedepsiți. Împotriva supremației teologiei în gîndirea medievală, Roger Bacon (1214—1294) susține importanța și necesitatea științei experimentale. William d'Ockam (1300—1350), Nicole d'Oresme (1325—1382), Jean Buridan (1300—1358), Albert de Saxa (1316—1390) nu mai socotesc că unui corp în mișcare trebuie să i se asocieze un motor (suflet), ci încep să admită identitatea de natură a corpurilor cerești cu Pămîntul, iar primul considera chiar că ceea ce este adevărat în teologie, poate să nu fie în filozofie. Nicolae de Cusa (1401—1464) admite în *De Docta Ignorantia* ideea rotației Pămîntului și nu a bolții cerești, încercînd s-o pună în concordanță cu Biblia. Ideea lui Aristarh din Samos (310—230 î.e.n.), anume că Pămîntul se rotește în jurul axei sale și în jurul Soarelui, avea să fie reluată și dezvoltată de Nicolaus Copernic (1473—1543) în lucrarea *De Revolutionibus orbium coelestium.* Bazîndu-se pe tabelele de observații ale lui Tycho Brahe (1546—1601), Johannes Kepler (1571—1630) ajunge la celebrele sale legi, care au zdruncinat serios mecanica peripatetică. Francis Bacon (1561—1626), unul dintre strămoșii materialismului modern, subliniа, în aceeași epocă, atît importanța cercetării experimentale cît și valoarea matematicii pentru științele naturii. Galileo Galilei (1564—1642), printr-un studiu aprofundat, în particular al căderii corpurilor la suprafața Pămîntului, dă o fundamentare solidă dinamicii, iar din observațiile bolții cerești cu ajutorul lunetei pe care a inventat-o și din interpretările descoperirilor făcute de el, aduce argumente hotărîtoare în favoarea teoriei heliocentrice a lui Copernic. În 1633, e adus la Roma și obligat să-și abjure ideile, ca fiind contrare Bibliei; peste 5 ani însă, le reafirmă prin publicarea, la Leyda, a lucrării *Discorsi e demonstrazioni matematiche intorno a due nuove scienze* (tradusă în limba română de Victor Marian și Maria Popescu, publicată în 1961). G. Galilei a enunțat principiul inerției, formulat în 1644 de René Descartes (1596—1650) astfel: „Fiecare lucru rămîne în starea în care se află atîta timp cît nimic nu i se schimbă". Contrar scolasticii, după care mișcarea unui corp e determinată numai prin cunoașterea poziției lui inițiale, G. Galilei a arătat că pentru aceasta trebuie să știm și viteza lui inițială. Robert Hooke (1653—1703) a determinat pe cale experimentală relația dintre forțele aplicate unor corpuri elastice și deformațiile ce rezultă. Plecînd de la legile lui Kepler și folosind instrumentul matematic creat chiar de el, numit calculul fluxional, (calculul diferențial și integral de astăzi), Isaac Newton (1643—1727) deduce legea atracției universale, ce îi poartă numele, și reciproc, arată că din aceasta se pot deduce legile lui Kepler. După I. Newton, mișcarea planetelor în jurul soarelui și căderea corpurilor la suprafața Pămîntului sînt fenomene identice, și, ocupîndu-se de mișcarea Lunii, a dedus un mijloc de a determina valoarea accelerației gravitaționale. În calculele sale intervenea raza Pămîntului, și o bună concordanță cu valoarea găsită de Galilei a putut fi obținută abia după ce s-a reușit măsurarea acelei raze cu o aproximație satisfăcătoare. Opera în care el și-a sintetizat cercetările a apărut în 1687 cu titlul *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica* (traducere în limba română de V. Marian, publicată în

1956). I. Newton a postulat existenţa unui spaţiu absolut şi a unui timp absolut, luînd ca model al spaţiului fizic spaţiul euclidian R_3 şi considerînd că timpul este un parametru universal, fără vreo legătură cu spaţiul, care variază între $-\infty$ şi $+\infty$ şi determină simultaneitatea şi succesiunea evenimentelor. După o serie de definiţii, printre care şi a forţei aplicate (acţiunea prin care starea corpului este schimbată, fie că această stare ar fi repausul sau mişcarea uniformă în linie dreaptă), I. Newton enunţă 3 axiome sau legi fundamentale ale mecanicii. Prima lege exprimă principiul inerţiei, legea a doua dă legătura dintre forţa **F**, masa *m* şi acceleraţia **a** a unui punct material, iar ultima constituie principiul acţiunii şi reacţiunii, enunţat pentru prima dată de I. Newton. La acestea se mai adaugă principiul condiţiilor iniţiale şi principiul compunerii forţelor, denumit şi regula paralelogramului. Încercările de „demonstrare" a ultimului principiu au condus la considerarea primelor ecuaţii funcţionale în matematică. I. Newton a enunţat şi a considerat o serie de probleme fundamentale ale mecanicii ca cele ale teoriei potenţialului, mişcarea în medii rezistente, echilibrul relativ al corpurilor cereşti aflate în rotaţie sub acţiunea atracţiei universale ale particulelor materiale ce le compun, mişcarea cometelor sub influenţa atracţiei Soarelui, mareele. Problemele mecanicii newtoniene au făcut obiectul cercetărilor matematicienilor şi mecanicienilor, dezvoltarea mecanicii făcîndu-se simultan cu aceea a matematicii. Mecanica este prima dintre ştiinţele naturii care a folosit în cel mai înalt grad metodele matematicii, multe dintre capitolele matematicii dezvoltîndu-se în urma necesităţii rezolvării şi generalizării problemelor puse de mecanică; puternica matematizare a mecanicii a creat chiar impresia că mecanica ar fi un capitol al matematicii. Dar, mecanica nu se poate rezuma numai la principiile lui Newton şi la consecinţele ce decurg din ele, ea s-a dezvoltat şi se dezvoltă ca o ştiinţă atît teoretică cît şi experimentală. Cunoaşterea din ce în ce mai profundă a lumii înconjurătoare scoate în evidenţă efecte şi fenomene noi, pentru a căror descriere e necesar a se introduce noi concepte şi a se folosi modele mai complexe, rezultatele teoretice trebuind să fie confruntate cu realitatea. Mecanica nu este nici un capitol al fizicii, deşi pentru studierea unor forme mai complexe de mişcare e necesar a se studia mai întîi cea mai simplă formă de mişcare a materiei. De aceea, mecanica a progresat şi va progresa continuu prin îmbinarea metodelor matematice cu metodele de observaţie şi experienţă. Mecanica stă la baza dezvoltării tehnicii, iar aceasta îi ridică în mod permanent noi probleme, care conduc la apariţia unor noi capitole ale mecanicii. Dintre cei care au contribuit la dezvoltarea mecanicii atît în ce priveşte mecanica sistemelor de puncte materiale cît şi mecanica mediilor continue, vom menţiona mai întîi pe Jacob Bernoulli (1655—1705) şi pe Leonhard Euler (1707—1783). L. Euler a scris primul tratat de mecanică, în care aplică sistematic analiza matematică, cu titlul *Mechanica sive motus scienti analitice exposita* (1736), el fiind cel dintîi care a scris ecuaţiile diferenţiale ale mişcării, cunoscute uneori sub numele de ecuaţiile lui Newton. De asemenea, s-a ocupat de mişcarea unui corp greu cu un punct fix şi a dat ecuaţiile mişcării fluidelor ideale. Daniel Bernoulli (1736—1806) publică în 1736 primul tratat de hidrodinamică cu titlul *Hydrodynamica, seu de viribus et motibus fluidorum commentarii*, în care se găseşte celebra lege care îi poartă numele. Jean le

Rond D'Alembert (1717—1783) dă un principiu general pentru scrierea ecuațiilor de mișcare, cu care, în mod formal, problemele de dinamică sînt reduse la probleme de statică. Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698—1759) a enunțat principiul minimei acțiuni, pe care l-a aplicat la o serie de probleme. De principiile variaționale ale mecanicii s-au ocupat ulterior mulți cercetători, printre care William Rowan Hamilton (1805—1865), Karl Friedrich Gauss (1777—1855) și Mihail Vasilievici Ostrogradski (1801—1861). Joseph-Louis Lagrange (1736—1813) a publicat, în 1788, opera sa fundamentală, *Méchanique analytique*, care încununa eforturile savanților secolului 18 și deschidea largi perspective. Aici, J.L. Lagrange a dedus ecuațiile care îi poartă numele și care au avantajul că elimină forțele de legătură, permițînd scrierea unui sistem de ecuații diferențiale de ordinul al doilea pentru parametrii geometrici independenți care determină poziția sistemului. Pierre Simon Laplace (1749—1827) s-a ocupat în special de problemele mecanicii cerești și a publicat *Traité de mécanique celeste*, unde se găsesc și o serie de ipoteze relative la geneza sistemului solar. Și în mecanica mediilor continue deformabile încep să fie abordate probleme importante, cu rezultate care interesau știința și tehnica, și în această direcție pot fi citați Louis Marie Henri Navier (1785—1836), Augustin-Louis Cauchy (1789—1857), Gabriel Lamé (1795—1870) și Barré de Saint-Venant (1797—1886). Sir George Gabriel Stokes (1819—1903) a studiat problema mișcării lente a unei sfere într-un fluid vîscos. Sofia Kovalevskaia (1850—1891) a rezolvat încă un caz relativ la problema mișcării unui corp solid rigid cu un punct fix. Nikolai Egorovici Jukovski (1847—1921) a dat o teorie a aripii de anvergură infinită, iar Ludwig Prandtl (1875—1953), printre alte contribuții remarcabile, a dezvoltat o teorie a aripei de anvergură finită. Osborne Reynolds (1842—1912) a rămas cunoscut pentru studiile sale privind mișcarea turbulentă. Aleksander Mihailovici Liapunov (1857—1918) a dezvoltat o teorie a stabilității mișcării care a fost continuată și extinsă de mulți cercetători. Serghei Alekseevici Ciaplîghin (1869—1942) a studiat mișcări cu linii libere și mișcarea fluidelor compresibile. Henri Villat (1879—1972) a reactualizat teza lui S.A. Ciaplîghin din 1902, determinînd un curent intens de cercetări relative la dinamica gazelor. Theodor von Kármán (1881—1963) și-a legat numele de mai multe probleme de mecanica fluidelor și de mecanica solidelor deformabile. În secolul nostru, a apărut o nouă mecanică, mecanica relativistă, creată, în primul rînd, de Albert Einstein (1889—1955), care explică fenomenele ce apar la viteze foarte mari sau datorită unor mase gravifice importante. Printre capitolele noi ale mecanicii sînt de menționat balistica cerească, reologie, mecanica nelini ră, teoria fluidelor nenewtoniene, teoria plasticității, magnetohidrodinamica, termoelasticitatea, dinamica gazelor rarefiate, teoria filtrației.

În țara noastră s-a dezvoltat o puternică școală de mecanică, cu rezultate remarcabile. Spiru Haret (1851—1912) a predat mecanica la Facultatea de Științe din București între 1878—1912, urmat de Dimitrie D. Pompeiu (1873—1954), între 1912 și 1930, de Victor Vâlcovici (1885—1970) între 1930 și 1962 și apoi de acad. Caius Iacob (n. 1912), care a dezvoltat teoria problemelor la limită cu aplicații la hidrodinamică și a publicat, în 1971, un tratat de *Mecanică teoretică*. V. Vâlcovici are rezultate importante în mecanica analitică, mecanica fluidelor, teoria flambajului și cosmogonie, iar împreună cu acad.

Șt. Bălan (n. 1913) și acad. Radu Voinea (n. 1923), a condus un colectiv care a redactat un amplu tratat de mecanică teoretică. Acad. Octav Onicescu (n. 1892) a dezvoltat recent o nouă mecanică (denumită „mecanica invariantivă") și a publicat, în 1969, *Mecanica*, unde se expun și ideile fundamentale ale noii mecanici. Acad. Mendel Haimovici (1906—1973) s-a ocupat de teoria elasticității. Acad. Elie Carafoli (n. 1901) are rezultate în aerodinamică, iar cărțile sale au fost traduse peste hotare. În mecanica construcțiilor o activitate deosebită a avut acad. Aurel Beleș (n. 1891), C.C. Teodorescu (1892—1972) și-a legat numele de rezistența materialelor, iar acad. Dumitru T. Dumitrescu (n. 1906) și acad. Cristea Mateescu (n. 1894), sînt cunoscuți pentru studiile lor de hidraulică. O activitate multilaterală a depus și Ion Alexandru Stoenescu (1905—1968), iar tratate sau monografii de mecanică au scris Simion Sanielevici (1870—1963), Ștefan Burileanu (1874—1951), Ioan Plăcințeanu (1893—1960), Nicolae Ciorănescu (1903—1957), Mircea Drăganu (n. 1911), M. Sarian (n. 1902), Rudolf Woinaroski (n. 1910), Gheorghe Silaș (n. 1914), Gheorghe Buzdugan (n. 1916), Dumitru Mangeron (n. 1906) ș.a. În 1959, Societatea de Științe Matematice a organizat prima manifestare științifică dedicată mecanicii în țara noastră, „Colocviul de mecanică", urmată de alte manifestări similare. *(Șt.G.)*

mecanica statistică, capitol al mecanicii care studiază proprietățile medii globale ale grupurilor (colectivelor) de corpuri microscopice și evoluția lor în timp. Mecanica statistică presupune că corpurile se supun legilor mecanicii clasice, și a fost fondată în secolul 19 de R. Clausius, J.C. Maxwell și L. Boltzmann. Mecanica statistică cuantică presupune, dimpotrivă, că corpurile se supun legilor mecanicii cuantice. Fundamentarea ei se datorește mai multor cercetători ca: M. Planck, E. Fermi, P. Dirac. Mecanica statistică cuantică poate fi relativistă sau nerelativistă după cum se ține sau nu seama de efectele relativiste datorate vitezelor mari. *(St.G.)*

mediană [lat. *medianus* „de mijloc"] **1.** (Pentru un triunghi). Fiecare dintre cele trei drepte ce unesc un vîrf al triunghiului cu mijlocul laturii opuse. Lungimea medianei corespunzătoare vîrfului A este:

$$m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2(b^2 + c^2) - a^2},$$

unde a, b, c sînt lungimile laturilor triunghiului. Medianele sînt concurente în G, centrul de greutate al triunghiului, care le împarte într-un raport constant (fig. 94):

$$\frac{AG}{GA'} = \frac{BG}{GB'} = \frac{CG}{GC'} = 2.$$

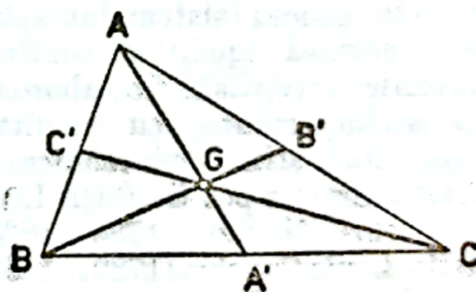


Fig. 94

Concurența medianelor unui triunghi era cunoscută de Arhimede (sec. 3 î.e.n.), formula lungimii medianei a fost dată de Pappus (sec. 3). **2.** (Pentru un tetraedru). Fiecare dintre cele patru drepte care unesc un vîrf al tetraedrului cu centrul de greutate al feței opuse (fig. 95). Medianele sînt

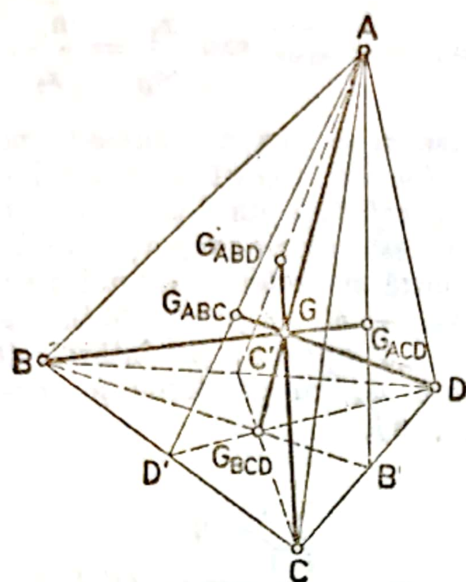


Fig. 95

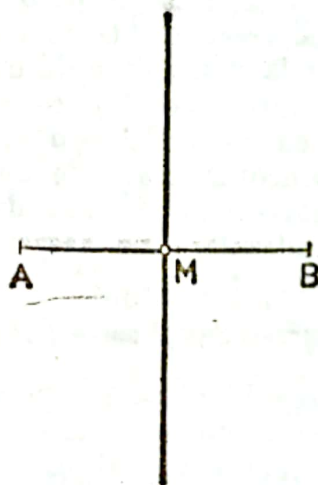


Fig. 96

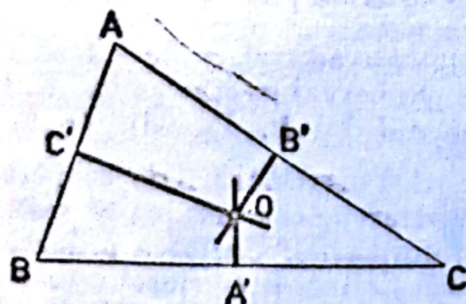


Fig. 97

concurente în G, centrul de greutate al tetraedrului, şi au loc relaţiile:

$$\frac{AG}{GA'} = \frac{BG}{GB'} = \frac{CG}{GC'} = \frac{DG}{GD'} = 3.$$

Dreptele care unesc mijloacele muchiilor opuse ale unui tetraedru trec prin centrul de greutate. Concurenţa medianelor tetraedrului a fost pusă în evidenţă de Leonardo da Vinci (sec. 15). *(V.B.)*

mediană (a unei variabile aleatoare), numărul real m_e care satisface relaţiile:

$$P(X \leqslant m_e) \geqslant 1/2;$$
$$P(X \geqslant m_e) \geqslant 1/2.$$

Mediana nu este în mod necesar unică, putînd exista o infinitate de valori reale care satisfac relaţiile de mai sus; în acest caz, mulţimea acestora determină intervalul median al variabilei aleatoare X. — *Mediană de selecţie*, valoarea care împarte şirul ordonat al valorilor de selecţie în două mulţimi numeric egale. Dacă nu coincide cu una dintre valorile selecţiei, mediana se calculează aproximativ, prin interpolare. *(A.Ş.)*

mediatoare [lat. *mediator-trix* „care este la mijloc"] (a unui segment), perpendiculara dusă prin mijlocul segmentului. Mediatoarea este locul geometric al punctelor (dintr-un plan ce conţine segmentul) egal depărtate de extremităţile segmentului (fig. 96). — *Mediatoarele unui triunghi*, mediatoarele laturilor triunghiului. Mediatoarele unui triunghi sînt concurente într-un punct care este centrul cercului circumscris triunghiului (fig. 97). Termenul a fost propus de J. Neuberg (sec. 19). *(V.B.)*

medie [lat. *medius* „la mijloc"], număr asociat, prin anumite procedee de calcul, unui grup de numere astfel încît: a) media este cuprinsă

între cel mai mic şi cel mai mare dintre numerele considerate; b) media este egală cu numerele considerate, dacă acestea sînt egale între ele. — *Media aritmetică* (a n numere x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$), suma numerelor împărţită la numărul lor:

$$m_{arit} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}.$$

Ex: linia mijlocie a unui trapez este media aritmetică a bazelor trapezului. Conceptul de medie aritmetică a fost introdus de Arhitas (sec. 4 î.e.n.). — *Media armonică* (a n numere x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$), inversa mediei aritmetice a inverselor numerelor x_i

$$m_{arm} = \frac{n}{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \ldots + \frac{1}{x_n}}$$

Pentru două numere x_1, x_2:

$$m_{arm} = \frac{1}{\frac{\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}}{2}} = \frac{2x_1x_2}{x_1 + x_2}.$$

Ex.: numărul vîrfurilor (8) unui cub este medie armonică a numărului muchiilor (12) şi a numărului feţelor (6), fapt cunoscut de Arhitas şi Platon (sec. 4 î.e.n.). Denumirea a fost dată de C. Maclaurin, fiindu-i sugerată de legătura, stabilită încă de antici, între media armonică şi legile consonanţei muzicale. — *Media geometrică* (a n numere pozitive x_i, $i = 1, 2, \ldots, n$), rădăcina de ordinul n din produsul celor n numere x_i:

$$m_g = \sqrt[n]{x_1x_2 \ldots x_n}$$

Pentru două numere x_1 şi x_2, media geometrică a lor este:

$$m_g = \sqrt{x_1x_2} \text{ sau } \frac{x_1}{m_g} = \frac{m_g}{x_2}.$$

În cazul $n = 2$ se mai numeşte *medie proporţională*. (Arhitas, sec. 4 î.e.n.) Ex.: o catetă a unui triunghi dreptunghic este medie proporţională între ipotenuză şi proiecţia catetei pe ipotenuză. — *Medie ponderată* [lat. *ponderare* „a aprecia, a cîntări"] (a n numere x_i, cu ponderile p_i, $i = 1, 2, \ldots, n$),

$$m_p = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i p_i}{\sum_{i=1}^{n} p_i}. \quad (V.B.)$$

melcul lui Pascal, curbă, loc geometric al punctelor M de pe o dreaptă mobilă, ce trece printr-un punct fix O, situate la distanţa b de un punct N (al dreptei mobile), care descrie un cerc cu raza $OQ = a$ (fig. 98). Este o concoidă. Faţă de un sistem de axe carteziene format de OQ şi de perpendiculara pe aceasta în O, ecuaţia curbei este:

$$(x^2 + y^2 - 2ax)^2 = b^2(x^2 + y^2).$$

Dacă se consideră ca axă polară raza OQ a cercului de bază, ecuaţia polară a melcului lui Pascal este:

$$r = 2a \cos \theta \pm b.$$

Aria domeniului delimitat de această curbă se determină prin formula:

$$A = (2a^2 + b^2)\,\pi.$$

Denumirea acestei curbe a fost dată de G. Roberval în cinstea lui E. Pascal (tatăl lui B. Pascal). *(V.B.)*

memorie, dispozitiv fizic ce permite înregistrarea, conservarea şi restituirea informaţiei. Unitatea primară de informaţie într-o memorie este bitul, elementele mai complexe fiind memorate ca şiruri de biţi. O proprietate

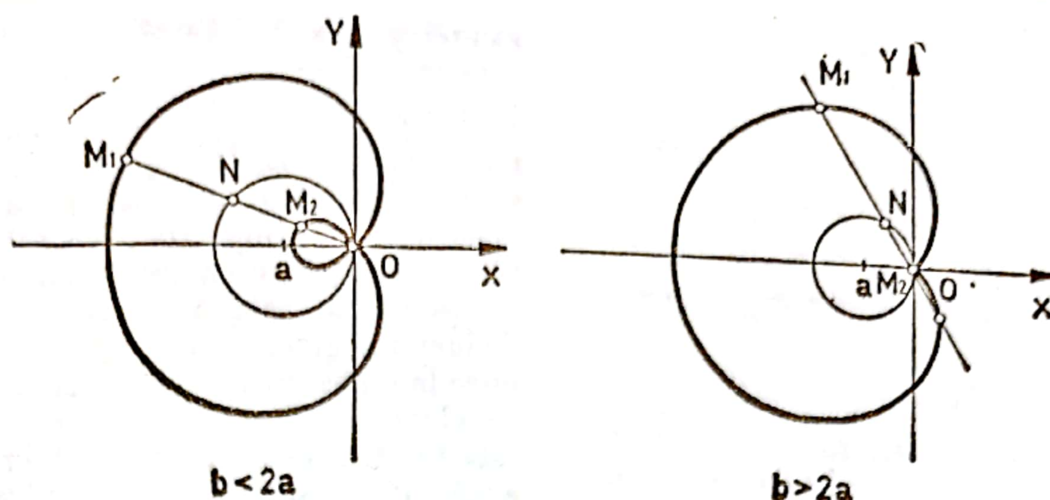


Fig. 98

remarcabilă a dispozitivelor de memorie este aceea că informaţia nu este distrusă în urma operaţiei de restituire, ci continuă să fie conservată. Memoria este o parte constructivă esenţială a unui calculator cu program şi e caracterizată de capacitatea ei şi de timpul de acces la informaţie. — *Memorie auxiliară*, dispozitiv de memorie ce suplimentează memoria principală a unui calculator. Este de obicei conectată permanent la calculator, dar informaţiile nu sînt direct accesibile, ci prin intermediul memoriei principale. Astfel de dispozitive sînt discurile magnetice, tamburul magnetic, banda magnetică, cartela magnetică. — *Memorie externă*, ansamblu de dispozitive pentru păstrarea informaţiei înainte sau după prelucrarea de către calculator. Ex.: benzi magnetice, discuri magnetice, cartele perforate, etc. — *Memorie principală*, parte fizică integrantă a unui calculator, alcătuită din celule de memorie identificate printr-o adresă şi în care sînt memorate programele pentru a fi executate. Accesul la informaţia memorată este aleatoriu. Poate fi realizată cu inele de ferită, tambur magnetic, filme magnetice, etc. — *Memorie tampon*, memorie de mică capacitate, utilizată pentru a stoca temporar informaţia ce se schimbă între două dispozitive ce lucrează cu viteze diferite. *(T.B.)*

meridian [lat. *meridies* „amiază"], curbă de intersecţie a unei suprafeţe de rotaţie cu un plan ce trece prin axa de rotaţie. *(V.B.)*

metoda aproximaţiilor succesive → **aproximare**

metoda celor mai mici pătrate, metodă de determinare a unei funcţii $f(x)$, astfel încît:

$$\sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2$$

să fie minimă, unde y_i, $i = 1, 2, \ldots, n$, sînt nişte valori date. Metoda este folosită pentru ajustarea unor date experimentale, alegîndu-se funcţia f de o anumită formă. Metoda a fost propusă de K. Gauss (1795) şi denumită astfel de A. Legendre (1805), care a folosit-o pentru determinarea orbitelor cometelor. *(V.B.)*

metoda coardei, metodă pentru determinarea aproximativă a rădăcinii reale a unei ecuaţii algebrice $f(x) = 0$, unde f este o funcţie derivabilă pe un interval $[a, b]$, ecuaţia avînd o singură rădăcină în intervalul (a, b). Dacă M este punctul de coordonate $(a, f(a))$ şi N punctul de coor-

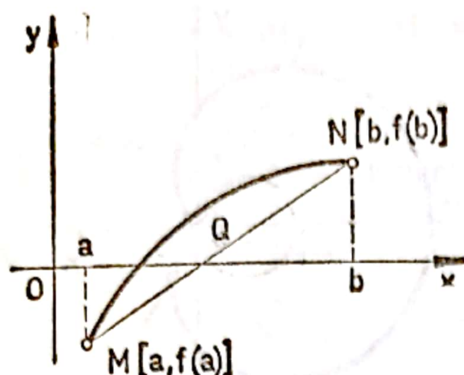


Fig. 99

donate $(b, f(b))$, se ia ca valoare aproximativă a rădăcinii abscisa punctului Q în care coarda MN taie axa Ox (fig. 99): $x_0 \approx a + \frac{b-a}{f(b)-f(a)} f(a)$. *(V.B.)*

metoda coeficienţilor nedeterminaţi, metodă de determinare a coeficienţilor unei expresii, atunci cînd se cunoaşte o altă formă a acesteia. Determinarea coeficienţilor necunoscuţi se poate face din sistemul de ecuaţii obţinut prin egalarea valorii expresiei date şi a celei cunoscute, pentru valori particulare ale variabilelor. În cazul polinoamelor, coeficienţii termenilor de acelaşi grad din polinomul dat şi expresia transformată, trebuie să fie egali (aceasta rezultînd din condiţia ca cele două polinoame să fie identice), ceea ce conduce la un sistem de ecuaţii, de unde se obţin coeficienţii noii expresii. Metoda coeficienţilor nedeterminaţi a fost aplicată pentru prima dată de R. Descartes (1628) şi perfecţionată de E. Bézout (1779). *(V.B.)*

metoda lui Roberval, metodă de trasare a tangentelor la curbe plane. Se consideră curbele ca fiind generate de mişcarea unui punct material, căruia i se determină direcţia vitezei. Dacă se cunosc proiecţiile vitezei punctului pe două drepte, sau mărimi proporţionale cu aceste proiecţii, atunci poate fi determinată direcţia vitezei, deci direcţia tangentei. *(Şt. G.)*

metoda reducerii la absurd [lat. *argumentum ab absurdum* „dovedire prin absurd"], raţionament în care se presupune că ceea ce trebuie demonstrat nu este adevărat şi, prin deducţii logice, această presupunere duce la o absurditate. De aici se trage concluzia că presupunerea făcută este falsă, rămînînd adevărat enunţul a cărui demonstraţie se urmărea de fapt. Concepută de Zenon (sec. 5 î.e.n.), avînd la bază principiul terţiului exclus, această metodă a căpătat o largă circulaţie. *(V.B.)*

metoda tangentei, metodă pentru determinarea aproximativă a rădăcinii reale a ecuaţiei algebrice $f(x) = 0$, unde f este o funcţie derivabilă pe un interval $[a, b]$, ecuaţia avînd o singură rădăcină în intervalul (a, b). Dacă M este punctul de coordonate $(a, f(a))$ şi N punctul de coordonate $(b, f(b))$, se ia ca valoare aproximativă a rădăcinii abscisa punctului T, în care tangenta la graficul funcţiei în punctul M taie axa Ox sau abscisa punctului T', în care tangenta la graficul funcţiei în punctul N taie axa Ox (fig. 100): $x_0 \approx a + \frac{f(a)}{f'(a)}$. Metoda a fost indicată de I. Newton. *(V.B.)*

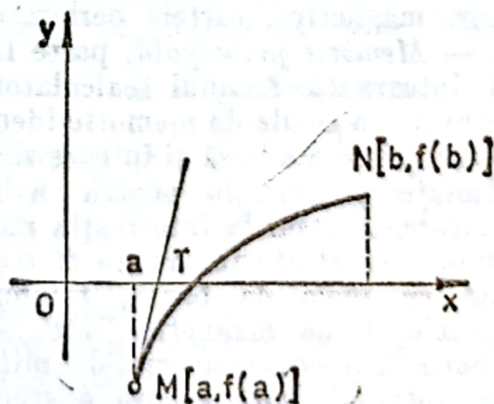


Fig. 100

metoda variației constantelor, metodă de determinare a soluției generale a unei ecuații diferențiale liniare utilizînd soluția generală a ecuației omogene atașate și considerînd constantele, care intervin în aceasta, drept funcții. Metoda a fost propusă de L. Euler (1739) și s-a încetățenit datorită lui J. Lagrange (1775). *(V.B.)*

metodă axiomatică, metodă de a construi o teorie (adică de a-i deduce teoremele) folosind un sistem axiomatic. În adoptarea unui anumit sistem axiomatic pentru o disciplină (adică într-o axiomatizare a acestei teorii) se procedează astfel: în formularea propozițiilor teoriei intervin anumite *elemente* și *relații*, numite fundamentale, care sînt termenii primitivi ai sistemului; aceste elemente și relații sînt alese astfel încît orice propoziție a teoriei să poată fi exprimată cu ajutorul lor și al termenilor definiți pe baza termenilor primitivi. Din mulțimea propozițiilor teoriei se extrage o submulțime A, de propoziții, care vor constitui *axiomele*, acestea fiind considerate ca date inițial. Dintre regulile de raționament se alege o submulțime de reguli, numite *reguli de deducție* (Ex.: regula *modus ponens*: dacă propoziția A este adevărată și din A se deduce propoziția B, atunci B este adevărată). Axiomele trebuie astfel alese, încît orice teoremă a teoriei să poată fi demonstrată pe baza lor cu ajutorul regulilor de deducție. De asemenea, trebuie ca sistemul de axiome să fie necontradictoriu, adică să nu fie teoreme atît o propoziție cît și negația ei (aceasta este echivalent cu faptul că există enunțuri care nu sînt teoreme). Cea mai veche lucrare scrisă pe baza metodei axiomatice o constituie *Elementele* lui Euclid (sec. 3 î.e.n.). Cu toată concizia, claritatea și rigurozitatea expunerii, ea prezintă anumite inconsecvențe (în anumite demonstrații se folosesc ca axiome propoziții care n-au fost menționate ca atare, nu se definește noțiunea de mișcare, ș.a.). Astăzi, sistemul axiomatic admis pentru geometrie este cel al lui D. Hilbert (*Gründlagen der Geometrie*, 1899). Axiomatizarea aritmeticii a fost făcută de G. Peano (1899), a teoriei probabilităților de A.N. Kolmogorov (1933), iar în prezent metoda axiomatică este folosită în toate domeniile matematicii și în alte domenii. *(V.B., A.B.)*

metrică [gr. *metron* „măsură"], distanță într-un spațiu metric. *(V.B.)*

mezi [gr. *medius* „care este la mijloc"], numărătorul primului raport și numitorul celui de al doilea raport dintr-o proporție. În proporția: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, b și c sînt mezi. Denumirea, propusă de Platon (sec. 4 î.e.n.), se justifică prin aceea că, în ordinea scrierii termenilor proporției, mezii apar la mijloc. *(V.B.)*

mie [lat. *mille*], număr natural egal cu 10^3. Se mai notează cu cifra romană M.

Mihoc, Gheorghe (n. 1906), matematician român. Studii la Universitatea din București (doctor, 1934) și la Universitatea din Roma (doctor, 1930). Profesor la Academia Comercială din București (din 1946) și la Universitatea din București (din 1948). Membru al Academiei R.S. România (din 1963; membru corespondent din 1955). Director al Centrului de Statistică al Academiei (din 1964). Contribuții în domeniul teoriei probabilităților (legi limită ale lanțurilor Markov, independență asimptotică, procese stochastice) și al analizei matematice. A introdus noțiunea de lanț cu legături complete (împreună cu O. Onicescu). Op. pr.: *Tratat de matematici actuariale*, 1943; *Calculul*

probabilităţilor şi aplicaţii, 1956 (în colab.); *Lecţii de statistică matematică*, 1957 (în colab.). *(V.B.)*

miime, unitate de măsură pentru unghiuri, egală cu unghiul sub care se vede un segment de dreaptă, egal cu unitatea de lungime, dintr-un punct situat pe mediatoarea segmentului, la distanţa de 1000 de unităţi de lungime. Mărimea este aproximativ egală cu a mia parte dintr-un radian. Se foloseşte, în special, în artilerie. *(V.B.)*

miliard, număr natural egal cu 10^9. Termenul, format în limba franceză, a intrat în uz tîrziu (1871), deşi ca noţiune apare la N. Chuquet (1484). Se mai numeşte *bilion*. *(V.B.)*

milion, număr natural egal cu 10^6. Denumirea a fost propusă de Marco Polo (1290). *(V.B.)*

minim [lat. *minimus* „cel mai mic"] (al unei funcţii f), numărul $f(m)$, unde m este un punct de minim al funcţiei f. *(V.B.)*

minor (al unui element, într-un determinant) → **determinant de ordinul n**

minorant [lat. *minor* „mai mic"] (al unei mulţimi $M \subset \mathbf{R}$), număr a cu proprietatea $a \leqslant x$ pentru orice $x \in M$. *(V.B.)*

minut [lat. *minutus* „mic, mărunt"] → **grad.**

mişcare mecanică, schimbare în timp a poziţiei unui corp sau a unei părţi a acestuia faţă de un alt corp nedeformabil, ales ca sistem de referinţă. Este cea mai simplă formă de mişcare a materiei, ea intervenind, într-o anumită măsură, şi în celelalte forme de mişcare. Dacă mişcarea se raportează la un sistem de referinţă fix, ea se numeşte *absolută*, iar dacă sistemul de referinţă este mobil, mişcarea se numeşte *relativă*. Dacă traiectoria este un segment de dreaptă, avem *mişcare rectilinie* şi atunci viteza şi acceleraţia au ca suport dreapta pe care se mişcă punctul material considerat. Cînd viteza este constantă, avem *mişcare rectilinie uniformă*, iar dacă acceleraţia este constantă, avem o *mişcare rectilinie uniform variată*. Cînd traiectoria punctului material este un cerc, mişcarea se numeşte *mişcare circulară*, şi în mod similar se pot defini şi alte tipuri de mişcare (eliptică, parabolică etc.). În mişcarea circulară, valoarea scalară a vitezei se obţine înmulţind raza cu modulul vitezei unghiulare a punctului material, modulul proiecţiei acceleraţiei pe tangentă este egal cu produsul dintre rază şi modulul acceleraţiei unghiulare a punctului material, iar modulul proiecţiei pe rază este egal cu produsul dintre rază şi pătratul modulului vitezei unghiulare; cea de a doua se numeşte, uneori, *acceleraţia radială* sau *centripetă*. Un caz important de mişcare a unui solid este *mişcarea elicoidală*, cînd două puncte ale solidului rămîn necontenit pe o dreaptă fixă, numită axa mişcării elicoidale. Se arată că în mişcarea cea mai generală a unui solid rigid distribuţia vitezelor este identică cu aceea a unei mişcări elicoidale ce are în fiecare moment o altă axă, fapt care face ca aceasta să fie denumită *axa instantanee a mişcării elicoidale*. *(Şt.G.)*

model matematic, sistem unitar de variabile şi relaţii, formulate în limbaj matematic, destinat analizei, sistematizării şi explicării relaţiilor cauzale ale unui fenomen şi servind la descoperirea unor moduri noi de organizare şi comportament, care nu ar fi putut fi sesizate prin alte mijloace. El este cadrul simbolic, simplificat şi riguros de descriere a interacţiunii laturilor esenţiale ale unui proces, iar valabilitatea sa e condiţionată de înţelegerea justă a

raportului teorie — model şi model — realitate. Activitatea de modelare matematică s-a extins de la fenomenele fizice şi asupra fenomenelor economice, sociale, biologice, lingvistice şi au fost create modele matematice ale limbajului muzical, poetic etc. Apariţia şi dezvoltarea calculatoarelor electronice permite utilizarea unor modele foarte complexe, care necesită un număr mare de variabile şi calcule. — *Model determinist*, model matematic în care variabilele sînt legate între ele numai prin relaţii funcţionale. Se mai numeşte *model formal*. — *Model probabilistic*, model matematic în care intervin variabile aleatoare. Se mai numeşte *model stochastic*. *(T.B.)*

modul [lat. *modulus* „măsură"] **1.** (Pentru un număr real x; $|x|$):

$$|x| = \begin{cases} x \text{ dacă } x > 0 \\ 0 \text{ dacă } x = 0 \\ -x \text{ dacă } x < 0 \end{cases}$$

Proprietăţile modulului: $|x| \geqslant 0$, $|-x| = |x|$, $|x+y| \leqslant |x| + |y|$, $|x-y| \leqslant |x| + |y|$, $||x| - |y|| \leqslant |x-y|$, $||x| - |y|| \leqslant |x+y|$, $|xy| = |x|\,|y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$, $|x| \leqslant M$ este echivalent cu $-M \leqslant x \leqslant M$. Noţiunea a fost introdusă de F. Viète, iar notaţia de K. Weierstrass (1894). Se mai numeşte *valoare absolută*. **2.** (Pentru un număr complex $z = a + ib$; $|z|$):

$$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}.$$

Are aceleaşi proprietăţi (cu excepţia ultimei) ca şi modulul (1). Noţiunea şi denumirea au fost introduse de A. Cauchy (1821). **3.** (Pentru un vector) → *vector*. *(V.B.)*

modul (peste un inel A), grup abelian aditiv M, pentru care s-a dat o lege de compoziţie externă $f : A \times M \to M$, notată $f(a, x) = a \cdot x$ $(a \in A, x \in M)$ cu proprietăţile:
a) $(a + b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$, pentru orice $a, b \in A$ şi $x \in M$;
b) $a \cdot (x + y) = a \cdot x + a \cdot y$, pentru orice $a \in A$ şi $x, y \in M$;
c) $(ab) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$, pentru orice $a, b \in A$ şi $x \in M$.
Dacă inelul A este cu element unitate şi:
d) $1 \cdot x = x$, pentru orice $x \in M$, unde 1 este elementul unitate pentru înmulţire în inelul A, mulţimea M se numeşte *modul unitar*. Noţiunea a fost introdusă de R. Dedekind şi L. Kronecker. *(V.B., A.B.)*

Moisil, Grigore C. (1906—1973), matematician român. Studii la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti (doctor, 1929), la Roma şi Paris. Profesor la Universitatea din Iaşi (agregat din 1936, titular din 1939) şi la Universitatea din Bucureşti (din 1941). Membru al Academiei R.S. România (din 1948). Membru corespondent al Academiei de Ştiinţe din Bologna, al Academiei Polone, al Institutului Internaţional de Filozofie din Paris. Lucrări în diverse domenii ale matematicii: algebră, analiză funcţională, geometrie diferenţială, teoria grupurilor continue, mecanica analitică a sistemelor continue, mecanica ondulatorie a cîmpurilor de undă. Contribuţii importante privind logica matematică şi aplicaţiile ei la teoria algebrică a mecanismelor automate. Op. pr.: *Introducere în algebră. Inele şi ideale*, 1954; *Teoria algebrică a mecanismelor automate*, 1959 (ed. în lb. rusă, 1962; în lb. cehă, 1964; în lb. engleză, 1969); *Încercări vechi şi noi în logica neclasică*, 1965. *(V.B.)*

Moivre [muavrə], **Abraham de** (1667—1754), matematician francez. Membru în Royal Society din Londra şi al Academiilor de Ştiinţe din Paris şi Berlin. Cercetări în domeniul cal-

culului probabilităților și al calculului diferențial. A stabilit formula de ridicare la putere a unui număr complex de modul unitate (formula lui Moivre). Op. pr. *Doctrine of chances or a method of calculating probabilities*, 1718; *Miscellanea analytica de seriebus et quadraturis*, 1730. *(V.B.)*

moment absolut de ordinul k (al unei variabile aleatoare), momentul de ordinul k al variabilei aleatoare $|X|$, avînd expresia:

$$M(|X|^k) = \sum_i |x_i|^k p_i,$$

în cazul unei variabile aleatoare de tip discret, și:

$$M(|X|^k) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \, \mathrm{d}F(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} |x|^k \varrho(x) \, \mathrm{d}x,$$

pentru o variabilă aleatoare de tip continuu. — *Momentul absolut de ordinul k* (de selecție), expresia: $\sum_{i=1}^{n} \frac{|x_i|^k}{n}$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este o selecție dintr-o populație statistică. *(A.Ș.)*

moment centrat de ordinul k (al unei variabile aleatoare), momentul de ordinul k al variabilei aleatoare $X - m$, $(m = M(X))$, adică:

$$M((X - m)^k) = \sum_i (x_i - m)^k p_i,$$

în cazul unei variabile aleatoare de tip discret și:

$$M((X - m)^k) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^k \, \mathrm{d}F(x) =$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} (x - m)^k \varrho(x) \, \mathrm{d}x,$$

pentru o variabilă aleatoare de tip continuu, avînd funcția de repartiție $F(x)$ și densitatea de repartiție $\varrho(x)$ (dacă aceasta există). — *Momentul centrat de ordinul k* (de selecție), expresia: $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i - \bar{x}}{n}$, unde $\bar{x}$ este media de selecție, iar $x_1, x_2, \ldots, x_n$ o selecție dintr-o populație statistică. *(A.Ș.)*

moment cinetic (în raport cu un punct O; **K**), suma momentelor față de O ale impulsurilor punctelor materiale ale sistemului, deci $\mathbf{K} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{r}_j \times m_j \mathbf{v}_j$. Dacă se consideră un sistem de axe de coordonate cartezian, triortogonal și se notează cu $\Omega_{(xy)j}$, $\Omega_{(yz)j}$ și $\Omega_{(zx)j}$ vitezele areolare corespunzătoare mișcărilor proiecțiilor unui punct P al sistemului pe planele Oxy, Oyz și, respectiv, Ozx, proiecțiile lui **K** pe axele reperului se scriu $K_x = 2\sum_{1}^{n} m_j \Omega_{(yz)j}$, $K_y = 2\sum_{1}^{n} m_j \Omega_{(zx)j}$ și $K_z = 2\sum_{1}^{n} m_j \Omega_{(xy)j}$. Ecuația sa dimensională este $[K] = L^2MT^{-1}$. Se mai numește *momentul cantității de mișcare*. *(Șt. G.)*

moment de inerție (al unui sistem de puncte materiale față de o axă Δ; I, I_Δ), suma produselor, extinsă la întregul sistem, dintre masa fiecărui punct material și pătratul distanței lui pînă la axa Δ. Dacă r_j este distanța punctului P_j pînă la axă, expresia momentului de inerție

este $I = \sum_{1}^{n} m_j r_j^2$. Definiţii analoage au momentele de inerţie polar şi planar, calculate faţă de diferite puncte şi, respectiv, plane. Reprezentînd modul în care variază momentul de inerţie cînd direcţia axei Δ se schimbă, trecînd însă mereu printr-un punct fix O, care se alege originea unui sistem de referinţă cartezian, triortogonal, se ajunge la noţiunea de *elipsoid de inerţie*. Pentru aceasta se ia pe Δ un segment OT a cărui lungime l are măsura proporţională cu inversul rădăcinii pătrate din valoarea numerică a lui I_Δ, $l = \varepsilon/\sqrt{I_\Delta}$, şi se găseşte că locul geometric al punctului T este cuadrica $I_{xx}x^2+I_{yy}y^2+I_{zz}z^2-2I_{yz}yz-2I_{zx}zx-2I_{xy}xy=\varepsilon^2$, unde $I_{xx} = \sum_{1}^{n} m_j(y_j^2+z_j^2)$, $I_{yz} = \sum_{1}^{n} m_j y_j z_j$, expresiile celorlalţi factori obţinîndu-se în mod analog. I_{xx}, I_{yy} şi I_{zz} sînt tocmai momentele de inerţie ale sistemului considerat faţă de axele Ox, Oy şi, respectiv, Oz, iar I_{yz}, I_{zx} şi I_{xy} reprezintă *momentele centrifugale (produse de inerţie)* faţă de planele de coordonate. *(Şt. G.)*

moment de ordinul k (al unei variabile aleatoare X), valoarea medie a variabilei aleatoare X^k : $M_k(X) = M(X^k)$. În cazul unei variabile aleatoare discrete are expresia:

$$M_k = \sum_{i=1}^{n} x_i^k f(x_i),$$

(unde x_i sînt valorile variabilei aleatoare X, iar $f(x_i) = p_i$ probabilităţile corespunzătoare), iar în cazul unei variabile aleatoare continue:

$$M_k = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k \,\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^k f(x)\,\mathrm{d}x,$$

(unde $F(x)$ este funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X, iar $f(x)$ densitatea de probabilitate corespunzătoare, dacă există). Denumirea a fost dată prin analogie cu noţiunea cu acelaşi nume din mecanică. — *Moment de ordinul k (de selecţie)*, expresia: $\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^k}{n}$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ este o selecţie dintr-o populaţie statistică. *(V.B., A. Ş.)*

momentul cantităţii de mişcare → **moment cinetic**

momentul unei forţe F faţă de o axă Δ (M_Δ), proiecţia pe Δ a momentului lui **F** faţă de un punct oarecare al ei. *(Şt.G.)*

momentul unei forţe F faţă de un punct O (M_0), produsul vectorial dintre vectorul care uneşte punctul O (numit pol) cu punctul de aplicaţie al lui **F**, şi forţa **F**. *(Şt. G.)*

Monge [mõʒ], **Gaspard** (1746—1818), matematician francez. A înfiinţat Şcoala Politehnică şi Şcoala Normală Superioară din Paris, unde a fost şi profesor. Membru al Academiei de Ştiinţe din Paris. Creator al geometriei descriptive. Contribuţii în geometria analitică şi diferenţială (ecuaţia planului normal, a planului tangent, suprafeţe desfăşurabile, liniile de curbură ale unei suprafeţe), precum şi în teoria ecuaţiilor diferenţiale sau cu derivate parţiale (teoria curbelor caracteristice). Op. pr.: *Géométrie descriptive*, 1799; *Application de l'analyse à la géométrie des surfaces*, 1807. *(V.B.)*

monitor → **supervizor**

monom [gr. *monos* „singur, unic", *nomos* „diviziune, membru"], expresie algebrică reprezentînd produsul

dintre un număr real sau complex, ori un element dintr-un inel (coeficientul monomului), și un număr finit de variabile reale sau complexe, sau nedeterminate ridicate la puteri naturale (partea literală). Ex.: $-2x^3y$, ab^2. *(V.B.)*

monomorfism [gr. *monos* „unic, singur", *morphe* „formă"] → **omomorfism**

Montel, Paul (n. 1876), matematician francez. Profesor la Sorbona. Membru al Academiei de Științe din Paris. Membru de onoare al Academiei Române (1932), doctor honoris causa al Universității din Cluj. Lucrări de teoria funcțiilor reale, teoria funcțiilor analitice (a introdus noțiunea de familie normală de funcții), calcul variațional, algebră. Op. pr.: *Leçon sur les séries de polynomes à une variable complexe*, 1910; *Leçon sur les fonctions entières ou méromorphes*, 1932. *(V.B.)*

multiplu (al unui număr întreg n), număr întreg de forma kn $(k \in \mathrm{N})$. — *Multiplu comun*, multiplu al mai multor numere întregi date. Ex.: numerele 2, 3, 5 au multiplii comuni 30, 60, 90. Cel mai mic multiplu comun al numerelor a și b se notează $[a, b]$. Se mai numește *comultiplu*. *(V.B.)*

multiprogramare, tehnică de exploatare a unui sistem de calcul, prin care două sau mai multe programe dispun simultan de resursele unui calculator, funcțiile de intrare / ieșire ale unui program suprapunîndu-se cu funcțiile de calcul ale altor programe. *(T.B.)*

mulțime, noțiune primară a matematicii, desemnînd o colecție de obiecte de natură arbitrară, numite elemente. Mulțimile se notează cu litere mari și se indică fie prin enumerarea elementelor (ex.: $A = \{a, b, c\}$), fie prin indicarea unei proprietăți ce o au elementele sale și numai ele (ex.: $P = \{x \mid x = 2k,\ k \in \mathrm{N}\}$ — mulțimea numerelor pare). Două mulțimi sînt egale dacă conțin aceleași elemente. La G. Cantor, fondatorul teoriei mulțimilor (*Mengenlehre*, 1874), termenul are înțelesul unei „colecții de obiecte bine determinate, distincte, ale intuiției sau gîndirii noastre, considerate împreună ca un tot", dar această definiție s-a dovedit insuficientă, conducînd la apariția unor paradoxuri care au declanșat o adevărată criză a fundamentelor matematicii. Pentru depășirea acestor dificultăți s-a întreprins axiomatizarea teoriei mulțimilor, primul sistem de axiome fiind elaborat de E. Zermelo (1908) și îmbunătățit de A. Fraenkel (1922). Ulterior, au fost elaborate și perfecționate și alte sisteme de axiome ale teoriei mulțimilor prin contribuția a numeroși matematicieni și logicieni. Deși problema fundamentării teoriei mulțimilor nu a fost pe deplin rezolvată, aplicarea ei în diversele discipline matematice s-a dovedit foarte productivă. Trei discipline mari au o dependență directă și esențială față de teoria mulțimilor: analiza funcțională, teoria măsurii și a integrării, topologia combinatorie. La noi în țară, primul care a introdus elemente de teoria mulțimilor în învățămîntul universitar a fost A. Mănescu (1890); contribuții la teoria mulțimilor au adus: D. Pompeiu, S. Stoilow, M. Nicolescu, A. Froda, G. Sudan ș.a. *(V.B., A.B.)*

mulțime vidă [lat. *viduus* „gol, lipsit de"] ($\varnothing$), mulțime care nu conține nici un element: $\varnothing = \{\ \}$. *(V.B.)*

mulțime conexă (într-un spațiu topologic), mulțime care nu este neconexă. *(A.B.)*

mulțime convexă (într-un spațiu vectorial), mulțime A, cu proprietatea că dacă $x, y \in A$ și $\lambda \in [0, 1]$,

atunci $\lambda x + (1 - \lambda) y \in A$. *(A.B.)*

mulțime deschisă (într-un spațiu topologic), mulțime care aparține topologiei. O mulțime deschisă E, are proprietatea că pentru orice $x \in E$, există o vecinătate V_x a sa, astfel încît $V_x \subset E$. Pe **R**, cu topologia obișnuită, mulțimile deschise sînt intervale deschise sau reuniuni de intervale deschise. Noțiunea se datorează lui G. Cantor (1872). *(V.B.)*

mulțime factor → clasă de echivalență

mulțime închisă (într-un spațiu topologic), mulțime care este complementara unei mulțimi deschise. Pe **R**, cu topologia obișnuită, intervalele închise sînt mulțimi închise. Noțiunea se datorează lui G. Cantor (1872). *(V.B.)*

mulțime neconexă (într-un spațiu topologic), mulțime care este reuniunea a două mulțimi nevide și separate. *(A.B.)*

mulțime numărabilă, mulțime echivalentă cu mulțimea numerelor naturale. Ex.: mulțimea numerelor raționale, mulțimea numerelor algebrice sînt mulțimi numărabile. Cardinalul mulțimilor numărabile este $\aleph_0$ (alef-zero). Denumirea și notația au fost date de G. Cantor (1874). *(V.B.)*

mulțime ordonată, mulțime înzestrată cu o relație de ordine. — *Mulțime total ordonată*, mulțime ordonată, în care pentru orice pereche de elemente x, y are loc una dintre relațiile: xRy, yRx, unde cu R s-a notat relația de ordine. (G. Cantor, 1878). Ex.: mulțimea numerelor reale. *(V.B.)*

mulțimi disjuncte, mulțimi care nu au nici un element comun: $A \cap B = \varnothing$. *(V.B.)*

mulțimi echivalente, mulțimi între care se poate stabili o corespondență biunivocă. Echivalența mulțimilor este o relație de echivalență. Mulțimile echivalente au același cardinal. *(V.B.)*

mulțimi separate (într-un spațiu topologic), două mulțimi A, B, astfel încît $\bar{A} \cap B = \varnothing$ și $A \cap \bar{B} = \varnothing$, unde cu $\bar{A}$ și $\bar{B}$ s-au notat aderențele mulțimilor A și B. *(A.B.)*

Myller, Alexandru (1879—1965), matematician român. Studii la Facultatea de Științe din București, Berlin și Göttingen, unde i-a avut profesori pe D. Hilbert și F. Klein (doctor, 1906). Profesor la Universitatea din Iași (din 1910). Membru al Academiei R.S. România (din 1948). Doctor honoris causa al Universității Humboldt din Berlin. Fondatorul școlii de geometrie de la Iași și organizatorul Seminarului matematic al Universității din Iași, pe care l-a înzestrat cu o bogată bibliotecă. Cercetări privind ecuațiile integrale, geometria diferențială (rețele Myller), istoria matematicii. *(V.B.)*

N

nabla (∇), operator diferențial liniar de ordinul întîi, definit în coordonate carteziene prin:

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}.$$

Aplicat unei funcții scalare el dă gradientul, iar aplicat vectorilor dă divergența sau rotorul. Aplicat produsului a doi vectori, conduce la rezultatele:

$$\nabla(\mathbf{U}\cdot\mathbf{V}) = (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{U} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} + \mathbf{V}\times(\nabla\times\mathbf{U}) + \mathbf{U}\times(\nabla\times\mathbf{V}),$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = \mathbf{V}\cdot\nabla\times\mathbf{U} - \mathbf{U}\cdot\nabla\times\mathbf{V},$$

$$\nabla\times(\mathbf{U}\times\mathbf{V}) = (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{U} - \mathbf{V}(\nabla\cdot\mathbf{U}) - (\mathbf{U}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} + \mathbf{U}(\nabla\cdot\mathbf{V}).$$

Există șase combinații posibile în care operatorul nabla e aplicat de două ori: $\nabla^2\Phi$ (laplacianul), $\nabla^2\mathbf{V}$, $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{V})$, $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{V}) = \nabla(\nabla\cdot\mathbf{V}) - \nabla\cdot\nabla\mathbf{V}$, $\nabla\times\nabla\Phi = 0$, $\nabla\cdot\nabla\times\mathbf{V} = 0$. Noțiunea a fost introdusă de W. Hamilton (1853), iar simbolul de O. Heaviside (1892). Se mai numește *operatorul lui Hamilton*. *(V.B.)*

Napier [nęipię] (Neper), John (1550—1617), matematician scoțian. Realizarea sa fundamentală este inventarea logaritmilor naturali despre care a scris lucrarea ***Mirifici logarithmorum canonis descriptio seu Arithmeticorum supputationum mirabilis abbreviatio, ejusque usus in utraque trigonometria, ut etiam in omni logistica*** *mathematica amplissimi, facillimi et expeditissimi explicatio* (1614). Reeditată postum (1619—1620) și completată cu *Mirifici canonis constructio*, conține procedeul de construcție a tabelelor de logaritmi. Invenția sa a fost adoptată de H. Briggs la calculul logaritmilor zecimali. Este primul care a substituit calculul zecimal celui cu fracții ordinare și a propus despărțirea prin virgulă a părții întregi de cea zecimală, la un număr zecimal. A realizat un calculator rudimentar. *(V.B.)*

necunoscută, element care apare în rezolvarea unei probleme, a cărui valoare nu este cunoscută, trebuind să fie determinată în funcție de datele cunoscute ale problemei. Ex.: necunoscuta într-o ecuație. În cazul cînd necunoscutele pot fi notate prin litere, se folosesc ultimele litere ale alfabetului latin (x, y, z), după propunerea lui R. Descartes (1637). *(V.B.)*

negație (a unei propoziții p; $\bar{p}$, non p, $\neg p$, $\sim p$, p', Np), propoziția „nu este adevărat p“, adevărată cînd p este falsă, și falsă cînd p este adevărată. Tabelul de valori logice ale negației este:

$v(p)$	$v(\bar{p})$
1	0
0	1

unde $v(p)$ este valoarea logică a propoziției p. *(A.B.)*

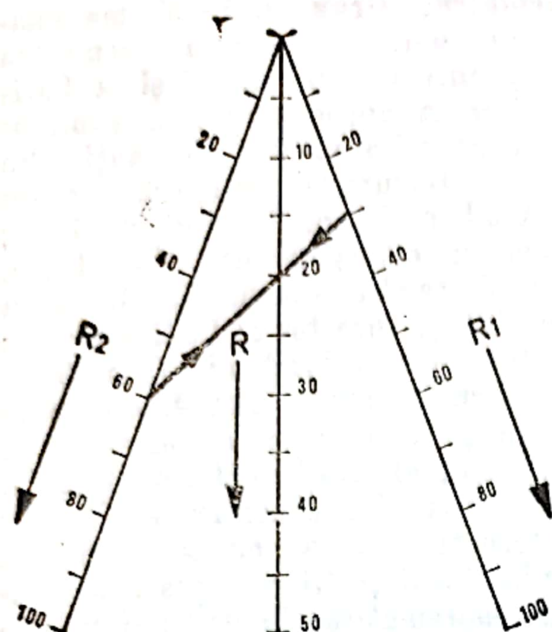
Newton [niụ:tn], **Isaac** (1642—1727), matematician, mecanician, fizician și astronom englez. Profesor la Universitatea din Cambridge (la catedra cedată în favoarea sa de fostul său profesor Isaac Barrow); a fost director al Monetăriei, membru și apoi președinte la Royal Society. Membru al Academiei de Științe din Paris. Prodigioasa sa activitate științifică s-a desfășurat în multe domenii. În matematică, unde primul său succes este teorema binomului, a descoperit dezvoltarea în serie pentru e^x, arcsin x, arctg x ș.a.; a pus (începînd din 1665, concomitent cu G. Leibniz, dar independent de acesta) bazele calculului diferențial și integral („metoda fluxiunilor"), pe care l-a aplicat la determinarea maximelor și minimelor, la determinarea centrului de greutate, a razei de curbură a curbelor, la trasarea tangentelor, la rectificări de arce, la cuadraturi. Newton a adus multe contribuții în aritmetică, la teoria ecuațiilor (reductibilitatea ecuațiilor, aproximarea rădăcinilor reale prin metoda tangentei), a studiat interpolarea, diverse curbe (cubicele). În domeniul mecanicii, I. Newton (1666) a descoperit legea atracției universale, pornind de la legile căderii corpurilor descoperite de G. Galilei și de la legile lui J. Kepler privind mișcarea planetelor și servindu-se de metoda fluxiunilor pe care a imaginat-o în acest scop, punînd astfel bazele mecanicii clasice și a mecanicii cerești. În fizică, a studiat primul descompunerea și interferența luminii, a construit telescopul cu reflexie. Op. pr.: *Methodus fluxionum et serierum infinitorum*, 1670—1671 (tipărită postum în 1736); *Philosophiae naturalis principia mathematica*, 1687; *Optiks*, 1704; *Arithmetica universalis*, 1707; *Methodus differentialis*, 1707; *Analysis per aequationes numero terminorum infinites*, 1665—1669 (publicată în 1711). *(V.B.)*

Nicolescu, Miron (n. 1903), matematician român. Studii la Facultatea de Științe din București și la Paris (doctor la Sorbona, 1928). Profesor la Universitatea din Cernăuți (din 1933) și București (din 1940). Membru al Academiei R.S. România (din 1955; membru corespondent din 1948). Președinte al Academiei R.S. România (din 1966). Director al Institutului de matematică al Academiei (din 1963). Membru în Société mathématique de France, în Circolo matematico di Palermo, al Academiei leopoldine și al comitetului executiv al Uniunii Internaționale a matematicienilor. Animatorul școlii românești de analiză matematică. Contribuții la studiul ecuațiilor cu derivate parțiale, teoria funcțiilor armonice și poliarmonice (a introdus noțiunile de funcție poliarmonică și policalorică), funcții reale. Op. pr.: *Les fonctions polyarmoniques*, 1936; *Analiza matematică*, vol. I, 1957; vol. II, 1958; vol. III, 1960; *Funcții reale și elemente de analiză funcțională*, 1962. *(V.B.)*

nod [lat. *nodus* „loc de întretăiere"] (al unei curbe algebrice), punct dublu în care există două tangente reale și diferite. Ex.: originea este un nod pentru curba $x^3 + y^3 = 3axy$ (foliul lui Descartes) cu tangentele $x = 0$, $y = 0$. *(V.B.)*

nomografie [gr. *nomos* „lege", *graphein* „a scrie"], ramură a matematicii aplicate în care se studiază modul de întocmire și de utilizare a nomogramelor, care permit înlocuirea calculelor numerice, prin utilizarea reprezentărilor grafice ale dependențelor funcționale, pentru determinarea valorilor unora dintre variabile în funcție de valorile celorlalte variabile. Denumirea a fost propusă de M. d'Ocagne (1899). *(V.B.)*

nomogramă [gr. *nomos* „lege", *gramma* „scriere, însemnare"], reprezentare grafică în plan, folosind puncte sau linii cotate, a unei relații dintre



$$\frac{1}{R}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$$

Fig. 101

două sau mai multe mărimi variabile, cu ajutorul căreia se pot determina valorile unei mărimi sau mai multor mărimi în funcţie de valorile cunoscute ale celorlalte mărimi care intră în relaţia considerată (fig. 101). — *Nomogramă reticulară* [lat. *reticulus* „reţea“], nomogramă formată din reţele de drepte paralele cu axele de coordonate, sau care trec prin originea axelor, sau dintr-un fascicul de curbe (adesea, cercuri). Aceste nomograme se bazează pe reprezentarea unei funcţii de o singură variabilă. Nomogramele reticulare, primele apărute, au fost construite cu scopul simplificării calculelor inginereşti şi au avut ca punct de plecare scara logaritmică imaginată de E. Gunter (1626) şi metoda lui R. Descartes (1637), de a reprezenta funcţiile prin curbe. Denumirea a fost introdusă de M. d'Ocagne (1899). Dintre cercetătorii români, primele contribuţii la teoria „tablourilor grafice“ le-a adus Ion Ionescu (1899). *(V.B.)*

normală [lat. *norma* „echer“, *linea* „linie“] **1.** (Pentru o curbă plană). Dreapta perpendiculară pe tangenta la curbă într-un punct dat (fig. 102). Pentru o curbă dată sub forma $y = f(x)$, ecuaţia normalei în punctul (x_0, y_0) este:

$$x - x_0 + y'(x_0)\,(y - y_0) = 0,$$

iar pentru o curbă dată sub forma $f(x, y) = 0$, ecuaţia normalei are forma:

$$\frac{\partial f}{\partial y}\,(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial x}\,(y - y_0) = 0,$$

unde derivatele sînt luate în punctul (x_0, y_0). Noţiunea de normală a fost introdusă de Apollonius (sec. 3 î.e.n.), pentru conice. **2.** (Pentru o curbă strîmbă). Oricare dintre dreptele perpendiculare pe tangenta la curbă într-un punct dat. — *Normala principală*, normala situată în planul osculator. Pentru o curbă dată prin ecuaţiile parametrice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$ ecuaţiile normalei principale sînt:

$$\frac{X - x}{\begin{vmatrix} y' & z' \\ B & C \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} z' & x' \\ C & A \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} x' & y' \\ A & B \end{vmatrix}},$$

unde $A = y'z'' - z'y''$, $B = z'x'' - x'z''$, $C = x'y'' - y'x''$, iar derivatele sînt luate în punctul conside-

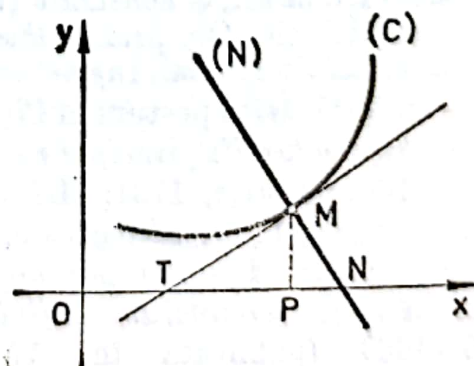


Fig. 102

rat. Conceptul de normală principală a fost introdus de L. Euler (1782). 3. (Pentru o suprafață). Dreapta perpendiculară pe planul tangent la suprafață într-un punct dat. Ecuațiile normalei la o suprafață dată prin ecuațiile parametrice

$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v)$$
$$z = z(u, v)$$

sînt:

$$\frac{X - x}{\begin{vmatrix} y'_u & z'_u \\ y'_v & z'_v \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} z'_u & x'_u \\ z'_v & x'_v \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} x'_u & y'_u \\ x'_v & y'_v \end{vmatrix}};$$

dacă suprafața este dată prin ecuația implicită $F(x, y, z) = 0$, normala are ecuațiile:

$$\frac{X - x}{\frac{\partial F}{\partial x}} = \frac{Y - y}{\frac{\partial F}{\partial y}} = \frac{Z - z}{\frac{\partial F}{\partial z}},$$

unde derivatele se iau în punctul considerat. *(V.B.)*

normă [lat. *norma* „model, regulă"] ($\|x\|$), funcție definită pe un spațiu liniar X (peste corpul comutativ K) cu valori reale pozitive, cu proprietățile:
a) $\|x\| = 0$, dacă și numai dacă $x = 0_X$ (elementul neutru al grupului abelian X);
b) $\|ax\| = |a|\|x\|$, $a \in K$;
c) $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, pentru orice $x, y \in X$.
Ex.: modulul este o normă pe **R** (considerat ca spațiu liniar peste **R**). Noțiunea a fost introdusă de E. Schmidt (1907) și M. Fréchet (1908), iar denumirea (pentru numere complexe) a fost propusă de K. Gauss (1828). *(V.B.)*

nouă [lat. *novem*], număr natural desemnat prin cifra 9 sau, după sistemul roman, prin simbolul IX. *(V.B.)*

nucleu (al unei ecuații integrale) → **ecuație integrală**

nucleu (al unui omomorfism de grupuri $f:G \to G'$; Ker$f$), subgrupul elementelor $x \in G$ pentru care $f(x) =$ = elementul neutru din G'. Ex.: omomorfismul $f : \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/m\mathbf{Z}$, definit prin $f(x)$ = clasa lui x (mod m), are ca nucleu subgrupul $m\mathbf{Z}$ al lui $\mathbf{Z}$; omomorfismul $f:\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ definit prin $f(x) = e^x$, are ca nucleu subgrupul nul $\{0\}$. *(A.B.)*

număr algebric → **număr irațional**

numărător → **fracție**

număr complex [lat. *complexus* „cuprinzător"], număr de forma $a + bi$, unde $a, b \in \mathbf{R}$ iar i este unitatea imaginară ($i^2 = -1$). Cu ajutorul noțiunii de număr real, numărul complex se definește ca o pereche ordonată (a, b) de numere reale, adunarea și înmulțirea acestora definindu-se astfel:

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b)\cdot(c, d) = (ac - bd, ad + bc).$$

Mulțimea numerelor complexe este astfel un corp notat cu **C**. Mulțimea perechilor de forma $(a, 0)$ este izomorfă cu mulțimea numerelor reale. Perechea (0,1), notată i și numită *unitate imaginară*, are proprietatea $(0,1)\cdot(0,1) = (-1,0)$, adică $i^2 = -1$. Perechea (a,b) se scrie $a+bi$. K. Wessel (1797) și K. Gauss (1799), au propus reprezentarea numărului complex $a + bi$ prin punctul de coordonate (a, b) raportat la un sistem de coordonate carteziene ortogonale. Prin trecere la coordonate polare se obține *forma trigonometrică a numărului complex*: $z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$, unde $r = \sqrt{a^2 + b^2}$ este *modulul*

numărului complex, iar θ *argumentul*. Forma exponențială a unui număr complex, $z = r \cdot e^{i\theta}$, a fost dată de L. Euler (1743), căruia i se datorează și simbolul i al unității imaginare. Mulțimea numerelor complexe este o extindere a mulțimii numerelor reale, astfel încît orice ecuație algebrică de grad n cu coeficienți reali să admită n rădăcini. Numerele complexe au fost considerate în calcule începînd cu N. Tartaglia și G. Cardan (1546) odată cu rezolvarea ecuației de gradul trei, existența lor fiind întrezărită de matematicienii indieni (sec. 12) cu prilejul rezolvării ecuației de gradul doi; W. Hamilton (1843) a elaborat o nouă teorie a lor, pe baza definiției ca un cuplu ordonat de numere reale. Denumirea a fost propusă de K. Gauss (1828); anterior, datorită lui R. Descartes (1637), erau denumite numere imaginare. — *Numere complexe conjugate*, perechea de numere complexe $z=a+bi$, $\bar{z}=a-bi$; au fost puse în evidență de R. Bombelli (1573), iar denumirea se datorează lui A. Cauchy (1821). *(V.B.)*

număr compus, număr natural care nu este prim. *(V.B.)*

număr impar [lat. *impar* „fără pereche"], număr natural care nu este divizibil cu doi. Este de forma $n = 2k - 1$ $(k \in \mathbf{N})$. Noțiunea de număr impar se întîlnește pentru prima dată la Epiharm (sec. 5 î.e.n.). *(V.B.)*

număr irațional [lat. *i* „fără", *ratio* „raport"], număr real care nu este rațional. Descoperirea numerelor iraționale, mai întîi pe $\sqrt{2}$ ca raport dintre diagonala și latura unui pătrat, este contribuția pitagoreicilor (sec. 6—4 î.e.n.). J. Lambert (1766) a demonstrat că e și π sînt numere iraționale. — *Număr algebric*, număr irațional care este rădăcina unei ecuații algebrice cu coeficienți raționali. Mulțimea numerelor algebrice este numărabilă (G. Cantor, 1873). Ex.: $\sqrt{3}$. — *Număr transcendent*, număr irațional care nu este algebric. Mulțimea numerelor transcendente este de puterea continuului. Ch. Hermite (1873) a demonstrat transcendența lui e, iar F. Lindemann (1882) pe cea a lui π. Noțiunea generală de număr irațional a fost studiată începînd cu A. Kästner (1757); J. Dedekind (1872) l-a definit prin „tăieturi" în mulțimea numerelor raționale, iar G. Cantor (1873), ca limită a unui șir de numere raționale (care îl aproximează). Termenul „irațional" a fost propus de N. Oresme (c. 1370). *(V.B.)*

număr întreg [lat. *integrum* „întreg, complet"], fiecare dintre numerele ..., $-n$, ..., -2, -1, 0, 1, 2, ..., n, ... Mulțimea numerelor întregi se notează cu **Z**. Cu ajutorul noțiunii de număr natural, numărul întreg se definește ca o clasă de echivalență, determinată în mulțimea perechilor (m, n) de numere naturale, prin relația de echivalență: $(m, n) \sim (m', n')$, dacă $m+n' = m'+n$. Pentru clasele de echivalență astfel obținute se definesc operațiile de adunare și înmulțire (prin reprezentanți):

$$(m, n) + (p, q) = (m + p, n + q)$$

$$(m, n) \cdot (p, q) = (mp+nq, mq+np).$$

Clasa de echivalență a perechilor de forma (m, m) se notează cu 0, iar pentru orice clasă de echivalență $a = \widehat{(m, n)}$ există o clasă de echivalență $a' = \widehat{(n, m)}$, astfel încît $a + a' = 0$, și în acest caz a' se notează cu $-a$. Mulțimea numerelor întregi este astfel un inel. Această mulțime este o extensie a mulțimii numerelor naturale, astfel încît ecuația $a + x = b$ $(a, b \in \mathbf{N})$ să admită totdeauna o soluție, de aici și definiția (dată de N. Chuquet, 1484) numărului negativ: diferență a două numere, cînd descăzutul este mai mic decît scăzătorul; I. Newton (1673) a adoptat definiția acestor numere ca fiind mai

mici decît zero. Numerele negative se întîlnesc întîi la chinezi (sec. 2—1 î.e.n.), fiind redate prin liniuțe orizontale (sugestie a notării lor, precedate de semnul minus). Termenul se întîlnește pentru prima dată în terminologia matematică românească, în lucrările lui Amfilohie Hotinul (1795). *(V.B., A.B.)*

număr natural [lat. *naturalis* „firesc, potrivit cu natura"], fiecare dintre numerele 1, 2, 3, ..., n, ... Mulțimea numerelor naturale se notează cu N. Numeroase cercetări au căutat fundamentarea noțiunii de număr natural; astfel G. Peano (1899) a dat o construcție axiomatică a mulțimii numerelor naturale bazată pe următoarele axiome: a) 1 este număr natural; b) pentru fiecare număr natural x, există un număr natural x', unic, numit succesorul lui x; c) 1 nu este succesorul nici unui număr natural; d) pentru orice număr natural x există cel mult un număr natural y, astfel încît x să fie succesorul lui y; e) dacă M este o submulțime a mulțimii numerelor naturale avînd proprietățile: $1 \in M$ și $x \in M$ implică $x' \in M$, atunci M coincide cu mulțimea numerelor naturale (principiul inducției complete). Mulțimea numerelor naturale este semigrup față de adunare și semigrup monoid față de înmulțire. R. Dedekind (1873) a definit numerele naturale drept cardinale de mulțimi finite. *(V.B.)*

număr par [lat. *par-paris* „cu pereche"], număr natural divizibil cu doi. Este de forma $n = 2k (k \in N)$. Conceptul de număr par a fost introdus de Epiharm (sec. 5 î.e.n.). *(V.B.)*

număr perfect [lat. *perfectus* „împlinit, desăvîrșit"], număr natural cu proprietatea că este egal cu suma divizorilor săi (exceptînd numărul). Ex.: numărul $6 = 1 + 2 + 3$. Euclid (sec. 3 î.e.n.) a dat formula numerelor perfecte:

$$N = 2^{p-1}(2^p - 1),$$

dacă p și $2^p - 1$ sînt prime. Se cunosc, pînă acum, 18 numere perfecte (pentru p = 2, 3, 5, 7, 13, 17, 19, 31, 61, 89, 107, 127, 251, 607, 1279, 2203, 2281 și 3217, ultimul avînd aproximativ 2 000 de cifre); pînă acum nu s-a găsit nici un număr perfect impar și nici nu s-a demonstrat că există. *(V.B.)*

număr prim [lat. *primus*], număr natural diferit de 1, care nu admite ca divizori decît pe 1 și pe el însuși. Șirul numerelor prime este nemărginit, fapt demonstrat încă de Euclid (sec. 3 î.e.n.). Numerele prime pot fi determinate cu ciurul lui Eratostene (sec. 3 î.e.n.). Cel mai mare număr prim cunoscut în prezent este $2^{4423}-1$. — *Teorema lui Wilson:* condiția necesară și suficientă ca un număr natural p să fie prim este ca $(p-1)!+1$ să fie divizibil cu p. — *Numere gemene*, două numere prime a căror diferență este 2. Ex.: 3 și 5; 5 și 7; 11 și 13. Problema existenței unei infinități de numere gemene este nerezolvată. *(V.B.)*

număr rațional [lat. *ratio* „raport"], număr de forma $\frac{m}{n}$, cu m și n numere întregi $(n \neq 0)$. Mulțimea numerelor raționale se notează cu Q. Cu ajutorul noțiunii de număr întreg, numărul rațional se definește ca o clasă de echivalență determinată în mulțimea perechilor (m, n) de numere întregi, prin relația de echivalență: $(m, n) \sim (p, q)$, dacă $mq = np$. Pentru clasele de echivalență astfel obținute se definesc operațiile de adunare și înmulțire (prin reprezentanți):

$$(m, n) + (p, q) = (mq + np, nq)$$
$$(m, n) \cdot (p, q) = (mp, nq).$$

Pentru orice clasă de echivalență $a = \widehat{(m, n)}$ există clasa de echivalență $a' = \widehat{(n, m)}$, astfel încît $a \cdot a' = 1$,

unde $1 = \widehat{(m, m)}$ şi în acest caz a' se notează a^{-1}. Mulţimea numerelor raţionale este astfel un corp. Ea reprezintă o extensie a mulţimii numerelor întregi, astfel încît ecuaţia $a \cdot x = b$, (cu $a, b \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$) să admită totdeauna o soluţie. Termenul a fost propus de N. Oresme (c. 1370). *(V.B., A.B.)*

număr real [lat. *realis* „corespunzător realităţii"], limită a unui şir de numere raţionale. Mulţimea numerelor reale se notează cu **R**. Cu ajutorul noţiunii de număr raţional numărul real se defineşte ca o clasă de echivalenţă determinată în mulţimea şirurilor Cauchy $(a_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de numere raţionale, prin relaţia de echivalenţă: $(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbf{N}}$ dacă $\lim\limits_{n \to \infty} (a_n - b_n) = 0$. Pentru clasele de echivalenţă astfel obţinute se definesc operaţiile de adunare şi înmulţire (prin reprezentanţi):

$$(a_n)_{n \in \mathbf{N}} + (b_n)_{n \in \mathbf{N}} = (a_n + b_n)_{n \in \mathbf{N}}$$

$$(a_n)_{n \in \mathbf{N}} \cdot (b_n)_{n \in \mathbf{N}} = (a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbf{N}}.$$

Mulţimea numerelor reale este astfel un corp. Mulţimea numerelor reale este o extensie a mulţimii numerelor raţionale, astfel încît orice şir Cauchy să admită o limită. La noţiunea de număr real au ajuns Omar Khayyam (sec. 11) şi Nasireddin al-Tusi (sec. 12), arătînd că fiecare raport între mărimi (indiferent dacă sînt sau nu comensurabile) poate fi numit număr. O construcţie a mulţimii numerelor reale poate fi dată cu ajutorul tăieturii lui Dedekind (1872); lui A. Artin şi O. Schreier (1926) li se datorează construcţia algebrică a corpului real. *(V.B., A.B.)*

număr transcendent → număr iraţional

număr transfinit → cardinalul unei mulţimi

numere amiabile [fr. *amiable* „prietenos, în corelaţie"], două numere naturale care au proprietatea că fiecare număr este egal cu suma divizorilor celuilalt (dintre divizori excluzîndu-se numărul însuşi). Exemplul lui Pitagora (sec. 6 î.e.n.): numerele $220 = 2^2 \cdot 5 \cdot 11$ şi $284 = 2^2 \cdot 71$, pentru că:

$$220 = 1 + 2 + 4 + 71 + 142;$$

$$284 = 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110.$$

Regula de obţinere a numerelor amiabile a fost stabilită de T. ibn-Korra (sec. 9) şi redescoperită de P. Fermat, fiind publicată de R. Descartes (1638) sub forma: dacă p, q, r sînt numere prime de forma:

$$p = 3 \cdot 2^n - 1, \; q = 3 \cdot 2^{n-1} - 1,$$

$$r = 3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1, \; (n \in \mathbf{N})$$

atunci $N_1 = 2^n pq$ şi $N_2 = 2^n r$ sînt numere amiabile. *(V.B.)*

numere gemene → număr prim

numere pitagoreice, trei numere naturale x, y, z astfel încît:

$$x^2 = y^2 + z^2$$

Numerele pitagoreice sînt de forma:

$$x = m^2 + n^2, \; y = m^2 - n^2, \; z = 2mn,$$

unde m, $n (m > n)$ sînt numere naturale. Ex.: $5^2 = 3^2 + 4^2$. *(V.B.)*

numitor → fracţie

nutaţie [lat. *nutatio* „balansare"], mişcarea axei de rotaţie proprie a unui corp solid cu un punct fix, care execută o mişcare de precesie, constînd în apropierea şi depărtarea faţă de o axă fixă. *(Şt.G.)*

O

oblică [lat. *obliquus* „pieziș, înclinat"] (față de o dreaptă sau un plan), dreaptă care nu este perpendiculară pe dreapta sau planul dat. *(V.B.)*

octaedru [gr. *okto* „opt", *hedra* „bază, față"], poliedrul cu opt fețe. Octaedrul regulat este unul dintre cele cinci poliedre regulate; are fețele triunghiuri echilaterale unite cîte 4 în același vîrf, iar cele 12 muchii se string (cîte 4) în cele 6 vîrfuri ale poliedrului, măsura unghiului diedru format de două fețe fiind de 109°20′16″, 4 (fig. 103). Aria și volumul octaedrului regulat în funcție de muchia sa, l, sînt:

$$V = \frac{\sqrt{2}\,l^3}{3},\quad A = 2\sqrt{3}\,l^2.$$

Relațiile între muchia l și razele r a sferei înscrise, și R a sferei circumscrise octaedrului regulat sînt date de egalitățile:

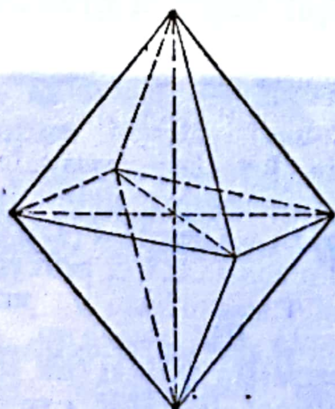


Fig. 103

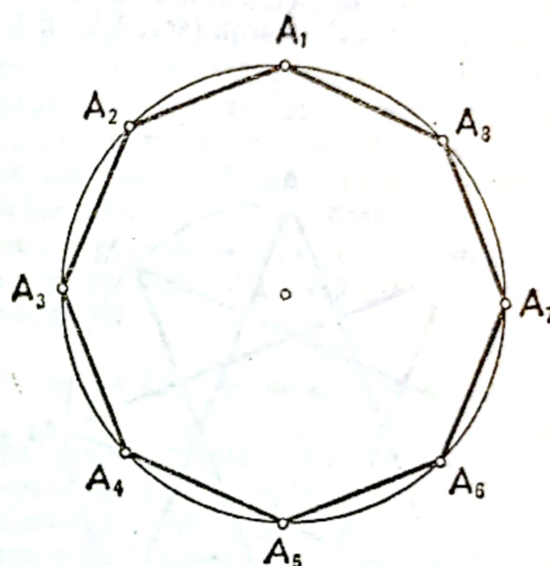


Fig. 104

$$l = 3\sqrt{2}r = \sqrt{2}R.$$

Denumirea a fost dată de Teetet (sec. 3 î.e.n.), care l-a și construit exact; acest poliedru era cunoscut însă, sub alt nume, mai înainte, de către Pitagora (sec. 6 î.e.n.). În natură, sub forma octaedrului regulat se întîlnesc cristalele de alaun și de cupru. *(V.B.)*

octant [lat. *octans* „a 8-a parte"], fiecare dintre cele opt regiuni în care trei plane concurente, perpendiculare două cîte două, împart spațiul. *(V.B.)*

octogon [gr. *okto* „opt", *gonia* „unghi"], poligon cu opt laturi (fig. 104). Latura octogonului regulat în

funcţie de raza R a cercului circumscris este:

$$l_8 = R\sqrt{2-\sqrt{2}},$$

iar aria este dată de formula:

$$A = 2\sqrt{2}R^2.$$

— *Octogon stelat*, octogon concav ce se obţine unind din trei în trei vîrfurile octogonului (fig. 105). Denumirea a fost propusă de Heron (sec. 1 î.e.n.). *(V.B.)*

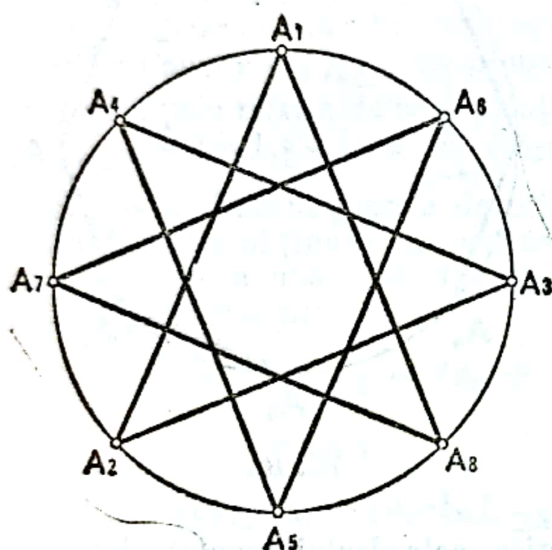


Fig. 105

Omar Khayyam (1048—1123), matematician, astronom, filozof şi poet arab. A condus Observatorul astronomic din Ispahan. În cartea *Comentarii despre demonstraţiile problemelor de algebră şi almukabala* (c. 1074) analizează rezolvarea ecuaţiilor algebrice, le clasifică şi afirmă că ecuaţia de gradul trei nu se poate rezolva, în general, cu ajutorul riglei şi compasului; în *Comentarii despre dificultăţile din introducerile la cărţile lui Euclid* (1077) este prezentată teoria paralelelor. Khayyam a mai scris un tratat (rămas nedescoperit), *Dificultăţile aritmeticii* (c. 1100) cuprinzînd procedeul de determinare a rădăcinilor de orice indice natural din numere întregi. A preconizat (1079) prima reformă a calendarului musulman. Foarte cunoscut şi datorită vestitelor sale *Rubayate*. *(V.B.)*

omografie [gr. *homos* „la fel", *graphein* „a scrie"], funcţia

$$x' = \frac{ax+b}{cx+d}, \quad \text{cu} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0.$$

Mulţimea omografiilor formează un grup faţă de operaţia de compunere a funcţiilor. Raportul anarmonic a patru numere este invariat într-o omografie (A. Cayley, 1859). Transformarea omografică conservă coliniaritatea punctelor şi gradul curbelor şi suprafeţelor. În geometrie se pot defini omografii care pun în corespondenţă două elemente geometrice din două mulţimi, unde poziţia fiecărui element depinde de un singur parametru. — *Omografie între punctele a două drepte*, omografie care realizează o corespondenţă între un punct M, de abscisă x, de pe o dreaptă d şi punctul M' de abscisă x', de pe o dreaptă d'. Reciproc, dacă între punctele a două drepte există o corespondenţă biunivocă realizată prin construcţii cu rigla şi compasul, această corespondenţă este o omografie. — *Omografie între razele a două fascicule de drepte*, omografie care realizează o corespondenţă între o dreaptă de pantă x dintr-un fascicul şi dreapta de pantă x' din alt fascicul. Noţiunea a fost introdusă de A. Möbius (1827); denumirea a fost propusă de M. Chasles (1852). *(V.B.)*

omologie [gr. *homologos* „în armonie"], transformare determinată de un punct O, o dreaptă d (axa de omologie) şi o constantă k, prin care unui punct M i se asociază un punct M', pe dreapta OM astfel ca, dacă P este intersecţia dreptei OM cu dreapta d, atunci $(OPMM') = k$. Omologia este o transformare proiectivă

cu o dreaptă de puncte duble (J. Poncelet, 1822). *(V.B.)*

omomorfism [gr. *homos* „la fel, asemănător", *morphe* „formă"], funcţie f între două mulţimi cu aceeaşi structură, astfel încît compunerii a două elemente dintr-o mulţime să-i corespundă compunerea imaginilor lor din cealaltă mulţime. Noţiunea a fost considerată iniţial de A. Capelli (1878), iar denumirea se datorează lui F. Klein (1892). — *Omomorfism de grup*, funcţie f definită pe un grup G (la care legea de compoziţie este notată cu $\top$), cu valori în grupul G', (la care legea de compoziţie este notată $\perp$), avînd proprietatea: $f(x \top y) = f(x) \perp f(y)$, pentru orice x şi y din G. Ex.: funcţia $f(z)=|z|$ este un omomorfism al grupului multiplicativ format din numerele complexe nenule şi grupul multiplicativ al numerelor reale pozitive: $f(z_1 \cdot z_2) = |z_1 \cdot z_2| = |z_1||z_2| = f(z_1) \cdot f(z_2)$. —*Omomorfism de inel*, funcţie f definită pe un inel I, cu valori în inelul I', astfel încît:

a) $f(x + y) = f(x) + f(y)$;

b) $f(x \cdot y) = f(x) \cdot f(y)$, pentru orice x şi y din I. — *Omomorfism de corp*, omomorfism de inel între două corpuri. Un omomorfism de corp este injectiv. Ex.: scufundarea corpului numerelor raţionale în corpul numerelor reale sau a corpului numerelor reale în corpul numerelor complexe. — *Omomorfism de modul* → *aplicaţie liniară*. — *Endomorfism*, omomorfism de la o mulţime cu o structură dată la ea însăşi. — *Automorfism*, endomorfism bijectiv (endomorfism dat de o funcţie bijectivă). — *Monomorfism*, omomorfism injectiv. — *Epimorfism*, omomorfism surjectiv. *(V.B.)*

omotetie [gr. *homos* „la fel", *thesis* „poziţie"], transformare geometrică punctuală, definită de un punct fix O (numit centrul omotetiei) şi de un număr real k (numit puterea sau modulul omotetiei), care asociază unui punct M un punct M', de pe dreapta OM, astfel încît: $\frac{OM'}{OM} = k$. Dacă $k > 0$, punctele M şi M' sînt de aceeaşi parte a centrului (omotetia fiind directă); dacă $k < 0$, punctele M şi M' sînt de o parte şi de alta a centrului (omotetia inversă). Punctul O este singurul punct care coincide cu corespondentul său, iar orice dreaptă sau plan care trece prin centru este un element invariant. În raport cu un sistem de axe rectangulare avînd originea în centru, între coordonatele carteziene ale unui punct $M(x, y, z)$ şi ale transformatului său $M'(x', y', z')$, există relaţiile:

$$x' = kx, \quad y' = ky, \quad z' = kz.$$

În plan, omotetia este o omologie avînd ca axă dreapta de la infinit. Omotetiile formează un grup. Omotetia a fost definită pentru prima dată de Apollonius (sec. 3 î.e.n.), studiul figurilor omotetice a fost însă amplu dezvoltat de J. Poncelet (1822). Denumirea a fost introdusă de M. Chasles (1852). *(V.B.)*

Onicescu, Octav (n. 1892), matematician român. Studii la Universitatea din Bucureşti şi la Roma (doctor, 1920). Profesor la Universitatea din Bucureşti (agregat din 1929, titular din 1931). Membru al Academiei R.S. România (din 1965; membru corespondent din 1938). Membru al Institutului internaţional de statistică din Haga. A organizat Şcoala de statistică din Bucureşti. A fost unul dintre iniţiatorii Uniunii interbalcanice a matematicienilor. Creatorul şcolii româneşti de teoria probabilităţilor. Contribuţii în algebră, geometria diferenţială (formula Onicescu

privitoare la geodezice), topologie, mecanică și, în special, în domeniul teoriei probabilităților, unde a introdus noțiunea de lanț cu legături complete (în colab. cu Gh. Mihoc) și noțiunea de energie informațională. Op. pr.: *Strategia jocurilor* (cu aplicații la programarea liniară), 1961; *Numere și sisteme aleatoare*, 1962 (ed. în lb. franceză, 1962); *Mecanica*, 1969; *Principiile teoriei probabilităților*, 1969. *(V.B.)*

operator [lat. *operator* „care acționează asupra cuiva"], funcție definită pe un spațiu vectorial X (peste un corp C), cu valori în spațiul vectorial Y (peste corpul C): $T : X \to Y$. Ex.: dacă se notează cu $D(I)$ mulțimea funcțiilor derivabile pe intervalul I (care este un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$) și cu $D'(I)$ mulțimea derivatelor funcțiilor din $D(I)$ (care este de asemenea un spațiu vectorial peste corpul $\mathbb{R}$), atunci funcția $T : D(I) \to D'(I)$ cu $T(f) = f'$ este un operator (operatorul de derivare). — *Operator aditiv*, operator care are proprietatea: $T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2)$, pentru orice $x_1, x_2 \in X$. — *Operator omogen*, operator care are proprietatea $T(ax) = aT(x)$, pentru orice $x \in X$ și $a \in C$. — *Operator liniar*, operator aditiv și omogen. Ex.: operatorul de derivare este liniar. *(V.B., A.B.)*

operatorul lui Hamilton → nabla

operație [lat. *operatio*], funcție definită pe un produs cartezian (finit sau nu), cu valori în alt produs cartezian. — *Operație algebrică*, operație definită pe un produs cartezian finit. Dacă domeniul de definiție este format dintr-o mulțime (care nu este produs cartezian), operația se numește *unară*. Ex.: negația (într-o algebră booleană). Dacă domeniul de definiție este format dintr-un produs cartezian cu doi factori, operația se numește *binară*. Ex.: adunarea și înmulțirea numerelor reale sînt operații binare. În evoluția noțiunii de operație algebrică se disting următoarele faze: a) operații cu numere (adunarea, înmulțirea, ridicarea la putere și inversele lor) studiate în aritmetică; b) operații aritmetice cu numere și elemente nedeterminate (numerice), studiate în algebra elementară; c) operații efectuate asupra unor elemente abstracte studiate în algebra modernă. — *Operație topologică*, operație definită pe un produs cartezian infinit. Ex.: operația de trecere la limita pentru șiruri de numere reale. Timp de milenii, singurele operații matematice, asupra numerelor naturale, apoi fracționare, au fost adunarea și scăderea (cu descăzutul mai mare decît scăzătorul); treptat, a apărut și înmulțirea (la început, ca dublare, apoi ca adunare repetată), iar mai tîrziu ridicarea la putere (ca înmulțire repetată). Împărțirea este relativ mai recentă, astfel, din papirusurile egiptene, se constată că cele cinci operații asupra numerelor (naturale) erau cunoscute la sfîrșitul mileniului 3 î.e.n. Multă vreme extragerea rădăcinii a fost legată de operația de împărțire (ca o împărțire repetată), datînd din mileniul 2 î.e.n. Chinezii (încă în sec. 2 î.e.n.) au considerat adunarea și scăderea numerelor negative, Diofant (sec. 3) a dat regula de înmulțire a acestora, Brahmagupta (sec. 6) a extins regulile de adunare și scădere la toate numerele întregi (inclusiv zero), asupra cărora Bhaskara (sec. 12) efectuează operațiile de înmulțire și împărțire și introduce dubla valoare a rădăcinii pătrate din numere pozitive. R. Bombelli (1573) a expus regula adunării și înmulțirii numerelor complexe. Perfecționarea continuă a notațiilor matematice, precum și apariția unor noțiuni noi (polinoame, vectori, matrici etc.), cu care se operează după reguli analoage regulilor cu numere, au sugerat studiul principiilor generale care stau la baza calculului, studiul operațiilor,

ceea ce a condus la apariția noțiunii de lege de compoziție, prin care se extinde noțiunea de operație aritmetică. *(V.B.)*

operații fără sens, fiecare dintre operațiile: $\infty - \infty$, $0 \cdot \infty$, $0 \cdot (-\infty)$, $\frac{a}{0}$ $(a \in \mathbf{R})$, $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{\infty}{-\infty}$, $\frac{-\infty}{\infty}$, $\frac{-\infty}{-\infty}$, 1^{∞}, 0^{0}, ∞^{0}. Limita unei funcții ce conduce la asemenea operații se poate obține aplicînd procedee de calcul adecvate, avînd la bază regula lui l'Hôspital sau limite fundamentale ca:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1, \quad \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e.$$

Cea mai veche operație fără sens, împărțirea prin zero a unui număr diferit de zero, a fost semnalată de indienii antici: Bhaskara (sec. 12) a afirmat că $\frac{a}{0}$ conduce la infinit. *(V.B.)*

opt [lat. *octo*, termen format din cuvîntul sanscrit *așta*], număr natural notat prin cifra 8 (statornicită după introducerea tiparului, 1440) sau, după sistemul roman, prin simbolul VIII. *(V.B.)*

orbită [lat. *orbis* „cerc"], traiectoria închisă a unui punct material (sau în sens larg, a unui corp ceresc) aflat sub influența unei forțe centrale. Ca și traiectoria, orbitele se pot clasifica după curba descrisă. Ex.: orbită eliptică, orbită parabolică. *(Șt.G.)*

ordonată [lat. *ordinatus* „în ordine, la rînd"] **1.** (Pentru un punct din plan raportat la reperul format de axele concurente Ox și Oy). A doua coordonată carteziană a punctului respectiv, măsurată pe segmentul dus din punct, paralel cu axa Oy, pînă la axa Ox (fig. 106). **2.** (Pentru un punct din spațiu, raportat la reperul format din axele necoplanare Ox, Oy, Oz). A doua coordonată carteziană a punctului respectiv

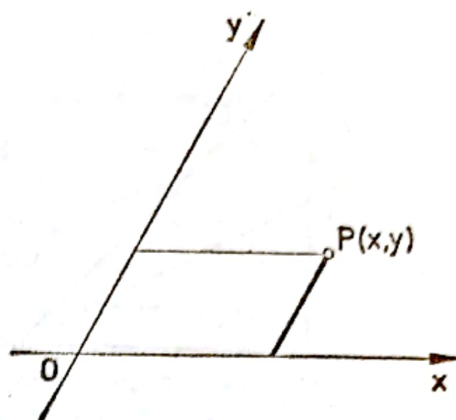


Fig. 106

măsurată pe segmentul dus din acest punct, paralel cu axa Oy, pînă la planul xOz. Introducerea noțiunii se datorează lui P. Fermat și, îndeosebi, lui R. Descartes (1637); notarea ordonatei cu litera y a fost propusă de J. Witt (1659). Denumirea, sugerată de F. Commandino (1566), s-a impus în terminologia matematică datorită lui F. Lahire (1709) și Cl. Rabuel (în lucrările postume, 1730). *(V.B.)*

organigramă → **schemă logică de calcul**

origine [lat. *origo-originis* „origine, început"], punct fix al unui sistem de coordonate de la care încep măsurătorile coordonatelor punctelor figurilor raportate la sistemul considerat. Termenul a fost folosit prima dată de F. Lahire (*Nouveaux Eléments des Sections coniques*, 1679), căruia i se datorează și notația prin inițiala denumirii, O. *(V.B.)*

ortocentru [gr. *orthos* „drept", *kentron* „centru"] *(H)* **1.** Punctul de concurență a înălțimilor unui triunghi (fig. 107). H fiind ortocentrul triunghiului ABC, oricare dintre punctele A, B, C, H este ortocentrul triunghiului format de celelalte puncte. Denumirea a fost dată de Besant (*Geometrical Conics*, 1869), fiind sugerată de faptul că înălțimile sînt ortogonale în raport cu bazele; nota-

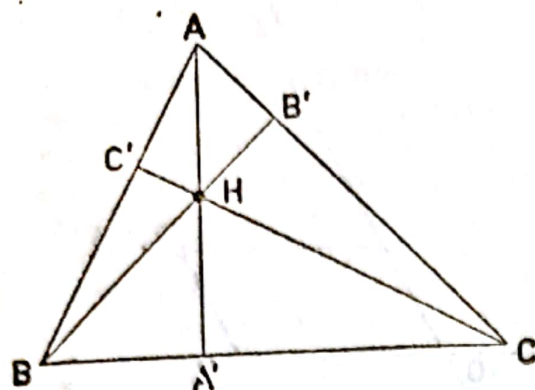


Fig. 107

ţia cu litera H a fost propusă de J. Lange (1894), prin analogie cu notaţia înălţimilor cu litera h. Concurenta înălţimilor a fost demonstrată iniţial de J. Regiomontanus (1464). **2.** Punct de concurenţă a înălţimilor unui tetraedru particular (ortocentric). *(V.B.)*

ortogonalitate [gr. *orthos* „drept", *gonia* „unghi"], calitate a două curbe de a se tăia sub un unghi drept. Ex.: *cercuri ortogonale*. *(V.B.)*

ortoptică [gr. *orthos* „drept", *optike* „optică, vedere"], curbă, loc geometric al punctelor din care se pot duce două tangente perpendiculare la o curbă dată. Ex.: ortoptica unei elipse este un cerc numit cercul ortoptic. Ortoptica unei parabole este directoarea ei. *(V.B.)*

oscilator liniar, model mecanic construit dintr-un punct material care este supus unei forţe elastice. Dacă mişcarea are loc de-a lungul unei axe Ox, originea fiind aleasă în punctul unde forţa elastică se anulează, ecuaţia mişcării punctului este $m\ddot{x} + R\dot{x} + Kx = 0$, unde R e coeficientul de amortizare presupus proporţional cu viteza. Dacă $R^2 < 4Km$, punctul material va executa oscilaţii, cu amplitudine descrescîndă, de frecvenţă $n = (2\pi)^{-1} [K/m - R^2(4m^2)^{-1}]^{1/2}$. Nu au loc oscilaţii pentru $R^2 = 4Km$, cînd mişcarea se numeşte „critic amortizată", şi pentru $R^2 > 4Km$, cînd mişcarea este „supraamortizată". *(Şt.G.)*

oscilaţie [lat. *oscilatio* „legănare"], variaţia în timp a parametrilor care definesc configuraţia unui sistem de puncte materiale sub influenţa forţelor interioare şi a forţelor exterioare, însoţită de transformări succesive a energiei cinetice a punctelor materiale care îl alcătuiesc, în energia potenţială şi invers. Oscilaţia unui punct material este caracterizată prin: *elongaţie*, valoarea instantanee a parametrului care execută o mişcare oscilatorie; *amplitudine*, valoare maximă a elongaţiei; *perioadă (T)*, intervalul de timp ce desparte două momente succesive la care parametrul care descrie mişcarea oscilatorie şi viteza corespunzătoare au aceleaşi valori; *frecvenţă (f)*, numărul oscilaţiilor în unitatea de timp (de obicei secunda, cînd frecvenţa se măsoară în herzi); *pulsaţie* (ω, ν), numărul de perioade efectuate în 2π unităţi de timp $([\omega] = T^{-1})$; *fază*, argumentul parametrului considerat. Ex.: dacă elongaţia este dată de $x = a \sin(\omega t + \varphi_0)$, a este amplitudinea, $\omega t + \varphi_0$ faza, φ_0 faza iniţială, iar $\omega = 2\pi f$ pulsaţia. Dacă avem un sistem izolat, el poate executa oscilaţii libere cu frecvenţe numite frecvenţe naturale, proprii sau de rezonanţă. Cînd amplitudinea descreşte cu timpul oscilaţia se numeşte *amortizată*. Un sistem care primeşte din exterior o energie cel puţin egală cu energia pe care o cedează, se spune că execută oscilaţii *întreţinute* (forţate, constrînse). Amplitudinea oscilaţiei creşte foarte mult cînd o frecvenţă cu care se face acest schimb de energie este apropiată de una dintre frecvenţele proprii sau coincide cu una dintre ele, fenomenul fiind denumit rezonanţă. El are largi aplicaţii în ştiinţă şi tehnică, urmărindu-se uneori producerea iar alteori evitarea lui (se cunosc cazuri cînd podurile s-au rupt deoarece au fost

supuse la forțe exterioare periodice, provocate de trecerea unui grup de oameni în pas cadențat sau de rafale de vînt). În sens restrîns, prin oscilație, se înțelege întreaga succesiune de stări consecutive ce se desfășoară înainte ca acestea să se repete. Ex.: la un pendul simplu, o oscilație este cuprinsă între punctul inițial și același punct, cînd punctul material considerat are din nou, pentru prima dată, aceeași viteză (în mărime, direcție și sens). *(Șt.G.)*

Ostrogradski, Mihail Vasilievici (1801—1862), matematician rus. Profesor la Petersburg. Membru al Academiei de Științe din Petersburg și al Academiilor din New York, Torino, Roma și Paris. Cercetări avînd ca obiect fizica matematică, analiza matematică (formula integralei multiple), teoria ecuațiilor diferențiale, algebra, teoria probabilităților, mecanica analitică și cerească și alte domenii înrudite (hidrodinamica, teoria elasticității, balistica). Op. pr.: *Memoire sur le calcul des variations des intégrales multiples*, 1834; *O preobrazovaniah peremenîh v cratnîh integralah*, 1836. *(V.B.)*

oval [lat. *ovum* „ou"], curbă, loc geometric al punctelor M, pentru care produsul distanțelor la două puncte date F_1 și F_2 este constant:

$$F_1M \cdot F_2M = b^2.$$

În raport cu un sistem de axe ortogonale cu originea O, în mijlocul segmentului $F_1F_2 = 2a$ (ca axă Ox), ecuația implicită a ovalului este:

$$(x^2 + y^2)^2 - 2a^2(x^2 - y^2) + a^4 - b^4 = 0.$$

Pentru $a^2 < b^2$ rezultă curba exterioară; cazului $a^2 > b^2$ îi corespund cele două curbe închise separate, iar cînd $a^2 = b^2$ se obține lemniscata (fig. 108). O secantă mobilă dusă printr-un punct A de pe dreapta F_1F_2 taie cercul de diametru F_1F_2 în punctele

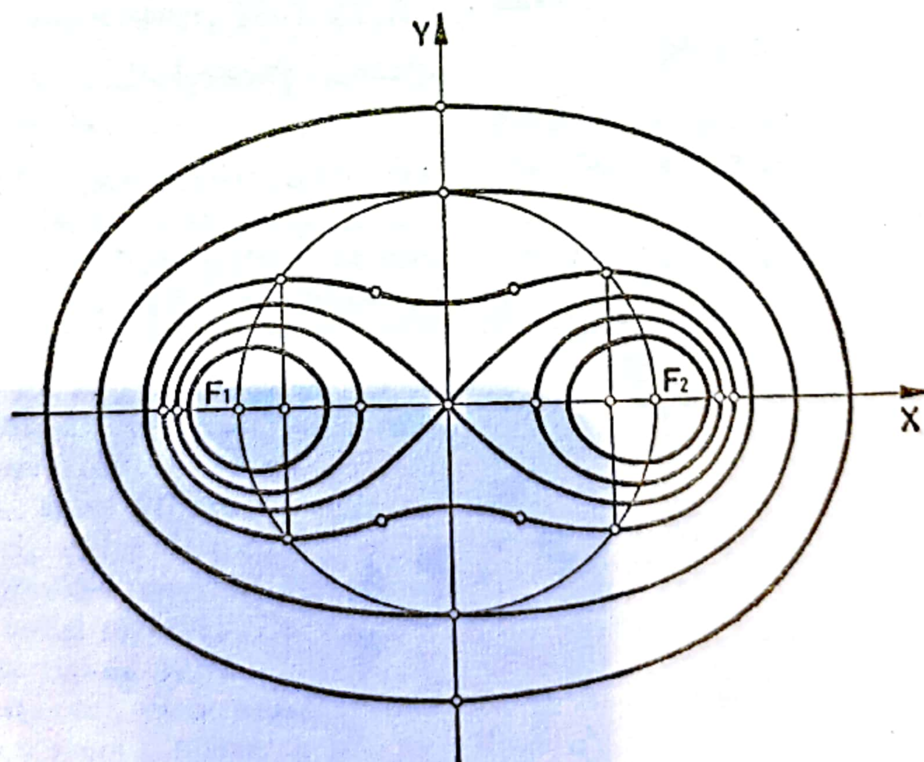


Fig. 108

M_1, M_2. Intersecția cercurilor (F_1, AM_1),(F_2,AM_2) descrie ovalul. Aceste curbe au fost introduse de astronomul J.D. Cassini (sec. 17). Se mai numesc *ovalele lui Cassini*. *(V.B.)*

ovalele lui Descartes, curbă, loc geometric al punctului M pentru care distanțele la două puncte fixe F_1 și F_2 (numite focare) sînt legate printr-o relație liniară:

$$F_1M \pm pF_2M \pm q = 0,$$

în care p și q sînt constante (fig. 109). Locul punctelor ale căror distanțe la două cercuri au raportul constant este un oval al lui Descartes (I. Newton, 1679). Ovalele lui Descartes admit un al treilea focar F_3, situat pe dreapta F_1F_2. Aceste curbe au fost definite de către R. Descartes (1637), cu scopul de a fi aplicate la confecționarea lentilelor. *(V.B.)*

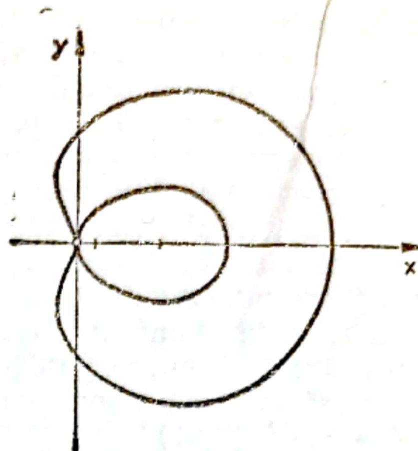


Fig. 109

P, Q

pana conică → **conoid**

Pantazi, Alexandru (1896—1948), matematician român. Studii la Universitatea din București și la Paris (doctor la Sorbona, 1928). Profesor la Școala Politehnică din București (din 1943). Membru al Academiei de Științe din România. Contribuțiile sale se referă la geometria diferențială proiectivă (a introdus noțiunile de polaritate în raport cu o familie de suprafețe, transversală proiectivă, cvadruplele Pantazi, rețelele Terracinni-Pantazi). Op. pr.: *Elemente de geometrie diferențială proiectivă a curbelor și suprafețelor*, 1942. *(V.B.)*

pantă [fr. *pente* „înclinare"] → **coeficient unghiular**

pantograf [gr. *pan-pantos* „tot", *graphein* „a scrie, a desena"], aparat construit din patru bare astfel încît prin intersectarea lor să formeze un paralelogram deformabil, $ABCD$, care poate pivota în jurul unui ax fix ce trece printr-un punct, O, al uneia dintre bare, AB. Cînd un anumit punct E al barei BC descrie conturul unei figuri, vîrful D (coliniar cu O și E) reproduce modelul figurii — realizînd astfel omotetii. Pantograful servește la reproducerea unui desen, a unei hărți etc., fie la aceeași mărime, fie la o scară diferită. A fost inventat de Gavard și perfecționat de Ch. Scheiner (1631). *(V.B.)*

parabolă [gr. *parabole* „comparare"], curbă obținută prin secționarea unui con circular cu un plan paralel cu o generatoare. Este locul geometric al punctelor egal depărtate de un punct fix (numit focar) și de o dreaptă fixă (numită directoare) (fig. 110). În raport cu un sistem de axe de coordonate format din perpendiculara dusă din focar pe directoare, ca axă Ox, și din paralela la directoare, dusă prin mijlocul segmentului determinat de focar și proiecția sa pe directoare, ca axă Oy, ecuația parabolei este:

$$y^2 - 2px = 0.$$

Parabola admite o axă de simetrie (axa Ox), iar focarul F are abscisa

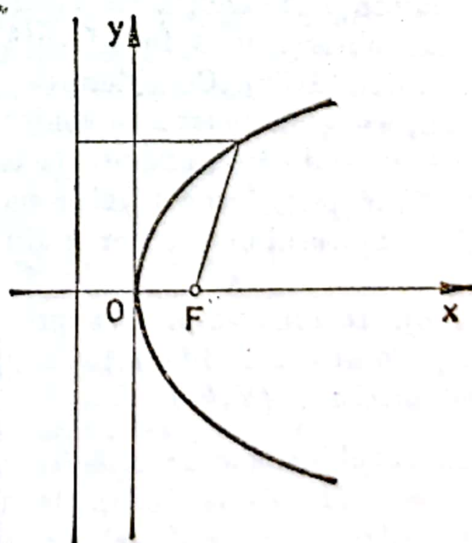


Fig. 110

$\frac{p}{2}$. Originea sistemului de coordonate este vîrful parabolei, iar axa Oy este tangentă la parabolă în acest punct. Faţă de un reper polar, cu polul în focar, avînd axa de simetrie ca axă polară, ecuaţia parabolei este:

$$\rho = \frac{p}{1 + \cos\theta} \quad \text{(S. Lacroix, 1798).}$$

Aria domeniului plan mărginit de un arc M_1M_2 al parabolei şi de coarda subîntinsă (perpendiculară pe axa parabolei) este $\frac{2}{3}$ din aria dreptunghiului construit pe coarda M_1M_2 şi pe tangenta la vîrf, cuprins între paralelele la axă duse prin M_1 şi M_2, rezultat obţinut pentru prima oară de Arhimede (sec. 3 î.e.n.). Parabola are proprietatea că tangenta şi normala într-un punct sînt bisectoarele unghiurilor formate de dreapta care uneşte punctul cu focarul, cu paralela la axă dusă prin punctul dat. Această proprietate stă la baza principiului reflectorului (după ideea lui Arhimede) şi a telescopului reflector (inventat de I. Newton, 1672). Parabola, fiind traiectoria unui mobil greu, aruncat cu o viteză iniţială, are o importanţă deosebită în balistică (această observaţie a fost făcută de G. Galilei, 1638). Considerarea parabolei, ca şi a celorlalte conice, se datorează lui Menechmus (sec. 4 î.e.n.), iar prima construcţie mecanică (cu ajutorul unui echer şi al unei sfori) a acesteia a realizat-o Isidor (sec. 6). Denumirea a fost propusă de Apollonius (sec. 3 î.e.n.) (→ *aplicarea ariilor*). *(V.B.)*

parabolă cubică, curbă plană de ecuaţie $y = x^3$ (J. Wallis, 1656). Originea este centru de simetrie al curbei şi punct de inflexiune (fig. 111). Este

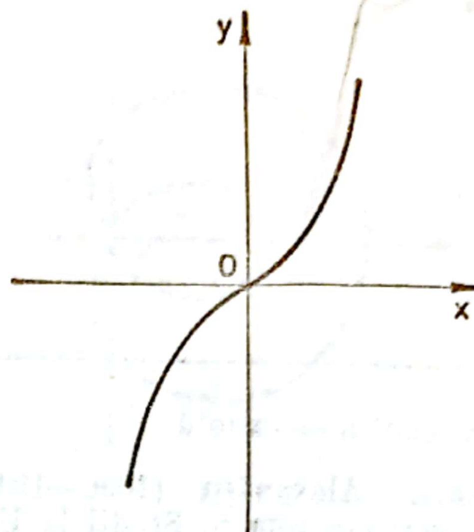


Fig. 111

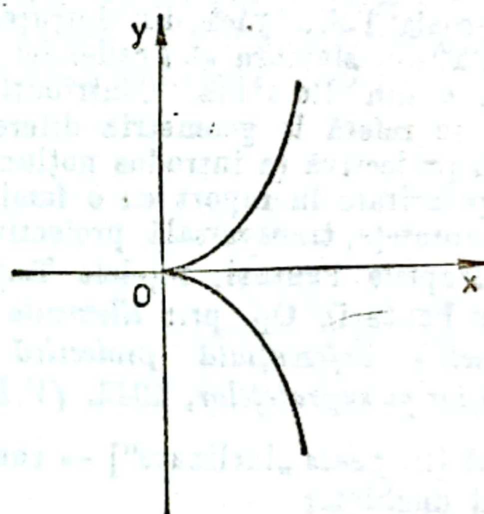


Fig. 112

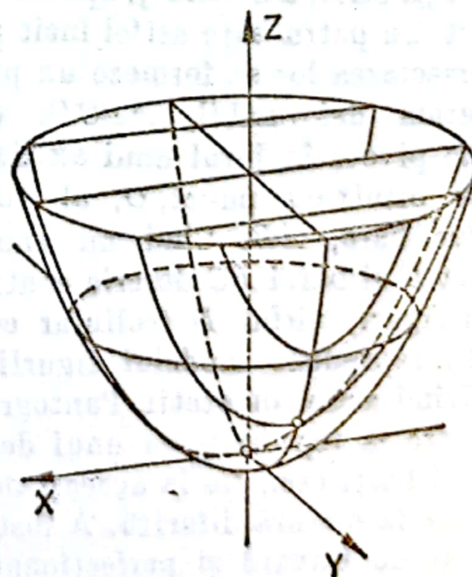


Fig. 113

utilizată la racordări feroviare. *(V.B.)*

parabolă semicubică, curbă plană, de ecuaţie $y^2 = x^3$. Curba este situată la dreapta axei Oy $(x > 0)$, este simetrică faţă de axa Ox, iar originea este un punct de întoarcere (fig. 112). *(V.B.)*

paraboloid [gr. *parabole* „parabolă", *eidos* „aspect"] — *Paraboloid eliptic*, suprafaţă generată de o familie de elipse mobile, omotetice, cu centrul pe o dreaptă d, care se sprijină pe o parabolă situată într-un plan ce trece prin dreapta d, avînd ca axă pe d (fig. 113). Faţă de reperul format din dreapta d, ca axă Oz, şi planul parabolei, ca plan yOz, ecuaţia paraboloidului eliptic este:

$$\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 2z.$$

Secţiunile prin plane paralele cu planul xOy sînt elipse, iar cele prin plane paralele cu xOz sau yOz sînt parabole. Suprafaţa generată prin rotaţia unei parabole în jurul axei de simetrie este un paraboloid eliptic, pentru care $p = q$, şi se numeşte *paraboloid de rotaţie*. Ecuaţia sa este: $x^2 + y^2 = 2pz$ (F. Lahire, 1679). Paraboloidul de rotaţie era cunoscut de Arhimede (sec. 3 î.e.n.). — *Paraboloid hiperbolic*, suprafaţă generată de o familie de parabole mobile, egale, ce se află în plane perpendiculare pe o dreaptă d, care se sprijină pe o parabolă situată într-un plan ce trece prin d şi avînd dreapta d tangentă în vîrf (fig. 114). Faţă de reperul format din dreapta d, ca axă Oy, şi planul parabolei fixe, ca plan xOy, ecuaţia paraboloidului hiperbolic este:

$$-\frac{x^2}{p^2} + \frac{y^2}{q^2} = 2z.$$

Secţiunile prin plane paralele cu planul xOy sînt hiperbole, iar cele

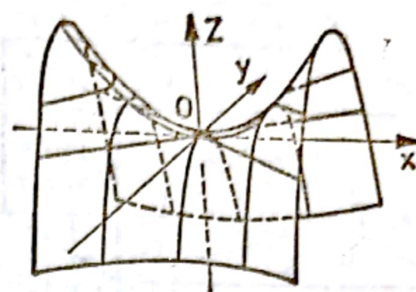


Fig. 114

prin plane paralele cu xOz şi yOz sînt parabole. Paraboloidul hiperbolic a fost considerat pentru prima dată de Ch. Tinseau (1780). *(V.B.)*

paralel [gr. *para* „alăturat", *allelon* „unul cu altul"], fiecare dintre cercurile de intersecţie ale unei suprafeţe de rotaţie cu plane perpendiculare pe axa ei de rotaţie. *(V.B.)*

paralele [gr. *para* „alături", *allelon* „unul cu altul"] $(d_1 \parallel d_2)$ **1.** (În geometria euclidiană). Două drepte d_1, d_2, coplanare care nu au nici un punct comun. Printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă cu aceasta. (formulare dată postulatului lui Euclid de către J. D. Gergonne). **2.** (În geometria neeuclidiană). Dreptele care separă secantele de nesecante. În geometria hiperbolică, printr-un punct exterior unei drepte se pot duce două paralele cu acesta, care coincid în cazul euclidian. În geometria eliptică nu există drepte paralele. Denumirea apare în scrierile lui Aristotel (sec. 4 î.e.n.), iar simbolul a fost propus de J. Kersey (1673) şi s-a generalizat datorită lui W. Jones (1706). *(V.B.)*

paralelipiped [gr. *para-allelon* „paralel", *epipedon* „suprafaţă"], prismă patrulateră cu feţele laterale opuse situate în plane paralele. — *Paralelipiped drept*, paralelipiped cu muchiile laterale perpendiculare pe planele bazelor. — *Paralelipiped dreptunghic*, paralelipiped cu baze şi feţele

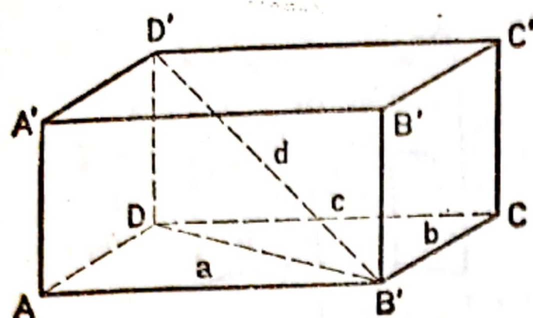


Fig. 115

laterale dreptunghiuri (fig. 115). Paralelipipedul dreptunghic are cele patru diagonale egale, lungimea lor fiind dată de relația stabilită de A. Savasorda și L.P. Fibonacci (sec. 12): $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$; volumul (cunoscut în Egiptul antic) și aria totală a paralelipipedului dreptunghic rezultă din formulele:

$$V = abc; \quad A_t = 2(ab + bc + ac),$$

unde a, b, c sînt lungimile muchiilor paralelipipedului. — *Paralelipiped oblic*, paralelipiped la care muchiile (laterale) sînt oblice față de planele bazelor. Denumirea apare inițial la Euclid (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

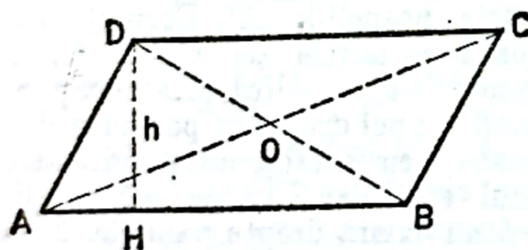


Fig. 116

paralelogram [gr. *para-allelon* „paralel", *gramma* „scriere, desen"], patrulater cu laturile opuse paralele (fig. 116). Aria unui paralelogram este egală cu produsul dintre o latură și înălțimea corespunzătoare ei. Termenul a fost introdus de Euclid (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

parametrii directori (ai unei drepte), coordonatele unui punct de pe dreaptă în raport cu un sistem de axe rectangulare, cu ajutorul cărora se determină direcția dreptei. *(V.B.)*

parametru [gr. *para* „alături", *metron* „măsură"], variabilă ce intervine în anumite ecuații (ecuații algebrice, ecuațiile unei familii de curbe sau suprafețe) și prin a cărei particularizare se obțin elementele familiei respective. Ex.: parametrul real λ în ecuația unui fascicul de drepte (denumire adoptată de G. Leibniz, 1692), parametrul real m în ecuațiile de gradul 2 : $x^2 - 2mx + m + 1 = 0$ (în această accepție termenul se datorează lui Cl. Mydorge, 1631). *(V.B.)*

partiție [lat. *partitio* „împărțire"] (a unei mulțimi A), mulțime formată din submulțimi ale lui A, disjuncte două cîte două și a căror reuniune este mulțimea A. Ex.: mulțimea claselor de echivalență generate de o relație de echivalență definită pe o mulțime A, formează o partiție a acesteia. *(V.B., A.B.)*

Pascal, Blaise (1623—1662), matematician, fizician și filozof francez. La 11 ani a scris o lucrare despre sunete și la 12 ani a reconstituit primele 32 de propoziții din cartea I-a a *Elementelor* lui Euclid. Prima lucrare publicată, *Essai sur les coniques* (1640), a stîrnit admirația matematicienilor contemporani (lucrarea conține teorema referitoare la exagonul înscris într-o conică). A inventat o mașină de calcul (1641). Din corespondența sa cu P. Fermat asupra unei probleme de joc de noroc s-a născut teoria probabilităților. Numele său este legat de triunghiul aritmetic ale cărui proprietăți le-a studiat în *Traité du triangle arithmetique* (tipărit postum, 1665). În ultima sa lucrare de matematică s-a ocupat de cicloidă. În domeniul fizicii, a dat legea fundamentală a hidrostaticii și a demonstrat experimental variația, în funcție de altitudine, a presiunii

atmosferice. În ultima parte a vieţii, retras la mănăstirea Port-Royal, de lîngă Paris, are preocupări filozofice. *(V.B.)*

patru [lat. *quattor*, termen format din cuvîntul sanscrit *catur* „a repartiza în grupe de cîte doi"], număr natural notat prin cifra 4 (folosită în Europa începînd cu sec. 15, ca transformare, datorită scrierii rapide, a unirii celor patru bare, în formă de cruce, –¦–, care reprezenta una dintre notaţiile numărului patru, de la care s-a ajuns la forma premergătoare notaţiei actuale); după sistemul roman, numărul patru se notează prin simbolul IV. *(V.B.)*

patrulater [*patru*, lat. *latus-eris* „latură"], poligon cu patru laturi. Aria unui patrulater este egală cu semiprodusul dintre cele două diagonale şi sinusul unghiului lor. — *Patrulater armonic*, patrulater inscriptibil la care produsul a două laturi opuse este egal cu produsul celorlalte două. Denumirea decurge din faptul că cele patru coarde care unesc un punct al cercului circumscris cu vîrfurile patrulaterului formează un fascicul armonic. — *Patrulater complet*, figură formată de laturile unui patrulater şi de prelungirile laturilor opuse pînă la intersecţia lor, avînd patru laturi: $\overline{ABF}$, $\overline{ADE}$, $\overline{BCE}$, $\overline{DCF}$, şase vîrfuri A, B, C, D, E, F, şi trei diagonale: AC, BD, EF (fig. 117). A fost studiat de L. Carnot (1803), căruia i se datorează denumirea, şi de J. Steiner (1827), dar proprietăţile sale armonice erau cunoscute încă de Apollonius (sec. 3 î.e.n.) şi Pappus (sec. 3). — *Patrulater inscriptibil*, patrulater pentru care există un cerc care să treacă prin cele patru vîrfuri ale lui. Patrulaterul inscriptibil are proprietăţile: unghiurile opuse sînt suplimentare; unghiul format de o latură cu o diagonală este egal cu unghiul format de latura opusă cu cealaltă diagonală; produsul diagonalelor este egal cu suma produselor laturilor opuse *(teorema lui Ptolemeu)*. Raza R a cercului circumscris, în funcţie de laturile a, b, c, d ale patrulaterului, este:

$$R^2 = \frac{(ab+cd)\,(ac+bd)\,(ad+bc)}{16(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)},$$

iar aria acestui patrulater se obţine prin formula (dată de Brahmagupta, sec. 6):

$$A = \sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)},$$

în care p este semiperimetrul patrulaterului inscriptibil. — *Patrulater ortodiagonal*, patrulater ale cărui diagonale sînt perpendiculare. — *Patrulater strîmb*, patrulater ale cărui vîrfuri nu sînt coplanare. Termenul patrulater apare în terminologia matematică românească într-un manuscris anonim (ms. III—11, Biblioteca Universităţii din Iaşi, 1820—1830) şi s-a statornicit datorită, mai ales, lui P. Poenaru (1837). *(V.B.)*

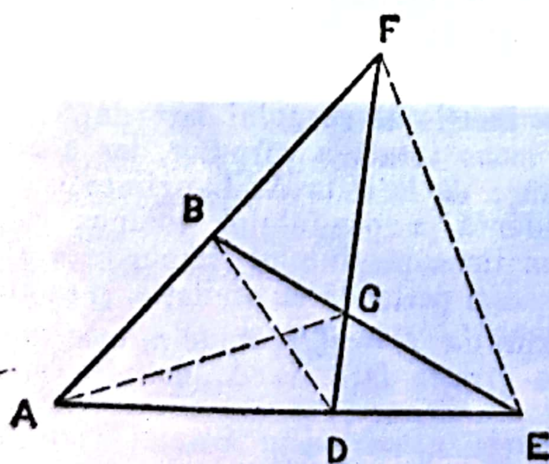


Fig. 117

pătrat [din numeralul *patru* — după lat. *quadratum*], patrulater cu laturile egale, care fac între ele unghiuri drepte. La un pătrat diagonalele sînt egale şi perpendiculare, reprezentînd bisectoarele unghiurilor lui, iar aria pătratului de latură l, este l^2. Denumirea a fost introdusă în

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Fig. 118

terminologia matematică românească de Gh. Lazăr (1821). *(V.B.)*

pătrat magic, tablou pătratic conținînd primele n^2 ($n \geqslant 3$) numere naturale dispuse pe n linii și n coloane, astfel încît suma numerelor de pe orice linie, suma numerelor de pe orice coloană, și sumele numerelor de pe fiecare dintre cele două diagonale să fie egale între ele: $S = \frac{n(n^2 + 1)}{2}$. De asemenea, pătrate magice pot fi construite numai cu numere prime. În fig. 118 este redat pătratul magic din gravura „Melancolia" a pictorului german A. Dürer; numerele din mijlocul liniei a patra formează anul în care a fost realizată gravura (1514). *(V.B.)*

Peano, Giuseppe (1858—1932), matematician, logician și lingvist italian. Profesor la Academia regală de artilerie și de geniu și la Universitatea din Torino. Întemeietorul aritmeticii axiomatice; s-a ocupat cu probleme de bază ale analizei matematice (ecuații diferențiale, teoria șirurilor, spații vectoriale, considerarea primului exemplu de curbă continuă, în sensul lui Jordan, care umple un pătrat). A creat un sistem de simboluri care permite enunțarea propozițiilor logicii și matematicii, fără a recurge la întrebuințarea limbajului obișnuit. Cercetări asupra unei limbi internaționale, raționale și ușor de învățat (al cărei vocabular era format din cuvinte comune limbilor latină, franceză, engleză și germană). I se datorează și fondarea a două periodice apreciate: *Rivista matematica* și *Fomulaire mathématique*. Op. pr.: *Le calcul géométrique selon l'Ausdenhungslehre de Grassmann*, 1889; *Arithmetices principia, nova methodo exposita*, 1889; *Lezzioni di analisi infinitesimale*, 1893; *Interlingua*, 1925—1927. *(V.B.)*

pendul [lat. *pendulus* „care atîrnă, suspendat"], sistem de puncte materiale sau de corpuri, care sub acțiunea forțelor exterioare poate executa mișcări oscilatorii în jurul unui punct fix sau al unei axe fixe. G. Galilei a făcut primele studii sistematice ale pendulului, iar Chr. Huygens a elaborat teoria pendulului compus, a preconizat folosirea lui la determinarea accelerației gravitaționale și a construit (1673) primul ceas cu pendul, la care oscilațiile erau întreținute prin căderea unei greutăți. *(Șt. G.)*

pendul compus, corp rigid care poate să oscileze în jurul unei axe fixe Δ, ce nu trece, în general, prin centrul maselor sale G, sub acțiunea forțelor exterioare. De obicei axa se ia orizontală, iar forța exterioară se datorează atracției Pămîntului. Perioada micilor oscilații în acest caz este $2\pi\sqrt{\frac{I_0}{Mgh}}$, unde I_0 e momentul de inerție al corpului față de Δ, M e masa totală a corpului, iar h distanța de la G la Δ. Lungimea echivalentă a pendulului compus este lungimea pendulului simplu care are aceeași perioadă de oscilație, și ea are expresia $L = r_0^2/h$, unde r_0 este raza de girație față de Δ, definită prin relația $r_0 = \sqrt{\frac{I_0}{M}}$. Se mai numește *pendul fizic*. *(Șt.G.)*





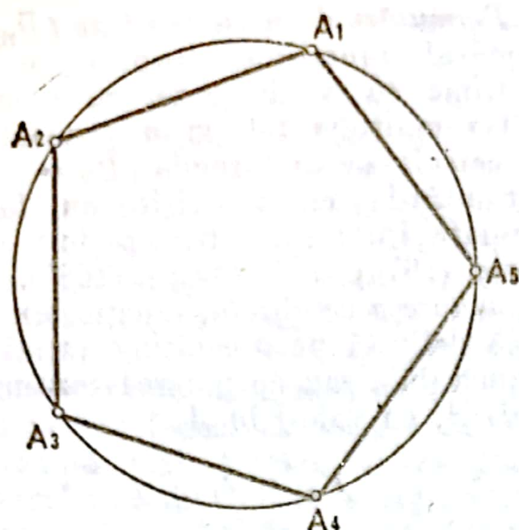


Fig. 119

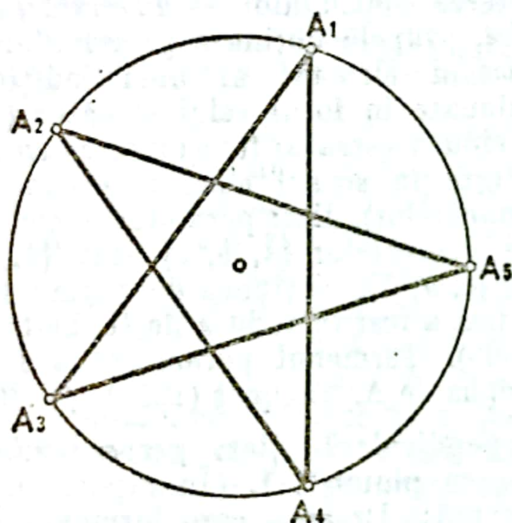


Fig. 120

pendul fizic → pendul compus

pendul matematic → pendul simplu

pendul simplu, un punct material suspendat de un punct printr-un fir inextensibil sau o bară, de greutăți neglijabile, de lungime *l*. Pentru micile oscilații, perioada este $2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$. Se mai numește *pendul matematic. (Șt.G.)*

pendulul inelar, pendul care constă dintr-un bloc metalic mărginit de două suprafețe cilindrice, circulare, coaxiale și de două plane perpendiculare pe axa de simetrie a corpului, care poate oscila în jurul unei generatoare orizontale. A fost construit de R. Voinaroschi și folosit în laboratorul de mecanică al Facultății de matematică-mecanică din București, pentru determinarea accelerației gravitaționale. *(Șt. G.)*

pendulul lui Foucault, pendul suspendat astfel încît planul său vertical de oscilație să se poată roti liber în jurul verticalei ce trece prin punctul de suspensie. Rotația este în sensul acelor unui ceasornic, în emisfera nordică, și în sens contrar, în emisfera sudică, viteza unghiulară fiind egală cu viteza unghiulară de rotație a Pămîntului datorită rotației zilnice, înmulțită cu sinusul latitudinei locului. *(Șt. G.)*

pendulul lui Mach, pendul fizic a cărui axă de suspensie este înclinată față de planul orizontal. *(Șt. G.)*

pentagon [gr. *pente* „cinci“, *gonia* „unghi“], poligon cu cinci laturi (fig. 119). Aria pentagonului regulat, în funcție de raza *R* a cercului circumscris, este:

$$A = \frac{5R^2}{8}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}},$$

iar latura și apotema lui sînt date de formulele:

$$l_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 - 2\sqrt{5}},$$

$$a_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5} + 1).$$

Denumirea este întîlnită la pitagoreici (sec. 6—4 î.e.n.). — *Pentagon stelat*, pentagon concav obținut prin unirea, din două în două, a vîrfurilor pentagonului (fig. 120). Latura pentagonului stelat regulat se determină cu formula:

$$l'_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10 + 2\sqrt{5}}.$$

Pentagonul stelat regulat era cunoscut de etrusci (sec. 6 î.e.n.) iar proprietățile sale au fost stabilite de școala lui Pitagora (sec. 6—4 î.e.n.). Se mai numește *pentagramă*. *(V.B.)*

perigeu [gr. *peri* „în jurul", *ge* „pămînt"], punctul cel mai apropiat de Pămînt al traiectoriei unui corp ceresc (de obicei Luna sau un satelit artificial). *(Șt. G.)*

perimetru [gr. *peri* „împrejur", *metron* „măsură"] (al unui poligon), suma lungimilor laturilor poligonului. În cazul triunghiului se folosește notația p pentru semiperimetru:

$$p = \frac{a+b+c}{2}.$$

Termenul a fost folosit inițial de Arhimede (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

perioadă [gr. *peri* „în jurul", *hodos* „drum"] **1.** (Pentru o fracție zecimală periodică). Grupul de cifre care se repetă indefinit. Ex.: fracția zecimală periodică 1,2345656... = 1,234 (56) are perioada 56. **2.** → *funcție periodică*. **3.** → *oscilație*. *(V.B.)*

permutare [lat. *permutare* „a muta unul față de altul"], funcție bijectivă, definită pe o mulțime finită A, cu valori de asemenea în A. Dacă $A = \{1, 2, ..., n\}$, o permutare se notează:

$$f = \begin{pmatrix} 1 & 2 \ldots n \\ i_1 & i_2 \ldots i_n \end{pmatrix}.$$

Mulțimea permutărilor unei mulțimi date formează un grup necomutativ față de operația de compunere a funcțiilor. — *Permutări de n* (P_n), numărul permutărilor unei mulțimi cu n elemente. Se calculează cu formula $P_n = n!$ (L. Gherșonide, 1321). — *Permutări de n cu repetiție* ($\bar{P}_n$), numărul funcțiilor definite pe o mulțime cu n elemente, cu valori într-o mulțime tot cu n elemente. Se calculează cu formula $\bar{P}_n = n^n$. Permutările cu repetiție au fost studiate inițial de B. Frenicle de Bessy (1676) și J. Wallis (1685). — *Permutare generalizată*, funcție biunivocă definită pe o mulțime infinită (numărabilă sau de puterea continuului) A, cu valori în A:

$$P_{\aleph_0} = c,$$

$$P_c = 2^c,$$

$\aleph_0$ fiind puterea numărabilului, iar c puterea continuului. — *Permutări ciclice*, grupele obținute prin mutarea fiecărui element al unei mulțimi ordonate în locul celui următor (ca și cînd acestea ar fi pe un cerc care se rotește în sensul adaptat ordonării elementelor). Ex.: permutările ciclice ale elementelor $\{a, b, c\}$ sînt $\{b, c, a\}$, $\{c, a, b\}$. Noțiunea de permutare ciclică a fost introdusă de G. Leibniz (1666). Termenul permutare a fost propus de A. Tacquet (1656). *(V.B.)*

perpendiculară [lat. *perpendiculum* „fir cu plumb"] **1.** (În raport cu o dreaptă). Dreaptă care formează cu dreapta dată unghiuri adiacente egale. Două drepte din spațiu sînt perpendiculare (chiar dacă nu sînt coplanare) dacă parelele duse la ele printr-un punct arbitrar formează un unghi drept. **2.** (În raport cu un plan). Dreaptă care este perpendiculară pe două drepte concurente din planul dat. Simbolul „$\perp$" folosit pentru a indica perpendicularitatea a fost introdus de P. Hérigone (1634). *(V.B.)*

perpetuum mobile, aparat care o dată pus în mișcare nu se mai oprește niciodată; în el energia cinetică se transformă în energie potențială și invers, suma lor rămînînd constantă. În limbajul obișnuit, prin perpetuum

mobile se înțelege un sistem închis care ar fi capabil să se mişte încontinuu, şi, în acelaşi timp, să efectueze un lucru mecanic util. S-au făcut numeroase încercări de a se realiza un perpetuum mobile, unele deosebit de ingenioase, toate soldate cu eşec, autorii lor necunoscînd în general efectul forțelor de frecare exterioare şi interioare sistemului construit; de asemenea, nu s-a avut în vedere faptul că energia calorică produsă prin frecări nu se poate transforma din nou în energie mecanică fără pierderi de energie. *(Şt. G.)*

perspectivă [lat. *per* „prin", *spectio-onis* „privire", „observare"], reprezentare a unui corp din spațiu pe o suprafață, de obicei plană, prin proiecție conică sau paralelă. *(V.B.)*

pi [denumirea literei greceşti π], simbolul numărului real care reprezintă raportul constant dintre lungimea unui cerc şi diametrul său. Este un număr transcendent (fapt demonstrat de F. Lindemann, 1882); J. Lambert (încă din 1767) a arătat că este irațional. Arhimede (sec. 3 î.e.n.), cu ajutorul unor poligoane regulate cu 96 de laturi, unul înscris în cerc şi altul circumscris cercului, a demonstrat inegalitatea:

$$3\frac{10}{71} < \pi < 3\frac{1}{7}.$$

F. Viète a calculat valoarea lui π cu nouă zecimale exacte şi a dat formula:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}} \cdot \sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}} \cdots$$

Alte formule pentru calculul lui π sînt:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$$

(G. Leibniz, 1673);

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^3 + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}\right)^5 + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^7 + \ldots,$$

cu ajutorul căreia I. Newton a calculat pe π cu 14 zecimale exacte;

$$\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{3^2 \cdot 5} - \frac{1}{3^3 \cdot 7} + \frac{1}{3^4 \cdot 9} - \ldots\right),$$

folosită de A. Sharp (1700) pentru a-i calcula 72 zecimale exacte, iar T. Lagny (1719), 127 zecimale exacte;

$$\frac{\pi}{4} = 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$$

(J. Machin, 1706),

cu ajutorul căreia W. Shanks (1873) a calculat 707 zecimale exacte. Simbolul „π" apare pentru prima dată la W. Jones (1706). Numărul π cu 10 zecimale este: 3,1415926535... *(V.B.)*

Picard, Emile (1856—1941), matematician francez. Profesor de analiză la Universitatea din Toulouse (unde publică o cunoscută revistă: *Annales scientifiques*) şi la Sorbona. Membru al Academiei de Ştiințe din Paris (şi secretar permanent) şi membru al Academiei Franceze; membru la peste 20 de academii străine (între care şi Academia Română). În analiza matematică, a aplicat metoda aproximațiilor succesive pentru a dovedi existența soluțiilor regulate ale ecuațiilor diferențiale; a introdus integralele diferențialelor totale (integralele Picard); a studiat ecuațiile diferen-

ţiale cu coeficienţii dublu periodici (ecuaţiile lui Picard). Lucrări în domeniul funcţiilor algebrice de două variabile şi în teoria ecuaţiilor integrale; a enunţat o teoremă celebră despre comportarea funcţiilor în vecinătatea unui punct singular esenţial (teorema lui Picard, 1879). Op. pr.: *Traité d'analyse*, 1891—1896; *Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendentes*, 1897 (în colab). *(V.B.)*

piramidă [gr. *pyramis*], corp mărginit de o suprafaţă piramidală (suprafaţa laterală) şi de planul care conţine directoarea ei (baza piramidei). Denumirile piramidelor sînt date de numele poligonului bazei: piramidă triunghiulară, piramidă patrulateră etc. Volumul piramidei este:

$$V = \frac{h \cdot B}{3},$$

unde h este înălţimea, iar B aria bazei (formula era cunoscută cel puţin cu 2 000 de ani î.e.n.). *Aria laterală* este aria suprafeţei laterale. — *Piramidă regulată*, piramidă avînd ca bază un poligon regulat şi a cărei înălţime (perpendiculara dusă din vîrf pe bază) trece prin centrul bazei (fig. 121). Aria laterală şi totală a

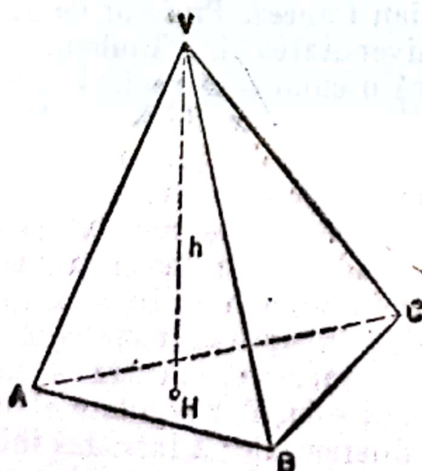


Fig. 121

piramidei regulată se determină prin formulele:

$$A_l = \frac{P \cdot A}{2},$$

$$A_t = \frac{P(A + a)}{2},$$

unde A, a sînt apotemele piramidei şi a bazei ei, iar P perimetrul bazei. Denumirea s-a impus în terminologia matematică datorită lui Platon şi Aristotel (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

Pitagora (c. 584 — c. 497 î.e.n.), matematician şi filozof grec. A întemeiat la Crotona (sudul Italiei de azi) şcoala pitagoreică, care a dăinuit pînă în jurul anului 350 î.e.n. Scrierile sale nu s-au păstrat. În şcoala pitagoreică s-au făcut descoperiri importante de aritmetică (noţiunile de număr prim şi compus, iraţionalitatea, contribuţii la teoria proporţiilor, media aritmetică, geometrică şi armonică, legată de legile consonanţei muzicale), geometrie (teorema lui Pitagora, poliedre regulate) şi astronomie (prima concepţie cosmologică care afirmă că Pămîntul se mişcă în jurul unui „foc central"). *(V.B.)*

pîrghie, corp solid cu un punct fix sau cu o axă fixă, asupra căruia acţionează, în general, două forţe ce se află într-un plan normal pe axa de rotaţie O a corpului şi nu întîlnesc această axă (fig. 122). O forţă (P), se numeşte forţă motoare iar cealaltă (Q), forţă rezistentă. În general ele sînt formate din bare drepte, cotite, sau curbe, sau din combinaţii de astfel de bare. După poziţia relativă a lui O faţă de P şi Q, se deosebesc trei cazuri: O între punctele de aplicaţie M şi N ale lui P şi, respectiv, Q (pîrghia de ordinul întîi), N între O şi M (pîrghia de ordinul al doilea) şi M între O şi

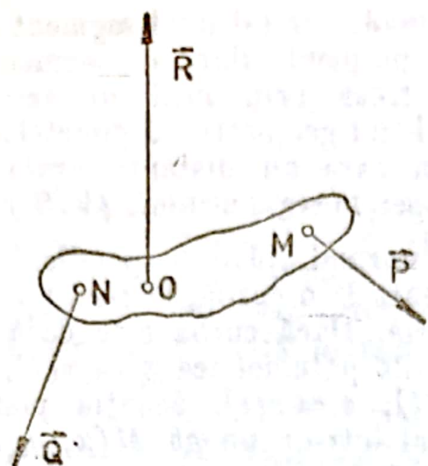


Fig. 122

N (pîrghia de ordinul al treilea). Pîrghiile sînt folosite la deplasarea unor greutăţi mari, la învingerea unor rezistenţe, în construcţia maşinilor sau la transmiterea şi transformarea mişcărilor. Pe o scară largă se utilizează sisteme de pîrghii articulate la balanţe, frîne etc. *(Şt.G.)*

plan [lat. *planus* „neted, plan"], noţiune fundamentală din geometrie. Faţă de un sistem cartezian ortogonal de coordonate, ecuaţia planului este de gradul întîi, în raport cu coordonatele:

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

(A.C. Clairaut, 1731).

Alte forme ale ecuaţiei planului sînt:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z - p = 0$$

(O. Hesse, 1861),

unde p este lungimea perpendicularei duse din origine pe plan, iar α, β, γ cosinusurile ei directoare;

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} - 1 = 0$$

(G. Lamé, 1818),

ecuaţia planului care taie axele în punctele $A(a, 0, 0)$ $B(0, b, 0)$, $C(0, 0, c)$;

$$\begin{vmatrix} x & y & z & 1 \\ x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

ecuaţia planului determinat de punctele necoliniare $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$;

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0,$$

ecuaţia planului determinat de dreptele concurente:

$$\frac{x - x_0}{l_1} = \frac{y - y_0}{m_1} = \frac{z - z_0}{n_1}$$

$$\frac{x - x_0}{l_2} = \frac{y - y_0}{m_2} = \frac{z - z_0}{n_2};$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x - x_2 & y - y_2 & z - z_2 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

ecuaţia planului determinat de dreptele paralele:

$$\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$$

$$\frac{x - x_2}{l} = \frac{y - y_2}{m} = \frac{z - z_2}{n};$$

$$\begin{vmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_1 - x_0 & y_1 - y_0 & z_1 - z_0 \\ l & m & n \end{vmatrix} = 0,$$

ecuaţia planului determinat de punctul $M(x_1, y_1, z_1)$ şi dreapta:

$$\frac{x - x_0}{l} = \frac{y - y_0}{m} = \frac{z - z_0}{n}. \quad (V.B.)$$

plan asimptot, plan asociat unei suprafețe cu puncte în domeniul de la infinit astfel încît, atunci cînd un punct se deplasează pe suprafață către domeniul de la infinit, distanța sa la plan tinde către zero. *(V.B.)*

plan bisector, plan care trece prin dreapta de intersecție a două plane, făcînd cu acestea unghiuri diedre egale (fig. 123). *(V.B.)*

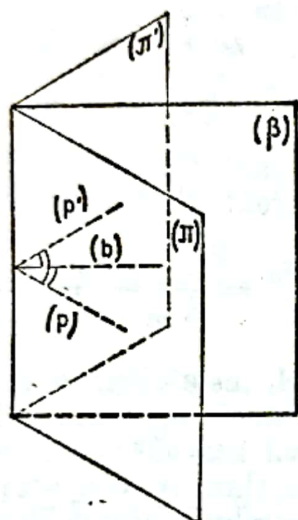


Fig. 123

plan diametral (al unei cuadrice), plan care conține un diametru al cuadricei. Locul geometric al mijloacelor coardelor de direcție dată într-o cuadrică este un plan diametral, numit plan diametral conjugat direcției date. Pentru cuadrica de ecuație $f(x, y, z) = 0$, planul diametral conjugat direcției date prin parametrii directori l, m, n are ecuația:

$$l\frac{\partial f}{\partial x} + m\frac{\partial f}{\partial y} + n\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (V.B.)$$

planimetrie, ramură a geometriei, cu caracter aplicativ, care se ocupă cu procedeele de determinare și măsurare a figurilor plane. *(V.B.)*

plan mediator (al unui segment AB), plan perpendicular pe segment, și care trece prin mijlocul acestuia. Este locul geometric al punctelor din spațiu care au distanțe egale față de capetele segmentului. *(V.B.)*

plan normal, plan perpendicular pe tangenta la o curbă, într-un punct al acesteia. Dacă curba este dată prin ecuațiile parametrice $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, ecuația planului normal într-un punct $M(x, y, z)$ al ei, este:

$$(X - x)x' + (Y - y)y' + (Z - z)z' = 0,$$

unde X, Y, Z sînt coordonatele unui punct curent al planului, iar x', y', z' au valorile în punctul dat M. Planul normal al unei curbe a fost pus în evidență de G. Monge (1771). *(V.B.)*

plan osculator [lat. *osculatus* „care atinge"] (al unei curbe strîmbe), limita planului care trece prin trei puncte vecine (M, M', M'') pe curbă, cînd punctele M', M'' tind către M. Pentru curba $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, ecuația planului osculator în punctul $M(x, y, z)$ este:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \end{vmatrix} = 0,$$

unde derivatele sînt luate în punctul M. *(V.B.)*

plan polar (al unui punct în raport cu o cuadrică), plan, loc geometric al punctelor conjugate armonic cu punctul dat în raport cu cuadrica. Ecuația planului polar al punctului $M(x_0, y_0, z_0)$ în raport cu cuadrica:

$$f(x, y, z) = a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33}z^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0$$

este:

$$x_0 \frac{\partial f}{\partial x} + y_0 \frac{\partial f}{\partial y} + z_0 \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \quad (V.B.)$$

plan radical (a două sfere), plan, loc geometric al punctelor din spațiu care au aceeași putere față de sferele date. Este un plan perpendicular pe linia centrelor. Ecuația planului radical al sferelor:

$$(S_1)\ x^2 + y^2 + z^2 - 2a_1x - 2b_1y - 2c_1z + d_1 = 0$$

$$(S_2)\ x^2 + y^2 + z^2 - 2a_2x - 2b_2y - 2c_2z + d_2 = 0$$

este:

$$(a_1 - a_2)x + (b_1 - b_2)y + (c_1 - c_2)z + \frac{d_1 + d_2}{2} = 0. \quad (V.B.)$$

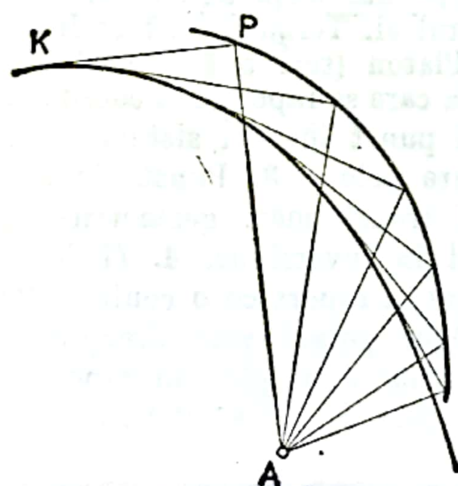


Fig. 124

plan tangent (la o suprafață), planul care conține tangentele, într-un punct dat al suprafeței, la toate curbele situate pe suprafață și care trec prin punctul considerat. Ecuația planului tangent suprafeței $f(x, y, z) = 0$ este:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(X - x) + \frac{\partial f}{\partial y}(Y - y) + \frac{\partial f}{\partial z}(Z - z) = 0,$$

iar pentru o suprafață dată prin ecuațiile parametrice $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$:

$$\begin{vmatrix} X - x & Y - y & Z - z \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix} = 0.$$

Aceste ecuații au fost date concomitent de Ch. Tinseau și G. Monge (1785). *(V.B.)*

planul de la infinit, mulțimea punctelor de la infinit ale dreptelor spațiului. În coordonate omogene, are ecuația $x_4 = 0$. *(N.M.)*

podară [gr. *pus-podus* „picior"] **1.** (Pentru o curbă, în raport cu un punct dat). Curbă plană, loc geometric al picioarelor perpendicularelor duse din punct pe tangentele la curba dată (fig. 124). Ecuația podarei unei curbe reprezentată de o ecuație de forma $f(x, y) = 0$, în raport cu un punct (x_0, y_0), se obține eliminînd pe x și y din relațiile:

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y = 0$$

$$(X - x_0)f'_y - (Y - y_0)f'_y = 0$$

$$f(x, y) = 0.$$

Ex.: podara parabolei $y^2 - 2px = 0$, în raport cu focarul ei este tangenta în vîrf a parabolei. Noțiunea de podară a fost introdusă de C. Maclaurin (1720), iar denumirea ei apare pentru prima dată la O. Terquem (1848). **2.** (Pentru o suprafață, în

raport cu un punct dat). Suprafață, loc geometric al picioarelor perpendicularelor duse din punctul dat pe planele tangente la suprafața considerată. Ecuația podarei unei suprafețe, dată prin ecuația $f(x, y, z) = 0$ în raport cu punctul (x_0, y_0, z_0), se obține eliminînd pe x, y, z, din relațiile:

$$(X - x)f'_x + (Y - y)f'_y + (Z - z)f'_z = 0$$

$$\frac{X - x_0}{f'_x} = \frac{Y - y_0}{f'_y} = \frac{Z - z_0}{f'_z}$$

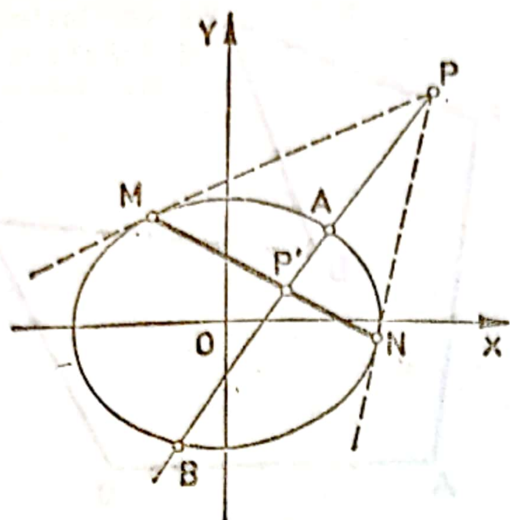
$$f(x, y, z) = 0.$$ *(V.B.)*

Poincaré [puăcare], **Henri** (1854—1912), matematician, mecanician, fizician și filozof francez. Profesor de fizică matematică și astronomie la Sorbona. Membru al Academiei de Științe din Paris, al Academiei Franceze și al altor 43 de academii și societăți franceze și străine (printre care și Academia Română). Contribuții valoroase privind teoria ecuațiilor diferențiale (a descoperit funcțiile „fuchsiene"), teoria grupurilor continue, teoria ecuațiilor integrale, teoria funcțiilor întregi (inegalitatea care-i poartă numele), teoria probabilităților. A creat teoria generală a determinanților infiniți. A propus un model al geometriei neeuclidiene de tip hiperbolic. A pus bazele topologiei combinatorii. Lucrări de astronomie, dinamică, fizică-matematică, teoria electromagnetică a luminii. A analizat ipotezele cosmogonice principale. Op. pr.: *Sur la théorie des fonctions fuchsiennes*, 1881; *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, 1905—1910; *Cours de physique mathématique*, 12 vol. 1889—1904; *Leçons sur les hypothèses cosmogonique*, 1911. *(V.B.)*

Poisson [puasǫ], **Siméon Denis** (1781—1840), matematician și mecanician francez. Profesor de mecanică la Sorbona. Membru al Academiei de Științe din Paris. S-a ocupat în special de fizica matematică și mecanica rațională, însă lucrările sale asupra invariabilității axelor mari ale planetelor, asupra distribuției electricității la suprafața corpurilor, a fenomenelor capilare, teoria matematică a căldurii etc. au adus perfecționări analizei matematice, privind îndeosebi calculul variațional, ecuațiile fizicii matematice. În domeniul teoriei probabilităților s-a ocupat de legea numerelor mari (căreia i-a dat și această denumire), de problemele de statistică și aplicațiile teoriei probabilităților (printre care și schema ce îi poartă numele). Op. pr.: *Traité de mécanique*, 1811; *Mémoires sur les surfaces élastique*, 1814; *Recherches sur la probabilité des jugements*, 1837. *(V.B.)*

pol [gr. *polos-polein* „a (se) învîrti"] **1.** Fiecare dintre cele două puncte de pe o sferă în care aceasta este intersectată de o axă ce trece prin centrul ei. Termenul a fost introdus de Platon (sec. 5 î.e.n.). **2.** Punct fix la care se raportează coordonatele unui punct într-un sistem de coordonate polare. **3.** Punct singular al unei transformări geometrice. Ex.: polul la inversiune. **4.** (Polul unei drepte în raport cu o conică). Punct a cărui polară este dreapta dată. **5.** (Polul unui plan în raport cu o cuadrică). Punct al cărui plan polar este planul considerat. *(V.B.)*

polară [lat. *polaris*], dreaptă, loc geometric al punctului conjugat armonic cu un punct dat (numit polul dreptei), în raport cu cele două puncte în care o secantă mobilă, ce trece prin punctul dat, intersectează o conică. Polara unui punct exterior față de o conică trece prin punctele de contact ale tangentelor duse din punct la conică



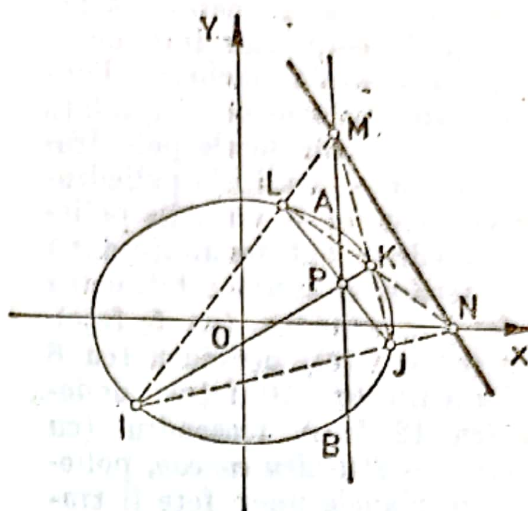


Fig. 125

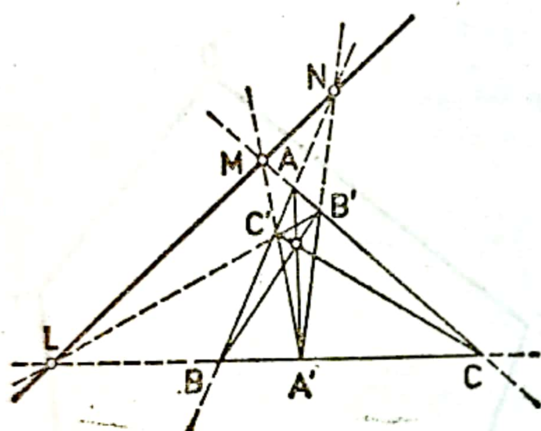


Fig. 126

(fig. 125); polara unui punct interior conicei este a treia diagonală (exterioară) a patrulaterului complet, format cu prelungirile, pînă la intersecţie, ale laturilor opuse ale patrulaterului ce are vîrfurile în extremităţile a două coarde duse prin punctul dat. Ex.: polara unui focar al unei conice este directoarea corespunzătoare focarului. Noţiunea de polară în raport cu o conică, apărută la Apollonius (sec. 3 î.e.n.) a fost amplu folosită de G. Desargues (1639), B. Pascal (1640), F. Lahire (1673) şi a fost extinsă la cuadrice de G. Monge. Denumirea a fost introdusă de J.D. Gergonne (1812). *(V.B.)*

polară triliniară (a unui punct P din planul unui triunghi), dreaptă pe care se găsesc cele trei puncte de concurenţă ale laturilor unui triunghi ABC cu laturile triunghiului pedal $A'B'C'$ corespunzător (fig. 126). *(V.B.)*

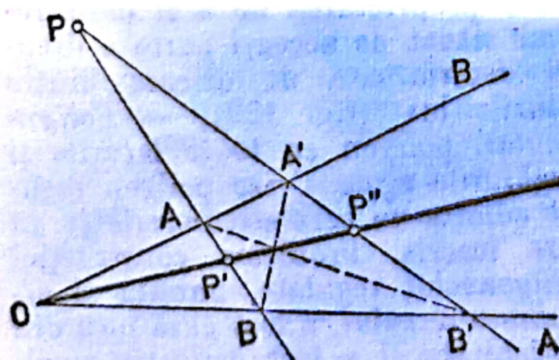


Fig. 127

polară unghiulară, dreaptă, loc geometric al punctului conjugat armonic cu un punct dat, în raport cu cele două puncte, în care o secantă mobilă, ce trece prin punctul dat, se intersectează cu laturile unui unghi. Polara unghiulară trece prin vîrful unghiului considerat (fig. 127). *(V.B.)*

poliedru [gr. *polys* „numeros", *hedra* „bază, faţă"], corp mărginit de o suprafaţă poliedrală închisă. Poligoanele care alcătuiesc suprafaţa poliedrală reprezintă feţele poliedrului, laturile lor — muchiile poliedrului, iar vîrfurile lor — vîrfurile poliedrului. Poliedrele sînt denumite după numărul feţelor şi anume: tetraedru (cu 4 feţe), pentaedru (cu 5 feţe), exaedru (cu 6 feţe), octaedru (cu 8 feţe), decaedru (cu 10 feţe), dodecaedru (cu 12 feţe), icosaedru (cu 20 de feţe). — *Poliedru concav*, poliedru pe care planele unor feţe îl traversează. — *Poliedru convex*, poliedru avînd proprietatea de a fi în întregime situat de aceeaşi parte a planului oricărei feţe. Pentru poliedrele convexe există relaţia:

$$f + v = m + 2,$$

unde f este numărul feţelor, v numărul vîrfurilor şi m numărul muchiilor. Această relaţie, descoperită de R. Descartes (1640), a fost demonstrată de L. Euler (1752). — *Poliedru regulat*, poliedru avînd toate feţele poligoane regulate şi toate unghiurile diedre egale. Există numai cinci poliedre convexe regulate: tetraedrul regulat, exaedrul regulat (cub), octaedrul regulat, dodecaedrul regulat, icosaedrul regulat, cunoscute încă de Pitagora (sec. 6 î.e.n.). Există patru poliedre concave regulate: două dodecaedre cu 12 vîrfuri, 30 de muchii şi feţele pentagoane (descoperite de J. Kepler, 1613), un dodecaedru cu 20 de vîrfuri, 30 de muchii şi feţele pentagoane şi un icosaedru cu 12 vîrfuri, 30 de muchii şi feţele unghiuri (introduse de L. Poinsot, 1810). *(V.B.)*

poligon [gr. *polys* „numeros", *gonia* „unghi"], figură geometrică plană formată de o linie frîntă închisă. Poligoanele sînt denumite după numărul laturilor şi anume: triunghi (cu 3 laturi), patrulater (cu 4 laturi), pentagon (cu 5 laturi), exagon (cu 6 laturi) etc. — *Poligon concav*, poligon la care dreptele determinate de unele laturi ale sale îl traversează (fig. 128). — *Poligon convex*, poligon avînd proprietatea de a fi în întregime situat de aceeaşi parte a dreptei determinate de oricare dintre laturile lui (fig. 129). — *Poligon regulat*, poligon cu toate laturile şi unghiurile egale. Orice poligon regulat admite un cerc circumscris şi un cerc înscris. Problema construcţiei poligoanelor regulate, numită şi *diviziunea cercului*, a fost pusă încă din antichitate şi a fost definitiv rezolvată de K. Gauss (1794), care a

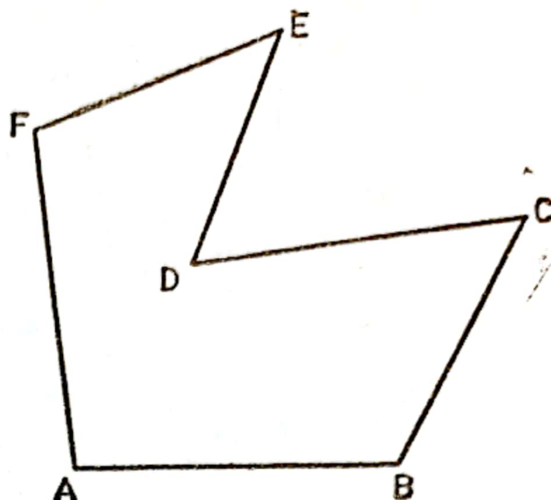


Fig. 128

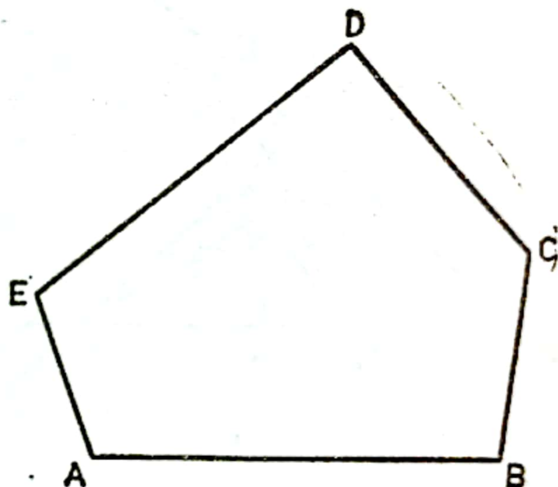


Fig. 129

demonstrat că un poligon regulat cu p laturi (cu p număr prim) este construibil cu rigla și compasul dacă:

$$p = 2^{2^n} + 1 \text{ (} n \text{ număr natural).}$$

Primele numere de această formă sînt: 3, 5, 17, 257, 65537; poligonul regulat cu 17 laturi a fost construit de K. Gauss. În general un poligon regulat cu n laturi este construibil dacă:

$$n = 2^k \left(2^{2^p} + 1\right) \left(2^{2^q} + 1\right) \dots \left(2^{2^s} + 1\right),$$

unde $k, p, q, \dots$, sînt numere naturale. Aria poligonului regulat cu n laturi, înscris în cercul cu raza R, este dată de formulele:

$$A = \frac{1}{2} nla = \frac{nR^2}{2} \sin \frac{2\pi}{n} = \frac{1}{4} nl^2 \operatorname{ctg} \frac{\pi}{n} = na^2 \operatorname{tg} \frac{\pi}{n},$$

unde l este latura poligonului, iar a apotema. Mărimea unghiurilor unui poligon regulat cu n laturi este:

$$u = 180° \cdot \frac{n-2}{n}.$$

Suma unghiurilor exterioare ale unui poligon este egală cu 4 unghiuri drepte. *(V.B.)*

polinom [gr. *polys* „multe“, *nomos* „parte, membru“], element al unui → *inel de polinoame*. — *Polinom de grad n într-o nedeterminată X* (cu coeficienți într-un inel A), expresia de forma:

$$P(X) = a_0 + a_1 X + a_2 X^2 + \dots + a_n X^n,$$

unde $a_0, a_1, \dots, a_n \in A$ și $a_n \neq 0$; conține, în general, $n + 1$ termeni. — *Polinom de grad n în m nedeterminate* $X_1, X_2, \dots, X_m$ (cu coeficienți într-un inel A), expresie de forma:

$$P(X_1, \dots, X_m) = a_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i X_i + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{m} a_{ij} X_i X_j + \dots + \sum_{\substack{i_1, \dots, i_n = 1 \\ i_1 \leqslant i_2 \leqslant \dots \leqslant i_n}}^{m} a_{i_1 i_2 \dots i_n} X_{i_1} \dots X_{i_n},$$

unde cel puțin un $a_{i_1 i_2 \dots i_n} \neq 0$. Numărul tuturor termenilor acestui polinom este dat de combinările cu repetiție a $m + 1$ elemente luate cîte n. Ex.:

$$P(x, y, z) = a_0 + a_1 x + a_2 y + a_3 z + a_{12} xy + a_{13} xz + a_{23} yz + a_{11} x^2 + a_{22} y^2 + a_{33} z^2.$$

— *Polinom simetric*, polinom $P(X_1, \dots, X_m)$ în m nedeterminate, care pentru orice permutare σ a mulțimii 1, 2, ..., m are proprietatea:

$$P(X_1, X_2, \dots, X_m) = P(X_{\sigma(1)}, X_{\sigma(2)}, \dots, X_{\sigma(m)}).$$

Orice polinom simetric poate fi scris ca un polinom în care nedeterminatele au fost înlocuite cu *polinoamele simetrice fundamentale*:

$$S_1 = X_1 + X_2 + \dots + X_m$$

$$S_2 = X_1 X_2 + X_1 X_3 + \dots + X_1 X_m + X_2 X_3 + \dots + X_{m-1} X_m$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$S_m = X_1 X_2 \dots X_m.$$

Pentru $m = 2$, polinoamele simetrice fundamentale sînt: $S = X_1 + X_2$ și $P = X_1X_2$. — *Polinom omogen*, polinom în mai multe nedeterminate, cu toți termenii de același grad. Numărul complet de termeni este egal cu numărul combinărilor cu repetiție a m elemente luate cîte n (m fiind numărul nedeterminatelor, n gradul polinomului). Denumirea își are originea în *Elementele* lui Euclid (sec. 3 î.e.n.), fiind adoptată în sensul algebrei clasice în 1691. *(A.B., V.B.)*

polinomul de interpolare a lui Lagrange → interpolare

polinomul lui Taylor → formula lui Taylor

Pompeiu, Dimitrie (1873—1954), matematician român. Studii la Paris (doctor la Sorbona, 1905). Profesor la Universitatea din Iași (din 1907), București (din 1912); concomitent la Universitatea din Cluj (din 1919) și la Politehnica din București (din 1929). Academician (din 1934). Doctor honoris causa al Universității din Varșovia. Profesor agregat la Sorbona. Primul director al Institutului de matematică al Academiei (înființat în 1949). Lucrările sale se referă la teoria funcțiilor, calculul funcțional, mecanica rațională. Referitor la funcțiile de variabilă complexă, a introdus noțiunea de derivată areolară și a definit o clasă importantă de funcții care îi poartă azi numele. Autor al unei foarte cunoscute teoreme de geometrie elementară. Op. pr.: *Sur la continuité des fonctions de variables complexes*, 1905. *(V.B.)*

Poncelet [pŏslę], **Jean Victor** (1788—1867), matematician francez. Profesor la Metz, la Facultatea de Științe din Paris și la Școala Politehnică. Membru al Academiei de Științe din Paris. Creatorul geometriei proiective. A creat noțiunea de clasă a curbelor algebrice, a enunțat teoreme de geometrie elementară. Numele său este legat de numeroase invenții tehnice: întrebuințarea roților hidraulice cu palete curbe și folosirea podului mobil cu contragreutate variabilă, dinamometrul ce-i poartă numele. A introdus kilogram-metrul ca unitate de lucru mecanic (termenul de lucru mecanic fiind propus de el). Op. pr.: *Traité des propriétés projectives des figures*, 1822; *Cours de mécanique appliqué aux machines*, 1827; *Introduction à la mécanique industrielle ou expérimentale*, 1829. *(V.B.)*

Popoviciu, Tiberiu (n. 1906), matematician român. Studii la Universitatea din București și la Paris (doctor la Sorbona, 1933). Profesor la Universitatea din Iași (agregat din 1942) și la Cluj (titular din 1946). Membru al Academiei R.S. România (din 1963, membru corespondent din 1948). Membru la Société mathématique de France. Director al Institutului de Calcul din Cluj; conduce revista „Mathematica" (din Cluj). Cercetări în domeniul analizei matematice (a introdus noțiunea de funcție convexă de ordin superior), al analizei numerice, al algebrei și teoriei numerelor. Op. pr.: *Sur quelques propriétés des fonctions d'une ou de deux variables réelles*, 1933; *Delimitarea erorilor de calcul în interpolarea prin polinoame și aplicații la derivarea și integrarea numerică*, 1965. *(V.B.)*

populație statistică, orice colectivitate care face obiectul unui studiu statistic. Întrucît orice studiu statis-

tic vizează stabilirea legii cantitative urmate de o anumită caracteristică a colectivității, o populație statistică poate fi privită ca mulțime a tuturor valorilor posibile ale unei variabile aleatoare. Repartiția acestei variabile aleatoare este denumită, în mod curent, repartiția teoretică a populației statistice. *(A.Ș.)*

postulatul paralelelor [lat. *postulatum* „cerință"], axiomă ce figurează în *Elementele* lui Euclid (sec. 3 î.e.n.), echivalentă cu enunțul, formulat de J.D. Gergonne, „printr-un punct exterior unei drepte se poate duce o singură paralelă la aceasta". Încercările (peste 200 la număr) de a-l demonstra pe baza celorlalte axiome au eșuat, postulatul paralelelor dovedindu-se independent, ceea ce a condus la apariția geometriilor neeuclidiene (N. Lobacevski, 1829; J. Bolyai, 1831). *(V.B.)*

potențial → gradient

potențial cinetic → funcția lui Lagrange

prelungire (a funcției $f: E \to F$ la mulțimea A, $A \supset E$), funcție $\bar{f}: A \to F$, astfel încît $\bar{f}(x) = f(x)$, pentru $x \in E$. *(V.B.)*

premisă [lat. *praemissus* „pus înainte, anterior"] → **teoremă**

primitivă [lat. *primitivus* „cel dintîi"] (a unei funcții f), funcție F, astfel încît $F' = f$. Dacă F este o primitivă a lui f atunci și $F + C$, $C \in \mathbf{R}$, este o primitivă a lui f, iar orice primitivă a lui f este de această formă. *(V.B.)*

principiul acțiunii și reacțiunii: acțiunea este întotdeauna egală și opusă cu reacțiunea, adică acțiunile a două corpuri, unul asupra celuilalt, sînt totdeauna egale și de sensuri contrare. A fost formulat de I. Newton *(Șt.G.)*

principiul condițiilor inițiale: mișcarea unui punct material este determinată prin cunoașterea poziției lui inițiale și a vitezei lui inițiale. Aceasta înseamnă a da la momentul inițial pe $\mathbf{r}$ și $\dot{\mathbf{r}}$. *(Șt.G.)*

principiul conservării energiei: energia unui sistem e constantă, dacă lucrul mecanic al forțelor exterioare care lucrează asupra sistemului este nul. A fost enunțat de Hermann von Helmholtz. *(Șt.G.)*

principiul forțelor de legătură → axioma eliberării

principiul inerției: un punct material asupra căruia nu acționează nici o forță rămîne veșnic în repaus față de un sistem de referință fix, dacă se găsește în această stare la un moment dat, sau se mișcă rectiliniu și uniform față de același sistem, dacă la momentul considerat se află în mișcare față de sistemul ales. În 1951, Victor Vâlcovici a arătat că, dacă sistemul de ecuații diferențiale ale mișcării admite mai multe soluții, prin folosirea principiului inerției putem degaja soluția care convine problemei și nu este corect a se considera că principiul inerției este o consecință a legii a doua a lui Newton, deoarece ele sînt ireductibile. *(Șt.G.)*

principiul lucrului mecanic virtual: suma tuturor lucrurilor mecanice virtuale a sistemului de puncte materiale, corespunzătoare forțelor de legătură pentru orice deplasare elementară virtuală, compatibilă cu legăturile, este nulă. Toate forțele de legătură care acționează asupra unui punct $P_j (j = 1, 2, ..., n)$ sînt înlocuite cu o forță unică, reprezentată prin vectorul $\mathbf{R}_j$; acest principiu se exprimă prin relația: $\sum_{1}^{n} \mathbf{R}_j \cdot \delta \mathbf{r}_j = 0$.

Principiul exclude legăturile în care apare frecarea. În cazuri particulare, principiul a fost enunțat și (sau) folo-

sit de mai mulţi mecanicieni, dar formularea generală a fost dată de Jean Bernoulli într-o scrisoare adresată la 26.01.1717 lui P. Varignon. *(Şt.G.)*

principiul lui D'Alembert (sub forma dată de Lagrange): în cazul legăturilor fără frecare, pentru toate deplasările virtuale *(δM*$_j$*)*, compatibile cu legăturile, mişcarea unui sistem de puncte materiale este astfel încît, în orice moment, $\sum_{j=1}^{n} (\mathbf{F}_j - m_j \mathbf{a}_j) \cdot \delta \mathbf{r}_j = 0$. *(Şt.G.)*

principiul lui Toricelli: pentru un sistem de puncte materiale supus acţiunii gravitaţiei, poziţiile sale de echilibru sînt acelea pentru care cota centrului de greutate, faţă de un plan orizontal, arbitrar ales, considerată ca o funcţie de parametrii geometrici independenţi ce definesc poziţia sistemului, este maximă sau minimă. Din acest principiu, J. Lagrange a arătat că se poate deduce principiul deplasărilor virtuale. *(Şt.G.)*

principiul paralelogramului forţelor: acţiunea unui sistem de două forţe $\mathbf{F}_1$ şi $\mathbf{F}_2$, aplicate în acelaşi punct *A*, al unui corp material, este echivalentă cu acţiunea unei singure forţe, aplicată tot în *A*, al cărei vector reprezentativ este suma vectorilor $\mathbf{F}_1$ şi $\mathbf{F}_2$. Acest principiu, cunoscut din antichitate, a fost precizat de S. Stevin, I. Newton şi P. Varignon. *(V.B., Şt.G.)*

principiul relativităţii al lui Galilei: aceleaşi legi mecanice sînt valabile în sistemele de referinţă animate de mişcări uniforme şi rectilinii. *(Şt.G.)*

prismatoid [gr. *prisma* „prismă", *eidos* „aspect"], poliedru cu două feţe poligoane oarecare, paralele (numite baze), iar celelalte feţe sînt triunghiuri, trapeze sau paralelograme (fig. 130). *(V.B.)*

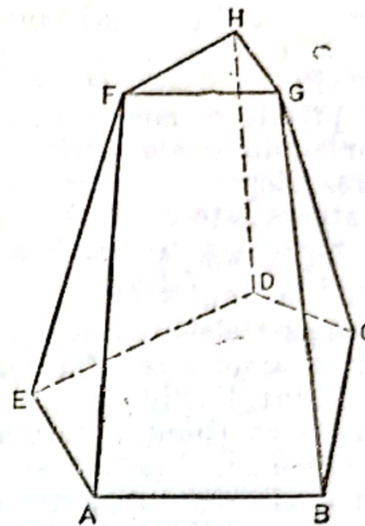


Fig. 130

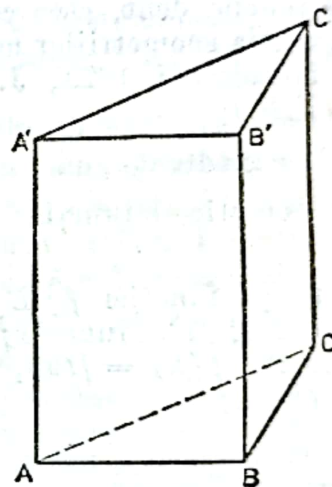


Fig. 131

prismă [gr. *prisma*], corp mărginit de o suprafaţă prismatică (suprafaţă laterală a prismei) şi de două plane paralele (bazele prismei), care intersectează generatoarele suprafeţei prismatice. Prismele sînt denumite după felul poligonului de bază: prismă triunghiulară (cu bazele triunghiuri), prismă patrulateră (cu bazele patrulatere) etc. Aria suprafeţei laterale a prismei se numeşte *arie laterală*. Volumul prismei se calculează cu formula:

$$V = B \cdot h,$$

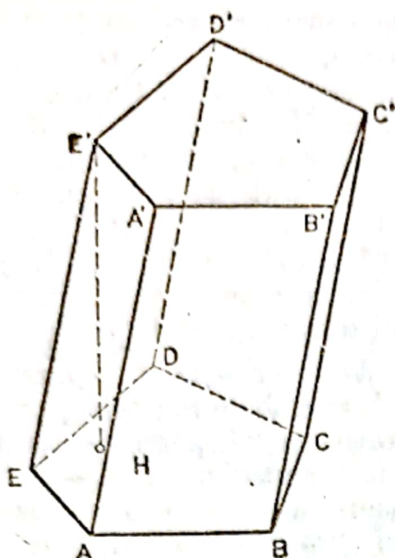


Fig. 132

unde B este aria poligonului de bază şi h înălţimea prismei (distanţa dintre planele bazelor). — *Prismă dreaptă*, prismă ale cărei muchii laterale sînt perpendiculare pe planele bazelor (fig. 131). Aria laterală a prismei drepte se obţine prin relaţia:

$$A_l = P \cdot h,$$

unde P este perimetrul poligonului de bază. — *Prismă oblică*, prismă ale cărei muchii laterale sînt oblice faţă de planele bazelor (fig. 132). Denumirea apare la Euclid (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

probabilitate [lat. *probabilitas-tis* „verosimilitate"], funcţie definită pe K, unde $\{\Omega, K\}$ este un cîmp de evenimente, avînd proprietăţile:

a) $P(\Omega) = 1$;

b) $P(A) \geqslant 0$, pentru orice eveniment A;

c) $P(\bigcup_{i \in I} A_i) = \sum_{i \in I} P(A_i)$, dacă

$A_i \cap A_j = \emptyset, \quad i \neq j, \quad i, j \in I.$

În cazul unui cîmp de evenimente finit, cu evenimente elementare echiprobabile, probabilitatea unui eveniment poate fi calculată după aşa-numita „definiţie clasică a probabilităţii":

$$P(A) = \frac{\text{numărul cazurilor favorabile}}{\text{numărul cazurilor posibile}}$$

(Jacques Bernoulli, 1705).

Probabilitatea oricărui eveniment aleator este un număr nenegativ, subunitar. Evenimentului imposibil i se atribuie probabilitatea 0, iar evenimentului sigur, probabilitatea 1. În cazul cîmpurilor finite de probabilitate, singurul eveniment cu probabilitatea 0 este evenimentul imposibil şi singurul eveniment cu probabilitatea 1 este evenimentul sigur. Nu acelaşi lucru se întîmplă în cadrul cîmpurilor de probabilitate infinite. Definiţia axiomatică a probabilităţii a fost formulată iniţial de A.N. Kolmogorov (1933). *(V.B., A.Ş.)*

probabilitate condiţionată, probabilitate definită pe un cîmp de evenimente $\{\Omega, K\}$, cu ajutorul unei probabilităţi date P, conform egalităţii:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}, \text{ pentru orice}$$

$A \in K$ ($B \in K$ fixat, cu $P(B) > 0$). $P(A \mid B)$ (sau $P_B(A)$) reprezintă probabilitatea de realizare a evenimentului A în condiţiile în care realizarea evenimentului B este certă. — *Probabilitatea posteriorică*, probabilitate condiţionată de forma $P(A \mid B)$, în care evenimentul A se poate realiza într-o fază a experienţei anterioară (în timp) celei în care se poate realiza B. Noţiunea a fost introdusă de Jacques Bernoulli (1700). *(A.Ş.)*

probabilităţi de trecere → **lanţ Markov**

probă [lat. *proba* „verificare, dovadă"] **1.** Metodă prin care se constată justeţea unui calcul. — *Proba prin nouă*, probă bazată pe faptul că res-

tul obţinut la împărţirea cu 9 a oricărui număr întreg este egal cu restul împărţirii cu 9 a sumei cifrelor lui (rest numit, după propunerea lui L.P. Fibonacci, *număr de probă*, sau mai scurt, *probă*), astfel că, de exemplu, la înmulţirea a două numere, proba produsului trebuie să fie egală cu proba produsului probelor factorilor (asemenea propoziţii existînd, corespunzător, şi pentru alte operaţii: împărţire, ridicare la putere şi extragerea rădăcinii). Egalitatea probelor considerate este o condiţie necesară dar nu şi suficientă ca o operaţie să fie corectă, deoarece, dacă proba unui rezultat greşit diferă de proba rezultatului corect printr-un multiplu de 9, incorectitudinea nu este sesizată. Proba prin nouă era cunoscută de matematicienii indieni (Arryabbata II, sec. 10), iar prin intermediul arabilor această metodă ajunge în Europa, fiind studiată de L.P. Fibonacci (1202), N. Chuquet (1484) şi L. Pacioli (1494). **2.** → *experienţă aleatoare*. **3.** (Pentru un aliaj) → *titlu*. *(V.B.)*

problema brahistrocronelor, problema determinării curbelor C, care unesc două puncte date A_0 şi A_1, astfel încît un punct material, supus unui cîmp de forţe conservativ, care se poate mişca fără frecare pe C, să descrie arcul A_0A_1 într-un interval de timp minim. Problema a condus la numeroase cercetări. L. Euler a arătat că reacţiunea curbei este dirijată după normala principală, are sensul opus componentei normale F_n a forţei şi intensitatea egală cu $2F_n$, iar Haton de la Goupilliere a tratat cazul unui sistem de forţe ce depind de viteză şi a considerat şi problema inversă. *(Şt.G.)*

problema celor 2 corpuri, problemă care constă în determinarea mişcării (într-o primă aproximaţie) a două corpuri care se atrag după legea atracţiei universale a lui Newton. Corpurile se consideră reduse la 2 puncte materiale, care au fiecare masa totală a corpului respectiv. Unul dintre ele, de masă M, se numeşte de obicei centru atractiv, iar celălalt, de masă m (în general $m <$ şi chiar $\ll M$) capătă denumirea de satelit. Mişcarea relativă a satelitului faţă de centrul atractiv, care se ia ca origine a vectorului de poziţie r a satelitului, este descrisă de ecuaţia $\ddot{\mathbf{r}} + K\mathbf{r}r^{-3} = 0$, unde $K = f(M + m)$ este parametrul gravitaţional al perechii de puncte materiale considerate (f — constanta atracţiei universale). Din rezolvarea acestei probleme rezultă legile lui Kepler. În problema reală a mişcării unui satelit în jurul Pămîntului trebuie să se ia în consideraţie o mulţime de alţi factori ca nesfericitatea Pămîntului, distribuţia maselor sale, rezistenţa întîmpinată la mişcarea prin atmosferă şi influenţa presiunii de radiaţie. *(Şt.G.)*

problema celor n corpuri, problemă care constă în determinarea mişcării unui sistem de $n \geqslant 3$ puncte materiale libere, care se atrag reciproc după legea atracţiei universale, cînd se dau condiţii iniţiale arbitrare. Problema a fost enunţată de I. Newton şi a apărut în legătură cu necesitatea de a se studia mişcarea planetelor în jurul Soarelui, în particular, a Pămîntului şi a Lunei. Pentru $n = 3$ (problema celor 3 corpuri), primul rezultat a fost dat de L. Euler (1765), care a considerat că punctele materiale se găsesc pe o linie dreaptă, iar dacă raportul distanţelor punctelor extreme la punctul central este constant, soluţia se exprimă sub formă finită prin funcţii elementare. J. Lagrange (1772) a redus ordinul sistemului de ecuaţii diferenţiale şi a considerat mişcarea plană, dînd soluţia exactă în două cazuri: a) la momentul iniţial cele trei puncte se găsesc pe o dreaptă, condiţiile iniţiale satisfăcînd anumite relaţii; b) la momentul ini-

ţial punctele se găsesc în vîrfurile unui triunghi echilateral şi vitezele lor relative au anumite valori la acelaşi moment. De la sfîrşitul secolului 18 şi pînă astăzi, un număr mare de cercetători au dedicat lucrări problemei celor *n* corpuri, atît în cazul atracţiei universale, cît şi pentru alte expresii ale forţei de interacţiune şi, printre ei, amintim pe: P. Laplace, D. Poisson, S. Newcomb, W. Hill, A.M. Liapunov, E.J. Routh, H. Poincaré, H. Bruns, K. Sundman, P. Painlevé, J. Chazy, I.D. Sokolov. C. Jacobi a enunţat şi a studiat pentru prima oară problema restrînsă a celor 3 corpuri, pe care, admiţînd tot legea atracţiei universale, a formulat-o astfel: 2 corpuri *A* şi *B* se mişcă pe traiectorii circulare în jurul centrului lor de masă *O*; al treilea corp *C* se găseşte sub acţiunea lui *A* şi *B*, dar nu influenţează mişcarea acestora, găsindu-se tot timpul în planul mişcării lui *A* şi *B*; să se găsească mişcarea lui *C*. Problema are o mare însemnătate pentru determinarea mişcării micilor planete. În 1900, F.R. Moulton a arătat că există o configuraţie rectilinie în problema celor *n* corpuri, iar în 1932 Mac Millan şi W. Bartky au analizat detaliat configuraţiile permanente în problema celor 4 corpuri. În 1950, cu ajutorul maşinilor de calcul, s-a considerat problema mişcării a 6 corpuri (Soarele, Jupiter, Saturn, Uranus, Neptun şi Pluton), determinîndu-se coordonatele acestora între anii 1650 şi 2060. În ţara noastră s-au ocupat de problema celor *n* corpuri Spiru Haret care, în teza sa de doctorat susţinută la Sorbona, în 1878, cu titlul *Sur l'invariabilité des grands axes des orbites planétaires*, aduce o contribuţie importantă la problema stabilităţii sistemului planetar şi C. Drîmbă care şi-a susţinut, tot la Sorbona, în 1940, teza cu titlul *Sur le singularités réelles et imaginaires dans le problème des trois corps*, în care obţine rezultate relative la problema ciocnirii duble sau triple între corpurile sistemului. *(Şt.G.)*

problema colorării hărţilor: cu cel mult patru culori se poate colora orice hartă, astfel ca oricare două regiuni vecine să fie colorate distinct. Problema este astăzi nerezolvată teoretic, demonstrîndu-se numai că cinci culori sînt suficiente pentru a colora o hartă în condiţiile impuse de enunţ, dar practica dovedeşte că sînt suficiente patru. Printre cercetătorii problemei se numără A. Möbius (1840), A. de Morgan (1850), A. Cayley (1878). *(V.B.)*

problema delică → dublarea cubului

problema lui Bertrand, problema determinării forţei centrale care acţionează asupra unui punct material *P*, ce se mişcă într-un mediu lipsit de frecare, astfel încît *P* să descrie o traiectorie închisă, cînd forţa depinde numai de distanţa de la *P* la centrul atractiv. Problema e verificată numai de forţa elastică şi forţa atracţiei universale. Problema a fost studiată de J. Bertrand (1873). *(Şt.G.)*

problema lui Euler şi Saladini: pe ce curbă, într-un plan vertical, trebuie să se mişte un punct material greu *P*, astfel încît, dacă acesta se găseşte la momentul iniţial fără viteză în *O*, să ajungă într-un punct oarecare *M* al curbei, în acelaşi interval de timp în care din poziţia iniţială *P* ar ajunge în *M*, urmînd coarda *OM*. Neglijîndu-se frecările, curba care răspunde problemei este lemniscata. O. Bonnet a arătat că proprietatea se păstrează dacă, în cazul lemniscatei, se înlocuieşte acţiunea cîmpului gravitaţional printr-o forţă elastică atractivă, nulă în *O*. *(Şt.G.)*

problema mişcărilor tautocrone: să se determine curbele *C* care au proprietatea că un punct material *P*, obligat să se mişte fără frecare pe *C*,

sub acţiunea unei forţe **F** ce depinde numai de poziţia lui P, descrie orice arc OM_0, M_0 fiind poziţia iniţială în care viteza lui P este nulă, iar O punctul de tautocronism, în acelaşi interval de timp. În cazul unui punct material greu, se arată că cicloida are proprietatea de tautocronism. Acestei probleme, diverselor ei generalizări, precum şi inversei ei i-au fost consacrate multe studii. În ţara noastră s-au ocupat în special Th. Angheluţă, D.V. Ionescu, M. Ghermănescu şi R. Bădescu. *(Şt.G.)*

procent [lat. *pro* „la, pentru", *centum* „sută"] (p%), raportul dintre un număr şi 100. Noţiunea, reprezentînd o evaluare raportată la sută, este folosită în obţinerea datelor comparative în economie, demografie, operaţii financiare etc. *(V.B.)*

proces stochastic [lat. *processus* „şir, serie", gr. *stokhastikos* „presupus"], familie de variabile aleatoare $\{x_t, t \in T\}$, definite pe un acelaşi cîmp de probabilitate $\{\Omega, K, P\}$, unde T (mulţimea parametrilor) este o mulţime discretă (eventual finită) sau continuă. Mulţimea stărilor procesului este mulţimea I a numerelor reale, i, pentru care există cel puţin un $t \in T$, cu proprietatea:

$$P(X_t = i) > 0.$$

Pentru orice eveniment elementar $\omega \in \Omega$, aplicaţia $t \to X_t(\omega)$, de la T în **R**, se numeşte traiectorie a procesului. După axiomatizarea teoriei probabilităţilor, studiul proceselor stochastice a cunoscut o mare extindere, constituindu-se o teorie închegată, foarte bogată în rezultate. Intuitiv, un proces stochastic este un proces temporal, guvernat de legi probabilistice. Deoarece modele de acest tip se întîlnesc foarte frecvent în fenomenele naturale sau sociale, teoria proceselor stochastice a generat o serie de aplicaţii foarte valoroase în multe ramuri ale ştiinţei. *(A.Ş.)*

produs [lat. *productus*] **1.** → *înmulţire*. **2.** Simbolul Π folosit pentru scrierea prescurtată a unor produse. Ex.:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = a_1 \cdot a_2 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Simbolul „Π" a fost introdus cu această semnificaţie de K. Gauss (1812). *(V.B.)*

produs cartezian (a două mulţimi M, N; $M \times N$), mulţimea perechilor ordonate de forma (x, y), unde $x \in M$ şi $y \in N$. Produsul cartezian nu este comutativ: $M \times N \neq N \times M$. Produsul cartezian a n mulţimi M_1, M_2, ..., M_n (în această ordine) este format din toate grupele $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ de n elemente, în care $x_1 \in M_1$, $x_2 \in M_2$, ..., $x_n \in M_n$ şi se notează: $M_1 \times M_2 \times \ldots \times M_n$. Produsul cartezian $M \times M \times \ldots \times M$ al celor n factori egali se notează M^n. Ex.: pentru $M = \{a, b\}$ şi $N = \{1, 2, 3\}$ produsul lor cartezian este: $M \times N = \{(a, 1), (a, 2), (a, 3), (b, 1), (b, 2), (b, 3)\}$; pentru $X = \{$mulţimea absciselor axei $Ox\}$, $Y = \{$mulţimea ordonatelor axei $Oy\}$, $Z = \{$mulţimea cotelor axei $Oz\}$, rezultă: $X \times Y \times Z = \{$mulţimea punctelor spaţiului tridimensional$\}$. Noţiunea a fost introdusă de G. Cantor; denumirea (ca şi simbolul acestei operaţii „$\times$") fiind justificată de relaţia:

$$\text{card } (M \times N) = \text{card } M \cdot \text{card } N.$$

(V.B.)

produs mixt → **calcul vectorial**

produs scalar ($< x, y >$), operaţie definită pe un spaţiu vectorial real V, cu valori numere reale, $< , > : V \times V \to \mathbf{R}$, avînd proprietăţile:

a) $< x, x > \geqslant 0$ şi $< x, x > = 0$, dacă şi numai dacă $x = 0$;

b) $< x, y > = < y, x >$;

c) $< x + x', y > = < x, y > + < x', y >$;

d) $< ax, y > = a < x, y >$, pentru orice $a \in \mathbb{R}$.

Ex.: dacă $V = \mathbb{R}^n$, funcţia $<x,y> = x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n$, unde $x = (x_1, \ldots, x_n)$ şi $y = (y_1, \ldots, y_n)$ este un produs scalar. Dacă V este spaţiul vectorial al funcţiilor continue pe un interval $[a, b]$, operaţia $< f, g > = \int_a^b f(x)\, g(x)\, dx$ este un produs scalar. Unui produs scalar i se asociază o normă ($\| \|$) pe V definită prin $\| x \| = \sqrt{< x, x >}$; deci şi o distanţă pe V, definită prin $d(x, y) = \| x - y \|$. Din axiomele produsului scalar se deduce simplu inegalitatea Cauchy —Buneakovski — Schwartz:

$$|< x, y >| \leqslant \| x \| \, \| y \|.$$

Pentru exemplele de mai sus această inegalitate devine:

$$(\sum_i x_iy_i)^2 \leqslant (\sum_i x_i^2)\ (\sum_i y_i^2),$$

respectiv $$\left| \int_a^b f(x)g(x)\ dx \right| \leqslant \leqslant \sqrt{\int_a^b f^2(x)\ dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x)\ dx} \cdot$$

De aici rezultă inegalitatea triunghiului: $d(x, y) \leqslant d(x, z) + d(z, y)$. Operaţia generalizează produsul scalar definit pentru vectori (→ *vector*). *(A.B.)*

produs vectorial → **vector**

program, secvenţă de instrucţiuni într-un limbaj de programare, care descrie, în mod formalizat, structura procedurilor prin care se rezolvă o problemă dată, precum şi structura informaţiilor ce apar ca date ale problemei sau ca rezultate ale procesului de prelucrare. Programul memorat constituie metoda de dirijare de către om a calculatorului electronic. — *Program obiect*, program scris în limbajul calculatorului, obţinut prin acţiunea unui program de translatare asupra programului sursă. Introdus în memorie, el provoacă modificări în starea circuitelor calculatorului, în conformitate cu algoritmul problemei de rezolvat. — *Program sursă*, program scris într-un limbaj simbolic şi memorat pe un mediu accesibil calculatorului (cartele perforate, bandă magnetică etc.). Un exemplu de program (scris în limbaj FORTRAN) pentru calculul sumei a două matrici este dat în fig. 133. *(T.B.)*

programare matematică, ramură a matematicilor aplicate cuprinzînd principiile teoretice şi metodele numerice de rezolvare a problemelor de optimizare (de aflare a extremurilor) a unor funcţii (funcţii-obiectiv) ale căror variabile satisfac un sistem de relaţii restrictive (ce exprimă legătura dintre ele şi condiţiile impuse de posibilităţile procesului studiat). — *Programare liniară*, programare matematică în care funcţia-obiectiv este liniară, iar legăturile impuse variabilelor se exprimă, de asemenea, prin egalităţi sau inegalităţi liniare. Programarea liniară este ramura cea mai răspîndită a programării matematice, problemele care se pot rezolva cu ajutorul acesteia fiind cele mai numeroase. De ex. planificarea optimă a producţiei pe sortimente a unei întreprinderi, astfel încît beneficiul să fie maxim; planificarea optimă a transporturilor bunurilor de consum de la locurile de fabricaţie la locurile de desfacere, astfel încît cheltuielile transporturilor să fie minime; studierea gradului de solicitare a maşinilor; studiul nutri-

Comentariu (1 Nr. 5)	Continuare (6)	Instrucţiuni (7 … 72)	Marcaj (73 … 80)
		DIMENSION A(1ØØ,2Ø), B(1ØØ,2Ø C(1ØØ 2Ø)	
C		PROGRAMUL CALCULEAZĂ SUMA MATRICILOR A ŞI B DE DIMENSIUNE 1ØØ X 2Ø.	
C		REZULTATUL ESTE MATRICEA C CU ACEEAŞI DIMENSIUNE.	
C		SE CITESC MATRICILE A SI B.	
		READ(1,1Ø) A,B	
1Ø		FORMAT(2ØF4.1)	
C		SE EFECTUEAZĂ ADUNAREA	
		DO 11 I=1,1ØØ	
		DO 11 J=1,2Ø	
11		C(I,J)=A(I,J) + B(I,J)	
C		SE TIPĂRESC REZULTATELE	
		DO 12 I=1,1ØØ	
12		WRITE(3,13) (C(I,J),J=1,2Ø)	
13		FORMAT(1H ,2Ø(2X, F6.1))	
		STOP	
		END	

Fig. 133

ției etc., programarea liniară aducînd un aport deosebit în economie, planificare, în tehnica sistemelor automate ș.a. Programarea liniară are o apariție recentă; bazele ei au fost puse de L.V. Kantorovici (1940). La perfecționarea metodelor programării matematice au contribuit, mai cu seamă, G. Dantzig (1948), J. Egerváry (1959), iar la noi O. Onicescu, Gh. Mihoc ș.a. — *Programare neliniară*, programare în care funcția-obiectiv și restricțiile impuse variabilelor nu sînt liniare. — *Programare stochastică*, programare matematică în care cel puțin o parte din coeficienții funcției-obiectiv sau ai relațiilor variabilelor sînt variabile aleatoare. — *Programare dinamică*, programarea la care pentru fiecare etapă a procesului considerat se ia o decizie în funcție de starea din etapa respectivă (caracterizată matematic prin anumite valori ale unor parametri), astfel încît rezultatul final să fie optim. *(V.B.)*

progresie aritmetică $(\div a_1, a_2, \ldots, a_n)$, succesiune de numere (termenii progresiei) în care fiecare termen, cu excepția primului, se obține din precedentul prin adăugarea unei constante r (numită *rație*):

$$a_{k+1} = a_k + r, \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Într-o progresie aritmetică fiecare termen (cu excepția primului și a ultimului) este media aritmetică a vecinilor săi:

$$a_k = \frac{a_{k-1} + a_{k+1}}{2}, \quad k = 2, \ldots, n-1.$$

Între termenii unei progresii aritmetice există relațiile:

$$a_k = a_1 + (k-1)r, \quad k = 2, \ldots, n.$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{(a_1 + a_n)n}{2}.$$

Ex.: suma primelor n numere naturale (care formează o progresie aritmetică cu rația 1) este $S_n = 1 + 2 \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}$.

Notația a fost propusă de W. Oughtred *(Clavis mathematicae,* 1693). *(V.B.)*

progresie armonică $(\div\div a_1, a_2, \ldots, a_n)$, succesiune finită de numere formată prin inversarea termenilor unei progresii aritmetice. Fiecare termen, cu excepția primului și a ultimului, este media armonică a vecinilor lui. Termenul al n-lea este dat de formula:

$$a_n = \frac{a_1 \cdot r}{(n-1)a_1 + r},$$

unde r este rația progresiei aritmetice. Ex.: $\div\div 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots, \frac{1}{n}$.

Notația progresiei armonice a fost propusă de W. Oughtred (1693). *(V.B.)*

progresie geometrică $(\div\div a_1, a_2, \ldots, a_n)$, succesiune finită de numere (termenii progresiei) în care fiecare termen, cu excepția primului, se obține din precedentul prin înmulțirea cu o constantă r (numită *rație*)

$$a_{k+1} = r \cdot a_k \quad k = 1, \ldots, n-1.$$

Într-o progresie geometrică fiecare termen (cu excepția primului și a ultimului) este media geometrică a termenilor alăturați:

$$a_k^2 = a_{k-1} \cdot a_{k+1} \quad k = 2, \ldots, n-1.$$

Între termenii unei progresii geometrice există relațiile:

$$a_k = r^{k-1} a_1 \quad k = 2, \ldots, n;$$

$$S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n = \frac{a_1(1-r^n)}{1-r}.$$

Ex.: $\div\div$ $1, x, x^2, ..., x^n$; $S_n = 1 + x + x^2 + ... + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}$.

Ca și la celelalte progresii numerice, notația „$\div\div$" a fost introdusă de W. Oughtred (1693). *(V.B.)*

proiecție [lat. *proiectio* „aruncare înainte"] **1.** Operație geometrică de reprezentare a unei figuri plane sau spațiale, pe o dreaptă, pe un plan, pe o suprafață, ca intersecție a acestora cu proiectantele tuturor punctelor figurii. — *Proiecție cilindrică*, proiecția realizată cu drepte de direcție dată (numite *proiectante*). Proiecția cilindrică pe un plan poate fi ortogonală sau oblică după cum proiectantele sînt perpendiculare sau oblice față de plan. Se mai numește *proiecție paralelă*. — *Proiecție conică*, proiecție realizată cu drepte (numite *proiectante*) ce trec printr-un punct fix (numit *centru de proiecție*). Se mai numește *proiecție centrală*. — *Proiecție cartografică*, procedeu matematic de reprezentare în plan a suprafeței terestre (sau o porțiune a ei), în care fiecărui punct de pe glob îi corespunde un punct determinat din planul de proiecție. Suprafața Pămîntului se aproximează printr-un elipsoid de rotație, însă, atît acesta cît și sfera, nefiind suprafețe desfășurabile, fac ca reprezentarea în plan a globului terestru să sufere deformații de unghiuri, lungimi, arii. Pentru întocmirea hărților se folosesc rețele cartografice constituite din imaginile în plan ale meridianelor și paralelelor suprafeței terestre. Proiecțiile cartografice se clasifică după caracterul deformațiilor și după aspectul rețelei cartografice; astfel în prima categorie intră: a) *Proiecție conformă*, proiecție care păstrează nedeformate unghiurile. Este folosită la întocmirea hărților pentru navigația marină, a hărților topografice militare. b) *Proiecție echivalentă*, proiecție care păstrează nedeformate ariile. Este utilizată la întocmirea hărților comunicațiilor, a hărților cadastrale ș.a. c) *Proiecție arbitrară*, proiecție care deformează atît unghiurile cît și suprafețele. Cea mai frecvent folosită la întocmirea hărților geografice este *proiecția echidistantă*, la care modulul de deformație liniară pe una dintre direcțiile principale este constant. Din categoria proiecțiilor caracterizate după aspectul rețelei cartografice fac parte: a) *Proiecție perspectivă*, proiecție în care punctul de vedere din care este privită suprafața de reprezentat se află pe diametrul perpendicular pe planul de proiecție; b) *Proiecție stereografică*, proiecție în care punctul de vedere se află chiar pe suprafața terestră de reprezentat. Descoperirea acestei proiecții este atribuită lui Hiparh (sec. 2 î.e.n.), și a fost folosită de Cl. Ptolemeu (sec.2) în planisfera sa. Denumirea a fost propusă de P. Aquillon (1713). *(V.B.)*

promilă [lat. *pro* „pentru, la", *milia* „mie"] (p‰), raport al cărui numitor este 1 000. Se utilizează mai ales în demografie. Ex. natalitatea în 1965, în țara noastră, a fost de 14,6‰. *(V.B.)*

proporție [lat. *proportio*], egalitate a două rapoarte $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, termenii a și d, numindu-se *extremi*, iar b și c, *mezi*. Proprietatea fundamentală a proporțiilor se exprimă prin relația:

$$a \cdot d = b \cdot c.$$

Proporțiile au fost cunoscute din antichitate de egipteni, de la care au trecut la greci, fiind studiate de Eudoxos (sec. 4 î.e.n.) și, mai ales, de Euclid (sec. 3 î.e.n.). Notația proporției sub forma $a : b = c : d$ se datorează lui G. Leibniz (1684). *(V.B.)*

proprietatea lui Darboux, proprietate a unei funcții reale, de variabilă

reală, de a transforma un interval oarecare tot într-un interval. Funcțiile continue au proprietatea lui Darboux. *(V.B.)*

pseudosferă [gr. *pseudos* „fals", *sphaira* „sferă"], suprafață de rotație generată de o tractrice care se rotește în jurul asimptotei ei (fig. 134). Pseudosfera are curbura constantă și negativă, ceea ce explică denumirea sa. E. Beltrami (1868) a demonstrat că geometria intrinsecă a pseudosferei este neeuclidiană. Pseudosfera a fost descoperită de F.A. Minding (1838). *(V.B.)*

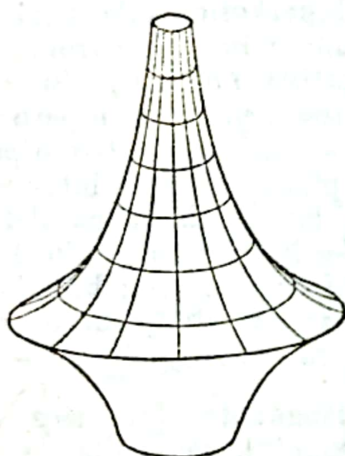


Fig. 134

Ptolemeu (Claudios Ptolomaios) (c. 85—168), astronom și geograf grec. Și-a desfășurat activitatea la Alexandria. Cea mai importantă lucrare a sa este o culegere de 13 cărți, cunoscută sub titlul arab *Almagest*, în care sînt expuse cunoștințele de astronomie din acele timpuri, precum și sistemul său geocentric (lucrarea conține elemente de trigonometrie plană și sferică, diviziunea cercului în 360 de părți egale și exprimarea acestora în fracțiuni sexagesimale). În *Analemma* și *Planisferium* dă teoria proiecției ortogonale a sferei cerești și, respectiv, proiecția stereografică. A întocmit cataloage de stele. În lucrarea *Geografia* apare ideea utilizării coordonatelor (geografice), iar în *Optica* sînt expuse teoria oglinzilor și teoria refracției luminii. *(V.B.)*

pulsație → **oscilație**

punct [lat. *punctum* „înțepătură"], noțiune fundamentală din geometrie. Se notează cu litere majuscule (K. Reye, 1866). *(V.B.)*

punct aderent (al unei mulțimi A, într-un spațiu topologic), punct x cu proprietatea că orice vecinătate a sa conține un punct din A. Mulțimea punctelor aderente unei mulțimi A se numește *aderența (închiderea)* mulțimii A și se notează $\bar{A}$. *(A.B.)*

punct circular (al unei suprafețe), punct în care razele principale de curbură sînt egale. Studiul acestor puncte a fost făcut de F. Dupin (1813). Se mai numește *punct ombilical*. *(V.B.)*

punct de acumulare [lat. *accumulare* „a strînge"] (al unei mulțimi, într-un spațiu topologic), punct x avînd proprietatea că, pentru orice vecinătate V_x a lui, mulțimea $V_x - \{x\}$ conține un punct din mulțime. Noțiunea a fost introdusă de G. Cantor (1872). *(V.B.)*

punct de contact [lat. *con* „cu, împreună", *tactus* „atingere"] (de ordinul n), punct de intersecție a două curbe, $y_1 = f_1(x)$, $y_2 = f_2(x)$, în care derivatele lor pînă la ordinul n au valori egale: $f_1(x_0) = f_2(x_0)$, $f_1^{(i)}(x_0) = f_2^{(i)}(x_0)$, $i = 1, \ldots, n$. Într-un punct de contact de ordinul unu curbele au aceeași tangentă. Într-un punct de contact de ordinul doi curbele au aceeași tangentă și aceeași rază de curbură. *(V.B.)*

punct de extrem (local, al unei funcții f), punct de minim sau de maxim al funcției f. Considerarea punctelor de extrem ale unei funcții se întîlnește inițial la P. Fermat (1639). *(V.B.)*

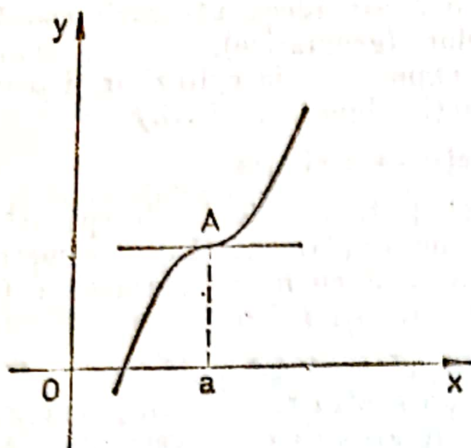


Fig. 135

punct de inflexiune [lat. *inflexio-onis* „îndoitură"] (al unei curbe), punct în care tangenta traversează curba (fig. 135). Într-un punct de inflexiune al curbei $y = f(x)$, derivata a doua se anulează, $f''(x_0) = 0$. Studiul punctelor de inflexiune a fost inițiat de P. Fermat (1638). *(V.B.)*

punct de întoarcere (al unei curbe algebrice), punct dublu în care cele două semitangente sînt confundate. Ex.: originea reperului la cardioida $\rho = a(1 + \cos\theta)$ este un punct de întoarcere. Denumirea a fost introdusă de Jean Bernoulli (1691). *(V.B.)*

punct de maxim (local, al unei funcții f), punct M din domeniul de definiție al unei funcții reale de argument real, cu proprietatea că există o vecinătate U a sa, astfel încît $f(M) \geqslant f(x)$, pentru orice $x \in U \cap I$, unde I este intervalul pe care este definită funcția. *(V.B.)*

punct de minim (local, al unei funcții f), punct m din domeniul de definiție al unei funcții reale de argument real, cu proprietatea că există o vecinătate U a lui, astfel încît $f(m) \leqslant f(x)$, pentru orice $x \in U \cap I$, unde I este intervalul pe care este definită funcția. *(V.B.)*

puncte ciclice → **elemente imaginare**

puncte conciclice [lat. *con* „împreună", gr. *kyklos* „cerc"], puncte care aparțin aceluiași cerc. Denumirea a fost introdusă de geometrii englezi (sec. 18). *(V.B.)*

puncte eliptice (ale unei suprafețe), puncte în care curbura totală este pozitivă $(K > 0)$. Suprafețele care au toate punctele eliptice se numesc suprafețe de tip eliptic, deoarece planul tangent într-unul din punctele lor, deplasat paralel cu el însuși, le intersectează după curbe de gen elipsă. Ex.: elipsoidul, paraboloidul eliptic, hiperboloidul cu două pînze, sfera. *(V.B.)*

puncte hiperbolice (ale unei suprafețe), puncte în care curbura totală este negativă $(K < 0)$. Suprafețele care au toate punctele hiperbolice se numesc suprafețe de tip hiperbolic întrucît planul tangent într-unul din punctele lor, deplasat paralel cu el însuși, le intersectează după curbe de gen hiperbolă. Ex.: hiperboloidul cu o pînză, paraboloidul hiperbolic, pseudosfera. *(V.B.)*

puncte isogonale [gr. *isos* „egal", *gonia* „unghi"], perechile de puncte determinate într-un triunghi de trei ceviene concurente și, respectiv, de isogonalele acestora. Ex.: ortocentrul H și centrul O al cercului circumscris triunghiului (fig. 136). Denumirea a fost propusă de J. Neuberg. *(V.B.)*

punctele euleriene, cele trei puncte situate pe înălțimile unui triunghi, la egală distanță de ortocentru și de fiecare vîrf. Denumirea a fost dată de F.G.M. (1882) în cinstea lui L. Euler, care le-a considerat în cercul celor nouă puncte. *(V.B.)*

punctele lui Brocard, cele două puncte de intersecție (Ω_1 și respectiv Ω_2) ale cercurilor adjuncte (AB), (BC), (CA), și respectiv, (BA), (CB), (AC) (fig. 137). Notarea punctelor

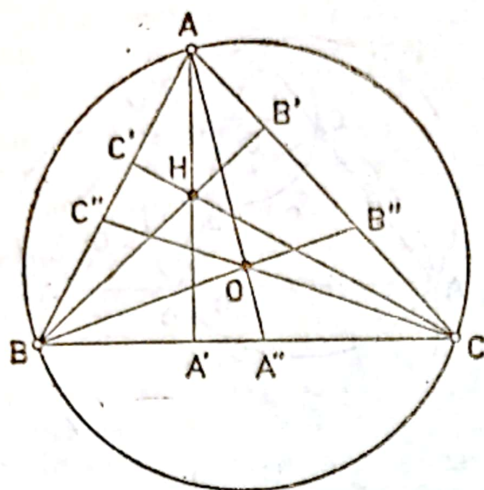


Fig. 136

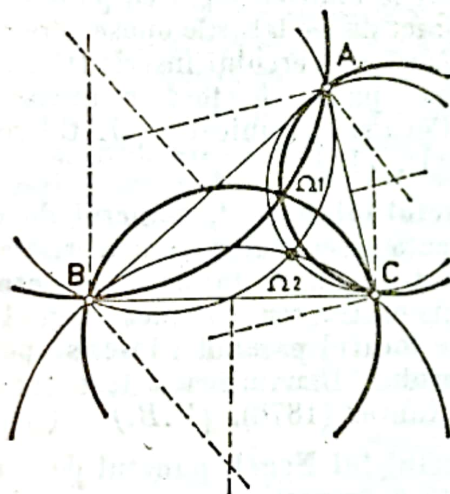


Fig. 137

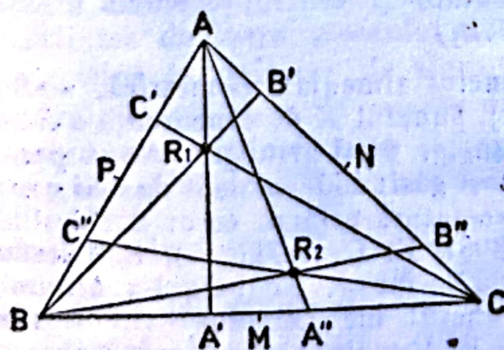


Fig. 138

lui Brocard prin litera grecească „Ω" a fost propusă de A. Emmerich (1891). *(V.B.)*

puncte parabolice (ale unei suprafețe), puncte în care curbura totală este nulă ($K = 0$). Suprafețele care au toate punctele parabolice se numesc suprafețe de tip parabolic. Ex.: planul, suprafețele desfășurabile. *(V.B.)*

puncte reciproce [lat. *reciprocus* „care inversează"], puncte de concurență a trei ceviene ale unui triunghi și a dreptelor isotomice (fig. 138). Au fost considerate inițial de G. Longchamps. *(V.B.)*

punct izolat (al unei curbe algebrice), punct dublu pentru care cele două tangente sînt imaginare. De ex.: originea, pentru cercul de rază nulă $x^2 + y^2 = 0$, sau pentru curba $x^2 + y^2 = x^2y^2$ (curba cruce). *(V.B.)*

punct material, corp de dimensiuni neglijabile, fie în comparație cu distanțele la alte corpuri, fie în comparație cu dimensiunile altor corpuri materiale cu care corpul dat interacționează astfel încît poziția lui să poată fi definită prin vectorul de poziție al unuia din punctele sale. Astfel, în mișcarea planetelor în jurul Soarelui se poate considera că masele Soarelui și ale planetelor sînt concentrate în centrele lor de masă respective. Pentru Pămînt, raportul distanței de la centrul său pînă la centrul Soarelui, față de diametrul său, este mai mare decît 11700, astfel încît pentru un observator așezat în centrul Soarelui, Pămîntul apare ca și o sferă de diametrul 1 cm, al cărui centru se află la o distanță de peste 117 m. Pentru Uranus raportul menționat este mai mare ca 54900. *(Șt.G.)*

punct multiplu de ordinul n (al unei curbe algebrice), punct singular în care există *n* tangente la curbă. Dacă

$n = 2$, se numește *punct dublu*, dacă $n = 3$, *punct triplu*. Ex.: originea este un punct dublu pentru curba $x^3 + y^3 = 3axy$ (foliul lui Descartes), cu tangentele $x = 0$, $y = 0$; originea este punct triplu la scifoidă: $x^4 - y^4 = 4x^2y$ și punct cvadruplu la cvadrifoliu:

$$(x^2 + y^2)^3 = 4a^2x^2y^2. \quad (V.B.)$$

punct ombilical → punct circular

punct ordinar (al unei curbe algebrice), punct în care tangenta la curbă este bine determinată. *(V.B.)*

punct singular (al unei curbe algebrice), punct care nu este punct ordinar. Pentru curba $f(x, y) = 0$, coordonatele unui punct singular se obțin prin rezolvarea sistemului:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad f = 0.$$

Noțiunea a fost introdusă de A. Cauchy (1837). *(V.B.)*

punctul de la infinit (al unei drepte), punctul a cărui distanță la o origine dată pe dreaptă, tinde către infinit. Are coordonatele omogene $(x_1, x_2, 0)$. *(N.M.)*

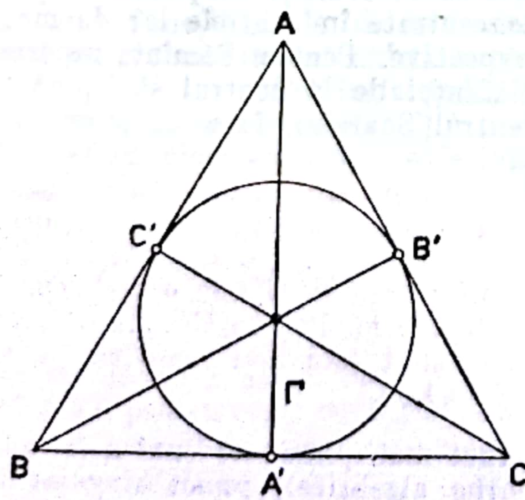


Fig. 139

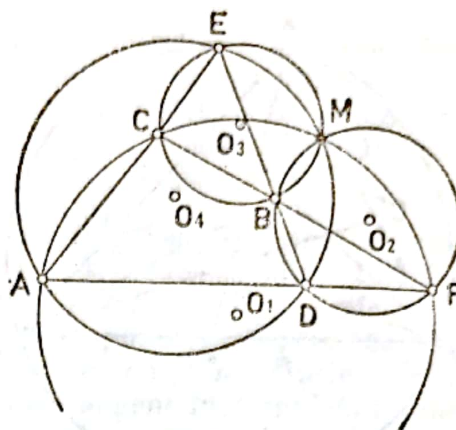


Fig. 140

punctul lui Gergonne, punctul de concurență a dreptelor care unesc vîrfurile unui triunghi cu punctele de contact de pe laturile opuse corespunzătoare ale cercului înscris (fig. 139). Acest punct a fost semnalat de G. Ceva și comunicat de J. Gergonne (1811). *(V.B.)*

punctul lui Miquel, punctul de concurență a cercurilor circumscrise celor trei triunghiuri formate de laturile unui patrulater complet (fig. 140). Este focarul parabolei înscrisă patrulaterului. Denumirea a fost dată de S. Kantor (1878). *(V.B.)*

punctul lui Nagel, punctul de concurență a dreptelor care unesc vîrfurile unui triunghi cu punctele de contact ale cercurilor exînscrise de pe laturile opuse corespunzătoare. Punctul lui Nagel este coliniar cu centrul de greutate și centrul cercului înscris. *(V.B.)*

punctul simedian [*si*metrică, *media*nă], punctul K de concurență a simedianelor unui triunghi. Acest punct a fost găsit independent de mai mulți cercetători printre care: S. Lhullier (1809), E. Grebe (1847), E. Catalan (1852), iar J. Neuberg l-a denumit „punctul lui Lemoine" (în cinstea lui E. Lemoine, care a arătat importanța acestuia într-un studiu ce a

inițiat geometria triunghiului, 1873). Notația cu litera K a fost propusă de R. Emmerich (1891). *(V.B.)*

punct unghiular (al unei curbe), punct în care curba are două semitangente distincte (fig. 141). *(V.B.)*

putere [lat. *potentia*] *(a^n)*, produsul a n factori egali $(n \in \mathbb{N})$: $a \cdot a \cdot \ldots \cdot a = a^n$, unde a se numește *bază*, iar n exponent (→ *exponent*). Notarea puterii cu ajutorul bazei și exponentului se întîlnește la Diofant (sec. 3), dar considerarea operației de ridicare la putere este mult mai veche (milen. 2 î.e.n.). Operațiile cu puteri, exceptînd înmulțirea puterilor cu aceeași bază (cunoscută de Euclid sec. 3 î.e.n.), au căpătat formulările actuale la matematicienii arabi (sec. 9—11). Prin contribuțiile lui F. Viète (1593), W. Oughtred (1631) și mai ales ale lui T. Harriot (1631) și R. Descartes (1637) s-a ajuns la notarea simbolică actuală. Ridicarea la putere (a cincea operație algebrică) a fost denumită, mai acceptabil, „exponențiere" de J. Bourget. Terminologia în uz a fost formată în antichitate; astfel, Hipocrate (sec. 5 î.e.n.) folosea expresia „segment în putere" pentru a denumi pătratul unui segment. *(V.B.)*

putere (a unei mulțimi) → **cardinalul unei mulțimi**

puterea continuului → **cardinalul unei mulțimi**

putere mecanică (a unei mașini; P), cantitatea de lucru mecanic produs de mașină în unitatea de timp. În general, lucrul mecanic produs de o mașină este funcție de timp și atunci puterea este derivata lucrului mecanic față de timp: $P = \frac{dL}{dt}$. Ecuația dimensională a ei este $[P] = L^2MT^{-3}$. În sistemul CGS, unitatea de putere este ergul pe secundă (erg/s), multiplul său fiind wattul (1 watt = 10^7 erg/s). În practică, se folosește în mod curent kilowattul (1 kW = 10^3 W) și calul putere (1 CP = 0,736 kW = 75 kgf.m/s). *(Șt.G.)*

puterea punctului 1. (Față de un cerc). Produsul constant dintre distanțele de la un punct la cele două puncte în care o secantă, ce trece prin punctul considerat, intersectează cercul (fig. 142). În funcție de d (distanța punctului față de centrul cercului) și R (raza cercului), puterea punctului se calculează cu formula:

$$p = |d^2 - R^2|.$$

Dacă punctul este exterior cercului puterea lui față de cerc este egală cu pătratul lungimii segmentului de tangentă cuprins între punctul dat și punctul de tangență:

$$p = PA \cdot PB = PT^2.$$

2. (Față de o sferă). Produsul constant al distanțelor de la un punct la cele două puncte în care o dreaptă, dusă din punct, intersectează sfera. Proprietatea a fost dată de Euclid (sec. 3 î.e.n.). Denumirile au fost introduse de J. Steiner (1832). *(V.B.)*

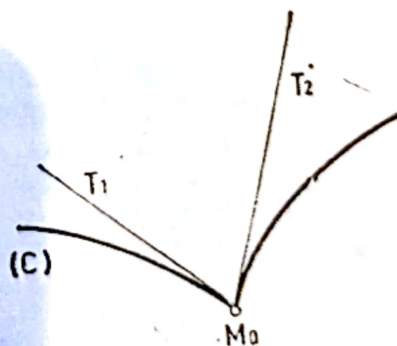


Fig. 141

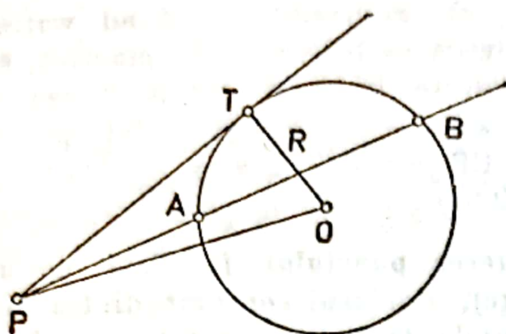


Fig. 142

q- cuantile [lat. *quantillus* „citime"] (ale unei variabile aleatoare X), $q-1$ numere reale $c_1, c_2, \ldots, c_{q-1}$ $(q \in \mathrm{N}, q \geqslant 2)$, verificînd relațiile:

$$P(X \leqslant c_i) \geqslant \frac{i}{q} \text{ şi } P(X \geqslant c_i) \geqslant \frac{q-i}{q}.$$

Pentru $q = 2$, relațiile de mai sus definesc mediana; pentru $q = 4$, se obțin cele patru *cuartile* (cea de a doua cuartilă coincide cu mediana); pentru $q = 10$, se obțin *decilele*. — *q-cuantilele de selecție*, $q-1$ numere reale $c_1, c_2, \ldots, c_{q-1}$, determinate de o selecție $x_1, x_2, \ldots, x_n$, dintr-o populație statistică astfel ca, pentru orice $i (i = 1, 2, \ldots, q-1)$, cel puțin $\frac{i}{q} n$ valori de selecție sînt mai mici sau egale cu c_i şi cel puțin $\frac{q-i}{q} n$ valori sînt superioare lui c_i. Dacă c_i nu coincide cu una dintre valorile selecției, atunci se calculează cu aproximație, de regulă prin interpolare liniară. La fel se procedează în cazul selecțiilor grupate pe intervale. *(A.Ş.)*

R

racordare [fr. *raccorder* „a îmbina"], operație de construire a unei curbe de un anumit tip, determinată astfel încît în punctul în care se întîlnește cu o curbă dată să aibă tangentă comună cu aceasta. Cea mai utilizată racordare este aceea a aliniamentelor de cale ferată sau de șosele, cu arce de cerc. *(V.B.)*

radian [lat. *radius* „rază"] (rd, rad), unitate de măsură a unghiurilor (în sistemul de unități internaționale, SI), egală cu unghiul care, avînd vîrful în centrul unui cerc, subîntinde un arc a cărui lungime este egală cu raza cercului. Trecerea de la măsura unui unghi dată în unghiuri drepte (d) la grade sexagesimale (s°), sau la grade centesimale (c^g), sau în radiani (rd), se face utilizînd formulele:

$$\frac{d}{4}=\frac{s^\circ}{360^\circ}=\frac{c^g}{400^g}=\frac{rd}{2}.$$

Ex.: 1 rd $\approx 57^\circ 17' 45'' \approx 63^g 66^c 20^{cc}$. Măsurarea în radiani a unghiurilor se folosește, mai des, în mecanică și în analiza matematică. Denumirea a fost folosită inițial de J. Thomson-Kelvin (1873). *(V.B.)*

radical [lat. *radicalis* „rădăcină, obîrșie"], semnul matematic „$\sqrt[n]{\ }$" care indică operația de extragere a rădăcinii de ordinul *n* dintr-un număr dat. Numărul natural *n* ($n \geqslant 2$) se numește *indicele radicalului* (în cazul rădăcinii pătrate, $n=2$, acest indice nu se mai scrie). Ex.: $\sqrt{9}=3$; $\sqrt[3]{8}=2$. Semnul actual al radicalului, sugerat de litera *r* (inițiala cuvîntului *radicula*) continuată cu o linioară orizontală, se întîlnește pentru prima dată la Kr. Rudolf (*Behend und hübsch Rechnung durch die kunstreichen Regeln Algebre*, 1525); indicii radicalilor au fost folosiți de J. Wallis (1657) și au căpătat o largă utilizare datorită lui M. Rolle (1690). *(V.B.)*

randament mecanic (η), raportul dintre lucrul mecanic util și lucrul mecanic motor: $\eta = L_u/L_m$. Valoarea sa este cuprinsă între 0 și 1. *(Șt.G.)*

rang [fr. *rang* „situație"] (al unei matrici; rang *A*), numărul egal cu cel mai mare ordin al determinantului nenul, care se poate forma cu elementele matricii considerate.

Ex.: matricea $A=\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & -7 & 2 & -5 \end{Vmatrix}$

are rangul 2, întrucît toți cei patru determinanți de ordinul 3, ce se pot forma cu elementele matricei, sînt nuli, existînd însă determinanți de ordin 2 nenuli. Noțiunea a fost introdusă de J. Sylvester, iar denumirea a fost propusă de G. Frobenius. *(V.B.)*

raport 1. (Pentru două numere *a*, *b*;

$\left.\frac{a}{b}\right)$. Cîtul împărțirii lui a prin b. **2.** (Pentru două mărimi de aceeași natură). Raportul măsurilor celor două mărimi, obținute cu aceeași unitate de măsură. Ex.: raportul a două segmente, raportul ariilor a două triunghiuri. O teorie a rapoartelor a fost formulată de Eudoxos (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

raport anarmonic 1. (Pentru patru puncte A, B, C, D coliniare; $(ABCD)$). Cîtul rapoartelor în care punctele C și D împart segmentul AB:

$$(ABCD) = \frac{CA}{CB} : \frac{DA}{DB},$$

segmentele fiind orientate. Ordinea punctelor A, B, C, D este esențială în definirea raportului anarmonic $(ABCD)$. Cu patru litere A, B, C, D se pot face $4! = 24$ permutări, ceea ce conduce la 24 de rapoarte anarmonice din care însă numai șase au valori distincte. Dacă $(ABCD)=k$, cele șase valori sînt: k, $\frac{1}{k}$, $1-k$, $\frac{1}{1-k}$, $\frac{k}{k-1}$, $\frac{k-1}{k}$. Raportul anarmonic a patru puncte este invariant față de o transformare proiectivă. Noțiunea apare pentru prima dată la Pappus (sec. 3), iar notația $(ABCD)$ a fost propusă de A. Möbius (1827). **2.** (Pentru patru numere x_1, x_2, x_3, x_4; $(x_1x_2x_3x_4)$).

$$(x_1x_2x_3x_4) = \frac{x_3 - x_1}{x_3 - x_2} : \frac{x_4 - x_1}{x_4 - x_2}.$$

Raportul anarmonic a patru puncte este egal cu raportul anarmonic al absciselor lor. **3.** (Pentru un fascicul de patru drepte). Raportul anarmonic al celor patru puncte în care o secantă intersectează dreptele din fascicul. Raportul anarmonic al unui fascicul este egal cu raportul anarmonic al coeficienților unghiulari ai dreptelor care alcătuiesc fasciculul. Se mai numește *biraport*. *(V.B.)*

raport de asemănare → **asemănare**

raportor, instrument construit dintr-o placă semicirculară, cu semicercul periferic împărțit în 180° (grade sexagesimale) sau în 200^g (grade centesimale), folosit la desenarea și la măsurarea unghiurilor. *(V.B.)*

rație [lat. *ratio* „socoteală, calcul"] → **progresie aritmetică, progresie geometrică**

raționalizare [lat. *rationalis* „rațional"] (a numitorului unei fracții), transformare a unei fracții, care are ca numitor o expresie algebrică irațională, într-o fracție echivalentă, cu numitorul rațional. Ex.: $\frac{1}{\sqrt[3]{x}} = \frac{\sqrt[3]{x^2}}{x}$; $\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{15}+\sqrt{5}}{2}$. *(V.B.)*

rază [lat. *radius* „rază, spiță"] (a unui cerc sau sfere), segmentul care unește centrul cercului sau sferei cu un punct de pe cerc sau sferă. Denumirea se datorează lui M.T. Cicero (sec. 1 î.e.n.); în literatura matematică românească, ea a fost adoptată inițial de Amfilohie Hotinul (1795). *(V.B.)*

rază de curbură (a unei curbe) → **curbura unei curbe**

rază vectoare (a unui punct M raportat la o origine O), mărimea vectorului **OM**, care se mai numește *vector de poziție*. Noțiunea a fost considerată inițial de J. Gregory (1668) și de I. Barrow (1669). *(V.B.)*

rază de convergență (a unei serii de puteri), numărul R $(0 \leqslant R)$ astfel încît: a) seria este absolut conver-

gentă pe intervalul $(-R, R)$; b) pentru orice x cu $|x| > R$, seria este divergentă. Existenţa razei de convergenţă este asigurată de *teorema lui Abel*. Noţiunea a fost introdusă de A. Cauchy (1844). — *Teorema lui Cauchy şi Hadamard*, pentru seria de puteri $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$, raza de convergenţă este $R = \frac{1}{\omega}$, dacă $0 < \omega < \infty$, unde $\omega = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|}$. Dacă $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = \infty$, atunci $R = 0$ şi dacă $\overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$, atunci $R = \infty$. *(V.B.)*

rădăcină (a unei ecuaţii), fiecare dintre valorile necunoscutei care verifică ecuaţia. — *Rădăcină multiplă de ordinul n* (a ecuaţiei algebrice $P(x) = 0$, $n \in \mathrm{N}$ şi $n \geqslant 2$), rădăcina a a ecuaţiei astfel încît: $P(x) = (x-a)^n Q(x)$, $Q(a) \neq 0$. Dacă a este rădăcină de ordinul n a ecuaţiei $P(x) = 0$, atunci $P^{(i)}(a) = 0$, $i = 1, ..., n-1$, şi $P^{(n)}(a) \neq 0$. Ex.: $x = 1$ este rădăcina dublă a ecuaţiei $(x-1)^2(x+1) = 0$. Noţiunea, mai întîi cea de rădăcină dublă, a fost considerată iniţial de J. Hudde (1658). *(V.B.)*

rădăcină [lat. *radix-radicis* „rădăcină, bază"] (de ordinul n a unui număr a; $\sqrt[n]{a}$). **1.** (În real, $a \in \mathrm{R}$ şi $a \geqslant 0$ dacă $n \geqslant 2$ este par). Numărul r ($r \geqslant 0$, dacă n este par) astfel încît $r^n = a$. Ex.: $\sqrt{9} = 3$, $\sqrt[3]{-8} = -2$. **2.** (În complex, $a \in \mathrm{C}$). Numărul z, astfel încît $z^n = a$. Există n rădăcini de ordinul n ale numărului a:

$$z_k = \sqrt[n]{\varrho}\left(\cos\frac{\alpha + 2k\pi}{n} + i \sin\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right),\ k = 0, 1, ..., n-1,$$

unde $a = \varrho\,(\cos\alpha + i \sin\alpha)$; forma actuală a acestei formule (stabilită iniţial de A. Moivre, 1707) a fost dată de L. Euler (1748). — *Rădăcinile de ordinul n ale unităţii*,

$$z_k = \cos\frac{2k\pi}{n} + i \sin\frac{2k\pi}{n},$$
$$k = 0, 1, ..., n-1.$$

Rădăcinile de ordinul n ale unităţii formează grup comutativ faţă de operaţia de înmulţire. Ex.: rădăcinile cubice $(n=3)$ ale unităţii sînt:

$$1;\ -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,i;\ \ -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\,i.$$

Operaţia extragerii rădăcinii datează din antichitate (milen. 3—2 î.e.n.), aşa cum atestă tăbliţele sumero-babiloniene ce cuprind tabele cu rădăcini pătrate şi cubice. În Europa, regula extragerii rădăcinii pătrate apare către mijlocul secolului 12, iar L.P. Fibonacci tratează şi rădăcini cubice; K. Rudolf (1525), M. Stiefel (1544) efectuau operaţii cu radicali de diferiţi indici, după modelul arabilor. Regulile folosite actualmente pentru extragerea rădăcinilor pătrate şi cubice au fost date de J. Trenchant (1557) şi F. Viète (1591). Extragerea rădăcinii pătrate şi cubice din polinoame algebrice a fost indicată de A. Clairaut (1746), deşi astfel de rădăcini se întîlnesc, pentru cazuri particulare, şi mai înainte, la B.M. al-Karadji (1010) şi M. Stiefel (1544). Denumirea este corelată de faptul că prin extragerea rădăcinii pătrate (cea dintîi apărută) se găseşte un număr care poate fi considerat ca lungime a laturii unui pătrat cu aria cît numărul din care se efectuează această operaţie. *(V.B.)*

reacţiune → **forţă de legătură**

realizant (al ecuaţiei de gradul doi $ax^2 + bx + c = 0$; Δ), numărul $\Delta =$

$=b^2-4ac$. Este opusul discriminantului. Dacă $\Delta > 0$, ecuația admite rădăcini reale distincte, dacă $\Delta = 0$, ecuația admite o rădăcină reală dublă, iar dacă $\Delta < 0$, rădăcinile ecuației sînt complexe. *(V.B.)*

rectificare [lat. *rectus* „drept", *facere* „a face"], determinarea lungimii unui arc de curbă (denumită, în cazul cînd i se poate face o rectificare, *curbă rectificabilă*). Pentru o curbă dată prin ecuația $y = f(x)$, lungimea unui arc, cu $x \in [a, b]$, este (după A. Cauchy):

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2}\,dx.$$

Primele rectificări au fost efectuate de Arhimede (sec. 3 î.e.n.) la spirala ce îi poartă numele, și de Apollonius (sec. 3 î.e.n.) pentru elice. *(V.B.)*

reflexivitate [lat. *reflexio* „întoarcere, înapoiere"], proprietate a unei relații R de a avea loc întotdeauna între un element și el însuși: xRx. Ex.: egalitatea figurilor geometrice, asemănarea poligoanelor, paralelismul, sînt relații reflexive. *(V.B.)*

regula de trei simplă, regulă pentru calcularea valorii unei mărimi direct sau invers proporționale cu o altă mărime, atunci cînd se cunosc două valori ale uneia dintre mărimile considerate și o valoare a celeilalte. Regula revine la a calcula a patra proporțională din proporțiile $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$, respectiv $\frac{a}{b} = \frac{x}{c}$, unde a și b sînt valorile unei mărimi, c fiind valoarea celeilalte, corespunzătoare lui a; x este valoarea căutată a celei de a doua mărimi corespunzătoare valorii b. — *Regula de trei compusă*, regulă pentru calcularea valorii unei mărimi care depinde de două sau mai multe mărimi, cu care, luată separat, este direct sau invers proporțională. *(V.B.)*

regula lui Cramer → sistem de ecuații

regula lui Laplace → determinant de ordinul n

regula lui L'Hôspital: dacă f și g sînt funcții derivabile pe $I - \{x_0\}$, cu $g'(x) \neq 0$ pentru $x \in I - \{x_0\}$ și $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ sau $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = \infty$, iar $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ există, atunci:

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Această regulă poartă numele lui G. L'Hôspital, dar a fost stabilită de Jean Bernoulli (1692). *(V.B.)*

regula lui Sarrus → determinant de ordinul n

relație [lat. *relatio* „legătură"] (pe o mulțime M), parte R a produsului cartezian $M \times M$. Dacă $(x, y) \in R$, se scrie xRy (x este în relație cu y). Ex.: relația de divizibilitate definită pe mulțimea numerelor întregi Z prin $R = \{(m, n) \mid m$ divide pe $n\}$; $(2,8) \in R$ deci $2R8$, dar $(3,8) \notin R$. Folosirea notației xRy a fost propusă de L. Wittgenstein (1922). — *Relație de echivalență*, relație reflexivă, simetrică și tranzitivă. Ex.: relația de paralelism definită pe mulțimea dreptelor din plan. — *Relație de ordine*, relație reflexivă și tranzitivă, avînd în plus proprietatea: dacă xRy și yRx atunci $x = y$. Ex.: relația de inegalitate ($\leqslant$) pentru numere reale și relația de incluziune pentru mulțimi sînt relații de ordine. *(V.B.)*

relații între rădăcini și coeficienți → formulele lui Viète

repartiție, exprimarea legii probabilistice a unei variabile aleatoare. Pentru o variabilă aleatoare de tip

discret, repartiţia este dată, de regulă, sub forma unui tabel:

$$\begin{pmatrix} x_1, & x_2, & \ldots, & x_n, & \ldots \\ p_1, & p_2, & \ldots, & p_n, & \ldots \end{pmatrix}$$

$x_i (i \in \mathrm{N})$, fiind valorile posibile ale variabilei, iar $p_i (i \in \mathrm{N})$, probabilităţile cu care variabila ia aceste valori. (Întotdeauna $\sum_{i \in \mathrm{N}} p_i = 1$). În general, repartiţia poate fi dată prin intermediul funcţiei de repartiţie a variabilei aleatoare respective. În anumite cazuri, pentru unele clase de variabile aleatoare de tip continuu, repartiţia poate fi dată şi prin densitatea de repartiţie a variabilei. Ex.: *repartiţia binomială*, definită de tabloul:

$$\begin{pmatrix} k \\ C_n^k p^k (1-p)^{n-k} \end{pmatrix}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n. \quad n \in \mathrm{N}, \quad 0 < p < 1;$

repartiţia Poisson, definită de tabloul:

$$\begin{pmatrix} k \\ e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^k}{k!} \end{pmatrix}$$

$k = 0, 1, 2, \ldots, n, \ldots, \quad \lambda > 0;$

repartiţia geometrică, definită de tabloul:

$$\begin{pmatrix} k \\ pq^{k-1} \end{pmatrix}$$

$k = 1, 2, \ldots, n, \ldots, \quad 0 < p < 1, \; q = 1 - p;$

repartiţia uniformă pe un interval $[a, b]$, definită de densitatea de repartiţie:

$$\varrho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & \text{pentru } x \in [a, b] \\ 0 & \text{pentru } x \notin [a, b]; \end{cases}$$

repartiţia normală ($N(m, \sigma)$), definită de densitatea de repartiţie:

$$\varrho(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}},$$

$$m, \sigma \in \mathrm{R}, \quad \sigma > 0;$$

repartiţia Gama ($\Gamma(a, k)$), definită de densitatea de repartiţie:

$$\varrho(x) = \begin{cases} \dfrac{a^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-ax} & \text{pentru } x > 0 \\ 0 & \text{pentru } x \leqslant 0; \end{cases}$$

repartiţia Beta ($B(k, r)$), definită de densitatea de repartiţie:

$$\varrho(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{B(k, r)} x^{k-1}(1-k)^{r-1} \\ \text{pentru } x \in [0,1] \\ 0 \\ \text{pentru } x \notin [0,1]. \end{cases}$$

Se mai numeşte *lege de repartiţie* sau *distribuţie*. *(A.Ş.)*

repaus (faţă de un reper), stare a unui sistem de puncte materiale cînd mişcarea sistemului este aceeaşi ca şi mişcarea reperului. Repausul este deci un aspect al mişcării mecanice; el este relativ, pe cînd mişcarea este absolută. *(Şt.G.)*

reper → **sistem de referinţă**

reper inerţial, sistem de referinţă care are o mişcare de translaţie uniform rectilinie faţă de un sistem de referinţă presupus fix. Într-un reper inerţial nu apar forţe complementare. *(Şt.G.)*

rest → **împărţire**

rest pătratic (al numărului natural n), fiecare dintre soluţiile congruenţei $x^2 \equiv x \pmod{n}$. Noţiunea şi denu-

mirea se datorează lui L. Euler (1785). *(V.B.)*

restricție (a funcției $f: E \to F$ la mulțimea A, $A \subset E$; f_A, $f|A$), funcția $f_A : A \to F$ definită de egalitatea $f_A(x) = f(x)$ pentru $x \in A$. *(V.B.)*

rețea de cercuri [lat. *rete* „rețea, plasă"], mulțimea cercurilor care au același centru radical. Ecuația rețelei este de forma:

$$C_1 + \lambda C_2 + \mu C_3 = 0,$$

unde $C_1(x, y) = 0$, $C_2(x, y) = 0$, $C_3(x, y) = 0$ sînt ecuațiile a trei cercuri de bază (care nu aparțin unui fascicul), iar λ și μ sînt parametri reali. *(V.B.)*

rețea de curbe pe o suprafață, ansamblul format de două familii de curbe aflate pe o suprafață, fiecare familie depinzînd de un parametru. Rețeaua de curbe parametrice pe o suprafață a fost introdusă de K. Gauss (1828). *(V.B.)*

reuniune [fr. *réunion*] $(A \cup B)$, operație care atașează la două mulțimi date, mulțimea elementelor care aparțin cel puțin uneia dintre ele. Este o operație comutativă: $A \cup B = B \cup A$ și asociativă: $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$. Pentru n mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n$ reuniunea lor se notează $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ sau $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$, iar pentru un șir de mulțimi $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$, cu $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Ex.: $\{1, 2, 3\} \cup \{2, 3, 4\} \cup \{1, 5\} = \{1, 2, 3, 4, 5\}$. Simbolul „$\cup$" a fost propus de G. Peano (*Formulaire de mathématiques*, 1897). *(V.B.)*

reuniune disjunctă (a două mulțimi M, N), mulțime S care conține două submulțimi M' și N' astfel încît: M' este echivalentă cu M, N' echivalentă cu N, $M' \cup N' = S$, $M' \cap N' = \emptyset$. Între cardinalele mulțimilor M, N, S există relația: card S = card M + card N. *(A.B.)*

rezolvare (a unei probleme), determinarea necunoscutelor dintr-o problemă cu ajutorul elementelor cunoscute pe care le conține, prin calcul, prin metode grafice etc. După G. Pólya (1945), etapele rezolvării unei probleme sînt: a) înțelegerea problemei (care este necunoscuta, care sînt datele, care este condiția problemei, trasarea unui desen, introducerea de notații corespunzătoare); b) întocmirea unui plan (legătura între date și necunoscută, considerarea, eventual, a unor probleme auxiliare înrudite cu problema în studiu, utilizarea tuturor datelor); c) realizarea planului (verificînd fiecare pas); d) privire retrospectivă (verificarea argumentării, cercetarea altor metode de aplicat, folosirea rezultatului sau a metodei de la altă problemă). *(V.B.)*

rezonanță [lat. *resonare* „a răsuna, a repeta un sunet"] → **oscilație**

rezultantă (generală a unui sistem de forțe $\mathbf{F}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$; $\mathbf{R}$), suma vectorială a tuturor forțelor sistemului, $\mathbf{R} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{F}_j$. Acest vector se poate considera ca un vector liber. *(Șt.G.)*

Riemann [ri:man], **Bernhard** (1826 — 1866), matematician german. Profesor la Universitatea din Göttingen (succedînd lui P.L. Dirichlet). A dat teoria generală a integralei definite. Unul dintre creatorii teoriei funcțiilor analitice (dînd acesteia o formă intuitivă prin introducerea suprafețelor care-i poartă numele și ocupîndu-se de problema reprezentărilor conforme). Cu prilejul studierii distribuției numerelor prime a introdus funcția „zeta". A creat o nouă geo-

metrie neeuclidiană (eliptică). Generalizînd geometria intrinsecă pe o suprafață, Riemann a considerat și o geometrie a spațiilor metrice multidimensionale de curbură variabilă. Importanța ideilor cuprinse în această geometrie riemanniană generală a ieșit în evidență abia după ce A. Einstein le-a folosit pentru fundamentarea teoriei relativității generalizate. Op. pr.: *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen komplexen Grösse*, 1851, *Theorie der Abelschen Functionen*, 1857; *Über die Hypothesen, die der Geometrie zugrunde liegen*, 1867. *(V.B.)*

riglă [lat. *regula* „linie dreaptă, măsură"], instrument folosit pentru trasarea liniilor drepte, avînd forma unei prisme drepte, cu lungimea mare în raport cu dimensiunile secțiunii transversale. *(V.B.)*

riglă de calcul, instrument folosit pentru efectuarea rapidă și cu aproximare suficientă a unor operații ca: înmulțiri, împărțiri, ridicări la pătrat, la cub, la puterea 10, extrageri de rădăcini pătrate și cubice, calculul procentelor, calcule cu logaritmi, operații cu funcții trigonometrice ș.a. Este alcătuită dintr-o riglă fixă, pe care se marchează două scări logaritmice, dintr-o riglă mobilă (rigletă) care culisează într-un șanț al riglei fixe, avînd și ea două scări logaritmice și dintr-un cursor cu 1—3 fire reticulare care ușurează aprecierea fracțiunilor de diviziuni. Principiul de funcționare se bazează pe folosirea segmentelor proporționale cu logaritmii numerelor de la 1 la 10, sau cu logaritmii unor funcții transcendente, care fiind marcați pe scări paralele, permit înlocuirea anumitor operații prin adunare sau scădere (de segmente). Scara logaritmică ce stă la baza construcției riglei de calcul, a fost inventată de Ed. Gunter (1623); W. Oughtred (1632) a introdus o perfecționare radicală, utilizînd două scări gradate identice care alunecau una în lungul celeilalte, iar S. Partridge (1662) i-a dat forma actuală. *(V.B.)*

romb [gr. *rhombos* „sfîrlează"], paralelogram cu laturile egale. Într-un romb diagonalele sînt perpendiculare, reprezentînd bisectoarele unghiurilor rombului și axele lui de simetrie. Aria rombului este: $A = \frac{D \cdot d}{2} = l \cdot h$, unde D, d, l, h sînt diagonalele, latura și înălțimea rombului (fig. 143). Denumirea a fost folosită pentru prima dată de Euclid (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

rostogolire, rotire a unui corp, față de altul cu care se găsește în contact, în jurul unei axe cuprinse în planul tangent comun la suprafețele care mărginesc cele două corpuri. Tendinței de rostogolire i se opune cuplul frecării de rostogolire, care apare datorită faptului că primul corp apasă asupra celuilalt și îl deformează. În cazul simplu al unei

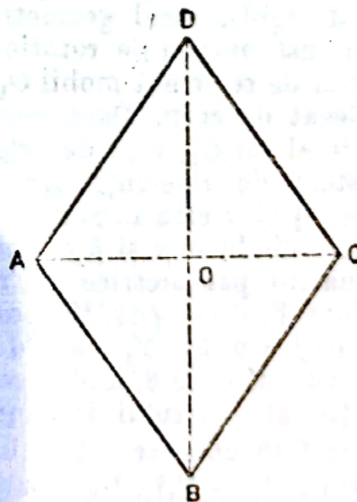


Fig. 143

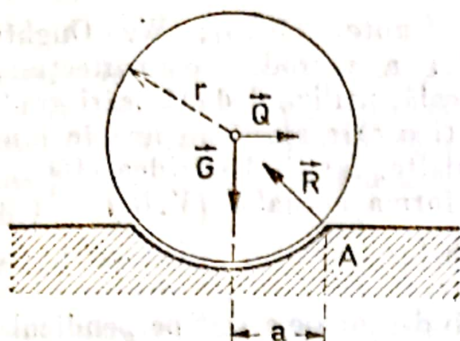


Fig. 144

roți grele, în contact cu un plan orizontal (fig. 144), dacă roata începe să se miște datorită unei forțe orizontale de tracțiune Q, reacțiunea planului deformat va întîlni suprafața nedeformată în punctul A, la o distanță a de verticala ce trece prin centrul roții și la o distanță de orizontala ce trece prin același punct, aproximativ egală cu raza r a roții. Luînd momentele față de A, se obține $Q = aG/r$, denumită uneori relația lui Coulomb, iar a este coeficientul de frecare la rostogolire, care, cu cît corpurile sînt mai rigide, are o valoare mai mică. Rezistența la rostogolire este mai mică decît rezistența la alunecare, fapt folosit în construcția a numeroase mașini. *(Șt.G.)*

rostogolitoare (în mișcarea plană a unui solid rigid), locul geometric al centrului instantaneu de rotație față de sistemul de referință mobil $O_1x_1y_1$, solidar legat de corp. Dacă vectorul de poziție al lui O_1, față de originea unui sistem de referință fix Oxy, este $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ și θ este unghiul dintre Ox și O_1x_1, dîndu-se a și b ca funcții de θ, ecuațiile parametrice ale rostogolirii sînt: $X_1 = -(\mathrm{d}b/\mathrm{d}\theta)\cos\theta + (\mathrm{d}a/\mathrm{d}\theta)\sin\theta$, $Y_1 = (\mathrm{d}b/\mathrm{d}\theta)\sin\theta + (\mathrm{d}a/\mathrm{d}\theta)\cos\theta$, unde vectorul de poziție al centrului instantaneu de rotație față de sistemul mobil s-a notat prin $X_1\mathbf{i}_1 + Y_1\mathbf{j}_1$. Dacă se poate elimina θ între aceste relații, se obține ecuația rostogolitoarei sub forma $G(X_1, Y_1) = 0$. La un moment t_* dat ecuațiile parametrice ale rostogolitoarei raportată la sistemul fix sînt $x_* = a_* + X_1\cos\alpha_* - Y_1\sin\alpha_*$, $y_* = b_* + X_1\sin\alpha_* + Y_1\cos\alpha_*$. *(Șt.G.)*

rotație [lat. *rotatio*] **1.** (În plan). Transformare punctuală determinată de un punct O (centru de rotație) și un unghi θ, care atașează unui punct M punctul M′ astfel încît $OM = OM'$ și $\widehat{MOM'} = \theta$. Într-un sistem de coordonate cartezian ortogonal punctul $M(x, y)$ se transformă, printr-o rotație cu centrul în origine și de unghi θ, în punctul $M'(x', y')$, astfel încît:

$$x' = x\cos\theta - y\sin\theta$$

$$y' = x\sin\theta + y\cos\theta.$$

Rotațiile de același centru formează un grup abelian cu un parametru. Rotația transformă o dreaptă într-o dreaptă, astfel încît unghiul acestora este egal cu unghiul de rotație. Rotația invariază unghiurile și distanțele. Cercurile de centru O sînt figuri invariante față de o rotație. **2.** (În spațiu). Transformare punctuală determinată de o dreaptă d (axa de rotație) și un unghi θ, care atașează unui punct M punctul M' astfel încît, dacă O este piciorul perpendicularei duse din M pe dreapta d, punctele M, O, M' să fie coplanare iar $OM = OM'$ și $\widehat{MOM'} = \theta$. *(V.B.)*

rotor [lat. *rotatio* „rotație"] (rot **V**), vector ce rezultă prin aplicarea operatorului nabla asupra unui cîmp vectorial **V** (după ideea lui J. W. Gibbs). În coordonate carteziene, rotorul are expresia:

$$\mathrm{rot}\,\mathbf{V} = \nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{i}\left(\frac{\partial V_z}{\partial y} - \right.$$

$$- \frac{\partial V_y}{\partial z}\Big) + \mathbf{j}\left(\frac{\partial V_x}{\partial z} - \frac{\partial V_z}{\partial x}\right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} - \frac{\partial V_x}{\partial y}\right) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ V_x & V_y & V_z \end{vmatrix}.$$

Rotorul se definește independent de sistemul de referință, componenta sa într-un punct M, după o direcție oarecare **n**, fiind dată prin limita raportului dintre integrala curbilinie $\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{r}$ (integrală ce poartă numele de circulație) de-a lungul unei curbe închise C, care înconjoară M, pe o suprafață care trece prin M și are în acel punct normala dirijată după **n**, și măsura ariei limitate de C, cînd acesta tinde către M. Dacă rotorul se anulează într-un anumit domeniu, cîmpul vectorial **V** se spune că este irotațional (sau lamelar) în acel domeniu, cînd **V** se scrie ca $\nabla\Phi$, adică **V** e gradientul lui Φ, unde Φ este o funcție scalară. Noțiunea de rotor are obîrșia în lucrările lui W. Hamilton (1853), iar denumirea și notația se datorează lui H. Lorentz (1895) și M. Abraham (1902). *(V.B., Șt.G.)*

ruletă, curbă descrisă de un punct al unei curbe plane date C, ce se rostogolește fără alunecare pe o altă curbă dată fixă C_0, cu care este coplanară. Ex.: cicloidele (dacă C_0 este o dreaptă și C un cerc), epicicloidele și hipocicloidele (dacă C_0 și C sînt cercuri), lănțișorul (ruletă a focarului unei parabole care se rostogolește pe o dreaptă fixă). Studiul ruletelor, început de Ch. Bouvelle (1503), a fost continuat de Ph. Lahire (1666), Jean Bernoulli (1690) ș.a. Denumirea apare la Chr. Huygens (1707). *(V.B.)*

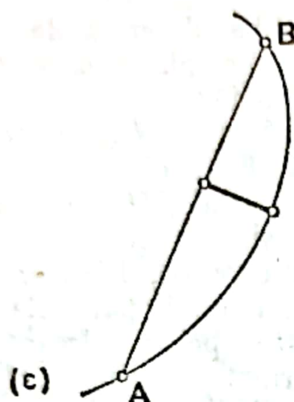


Fig. 145

săgeată [lat. *sagitta*] (a unui arc de curbă), distanța maximă dintre punctele arcului de curbă (ce nu își schimbă curbura) și coarda subîntinsă (fig. 145). Denumirea a fost sugerată de asemănarea configurației, în care această noțiune apare, cu arcul cu săgeată. *(V.B.)*

scalar [lat. *scalaris* „măsurat, evaluat"], element al unui corp peste care se consideră un spațiu vectorial. Noțiunea s-a extins din mecanică, desemnînd, în opoziție cu noțiunea de vector, un element caracterizat numai prin mărimea sa. Termenul a fost introdus de W. Hamilton (1846). *(V.B., A.B.)*

scară [lat. *scala* „scară, trepte"] (a unei hărți), raportul dintre lungimea unui segment de pe hartă și lungimea reală a acelui segment, ceea ce se notează sub forma unei fracții, $\frac{1}{n}$, al cărei numitor indică gradul de micșorare a detaliilor din natură reprezentate pe hartă. Lungimile considerate nefiind proporționale, procedeul este o aproximare. Pentru distanțe mari, utilizarea scării este incorectă. *(V.B.)*

scădere [lat. *excadere* „a scoate"] 1. (Pentru numere naturale; $a-b$). Operație care asociază perechii formate din numărul a (numit *descăzut*) și numărul b (numit *scăzător*), numărul c (numit *diferență*), astfel încît $a = b + c$. Operația se poate efectua numai dacă $a > b$. 2. (Pentru un grup aditiv G). Operație care asociază unei perechi de elemente a, $b \in G$ elementul $a + (-b)$, unde $-b$ este simetricul lui b. Simbolul scăderii „—" (minus) apare tipărit pentru prima dată într-o lucrare a lui J. Widmann (*Behende und hübsche Rechnung auf allen Kaufmannschaft*, 1489), fiind întîlnit și în manuscrisele lui Leonardo da Vinci. În terminologia matematică românească, cuvîntul apare pentru prima oară într-un text muntean (ms. 1187 — Biblioteca Academiei, 1823). *(V.B.)*

scăzător → **scădere**

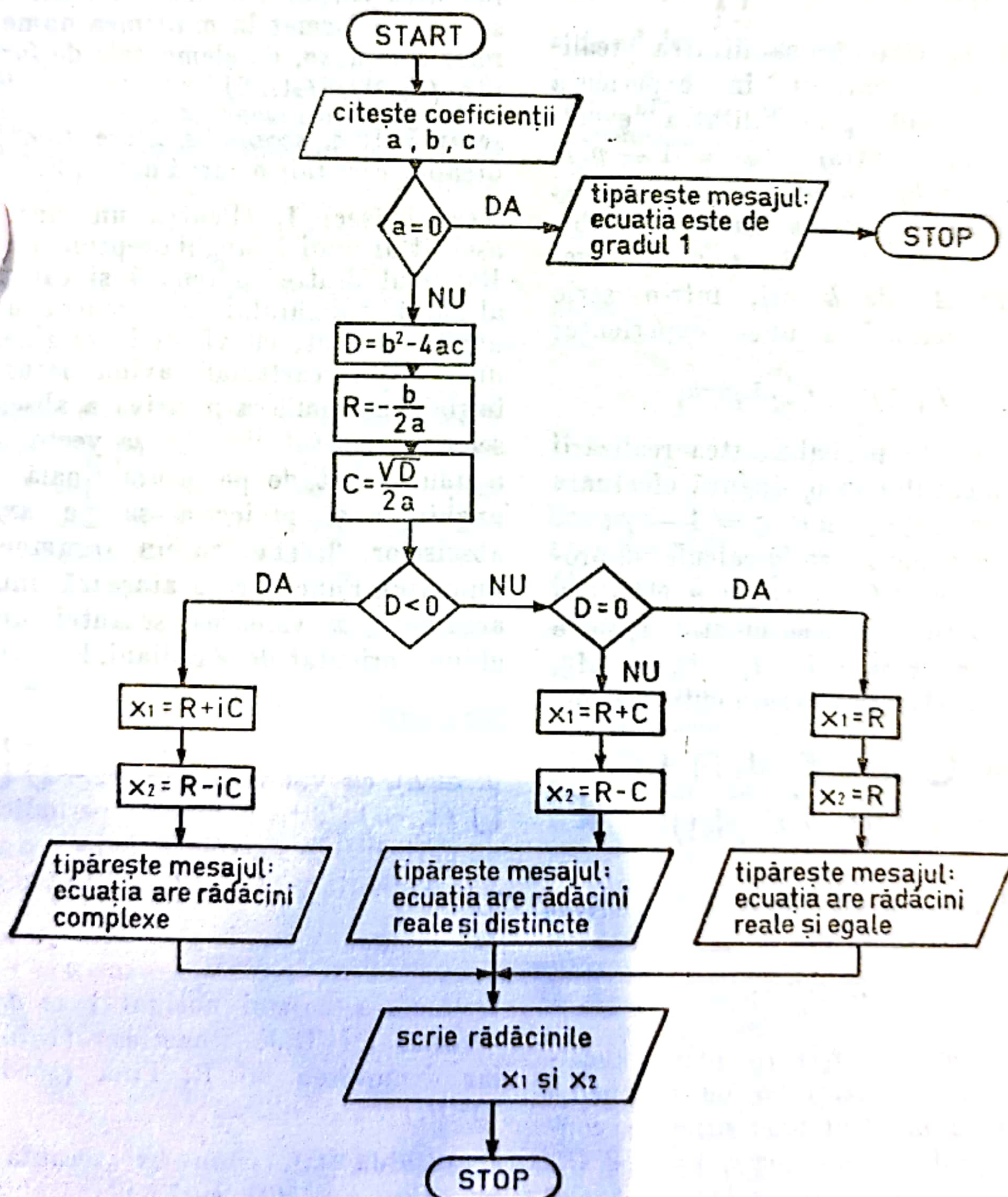
schema lui Horner, metodă pentru efectuarea împărțirii unui polinom $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ prin binomul $x - p$. Calculul se realizează folosind un tabel de forma:

$$\begin{array}{c|ccccc} & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} \ldots a_1 & a_0 \\ \hline p & b_{n-1} & b_{n-2} & b_{n-3} \ldots b_0 & r \end{array},$$

unde $b_{n-1} = a_n$, $b_k = a_k + b_{k+1}p$ $(k = n - 2, ..., 0)$, $r = a_0 + b_0 p$. Cîtul este polinomul $b_{n-1}x^{n-1} + b_{n-2}x^{n-2} + ... + b_1 x + b_0$, iar restul este r. Procedeul redat în această schemă este descoperit, încă în antichitate, de chinezi și redescoperit de P. Ruffini (1813), precum și de W. Horner (1819). *(V.B.)*

schemă logică de calcul, reprezentare grafică a operatorilor unui proces de calcul. Constă dintr-o rețea de blocuri, asociate cu diferite etape ale procesului de calcul și conectate prin săgeți sau conectori etichetați care definesc secvența în efectuarea operațiilor (fig. 146). Se mai numește *diagramă logică*, *organigramă* sau *schemă bloc*. *(T.B.)*

Fig. 146



scheme clasice de probabilitate, probleme de calcul al probabilităţilor de un mare grad de generalitate, avînd ca modele experienţe aleatoare simple: a) *schema lui Poisson* dă probabilitatea $P(A)$ a realizării unui eveniment A, de k ori, într-un şir de n experienţe independente:

$$P(A) = \text{coef. } x^k,$$

din expresia $E(x) = \prod_{i=1}^{n} (p_i x + q_i)$, unde p_i este probabilitatea realizării evenimentului în experienţa i, q_i fiind probabilitatea evenimentului contrar $(q_i = 1 - p_i)$; b) *schema lui Bernoulli* (schema bilei revenite) serveşte la aflarea probabilităţii $P(A)$ de realizare a unui eveniment A, de k ori, într-o serie de n efectuări a unei experienţe:

$$P(A) = C_n^k p^k q^{n-k},$$

unde p este probabilitatea realizării evenimentului la o singură efectuare a experienţei, iar $q = 1 - p$; c) *schema polinomială* calculează probabilitatea $P(A_i)$, ca în n efectuări ale experienţei, evenimentul A_i să se realizeze de n_i ori ($A_1, A_2, \ldots, A_m$ fiind o desfacere a evenimentului sigur E, deci $\bigcup_{i=1}^{m} A_i = E$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \ldots, m\}$):

$$P(A_i) = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_m!} p_1^{n_1} p_2^{n_2} \ldots p_m^{n_m};$$

d) *schema bilei revenite* priveşte calculul probabilităţii p de a obţine (folosind modelul unei urne ce conţine a_i bile de culoarea c_i, $i = 1, 2, \ldots, m$) n_1 bile de culoarea c_1, n_2 bile de culoarea c_2 etc., cînd se fac $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_m$ extracţii:

$$p = \frac{C_{a_1}^{n_1} \cdot C_{a_2}^{n_2} \cdot \ldots \cdot C_{a_m}^{n_m}}{C_{a_1+a_2+\ldots+a_m}^{n_1+n_2+\ldots+n_m}}. \ (V.B.)$$

scufundare [lat. *confundare*] (a structurii algebrice S în structura algebrică S'), izomorfism între S şi o substructură a lui S'. Ex.: $f(a) = (a, 0)$ $(a \in \mathbf{R})$ reprezintă scufundarea corpului numerelor reale în subcorpul format în mulţimea numerelor complexe, de elementele de forma $(a, 0)$. *(A.B.)*

secantă [lat. *secans-tis* „care taie"], dreaptă care taie o curbă dată. *(V.B.)*

secantă (sec) **1.** (Pentru un unghi ascuţit al unui triunghi dreptunghic). Raportul dintre ipotenuză şi cateta alăturată unghiului. **2.** (Pentru un unghi orientat, cu vîrful în originea unui reper cartezian avînd latura iniţială pe semiaxa pozitivă a absciselor). Raportul dintre raza vectoare a unui punct de pe latura finală a unghiului şi proiecţia sa pe axa absciselor. **3.** (Pentru un argument numeric). Funcţie care ataşează unui argument x valoarea secantei unghiului orientat de x radiani. Funcţia sec x este definită pe $\mathbf{R} - \left\{(2k+1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $(k \in \mathbf{Z})$, cu valori în $(-\infty, -1) \cup (1, \infty)$; este o funcţie periodică de perioadă 2π: $\sec(x + 2\pi) = \sec x$; este o funcţie pară: $\sec(-x) = \sec x$. De asemenea, $\sec x = \frac{1}{\cos x}$. Introducerea acestei noţiuni i se datorează lui G.J. Rhaeticus (1575), iar denumirea lui R. Fink (1583). *(V.B.)*

secantoidă [lat. *secans-tis* „secantă", gr. *eidos* „aspect"], curbă plană obţi-

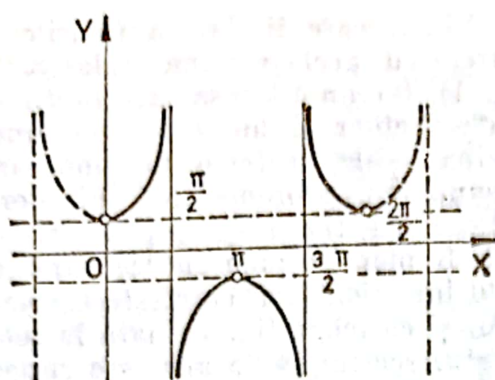


Fig. 147

nută ca reprezentare grafică a funcţiei y = sec x. Secantoida este formată dintr-o mulţime infinită de ramuri, avînd ca asimptote dreptele $x = (2k + 1)\frac{\pi}{2}$, $k \in \mathbf{Z}$ (fig. 147). Graficul secantei a fost realizat prima dată de J. Wallis (1670). *(V.B.)*

sector circular [lat. *sector-oris* „care separă"], porţiune din interiorul unui cerc cuprinsă între două raze (fig. 148). Aria sectorului circular (cu raza r) este dată de formulele:

$$A = \frac{r^2 n^\circ}{360^\circ} = \frac{r^2\theta}{2},$$

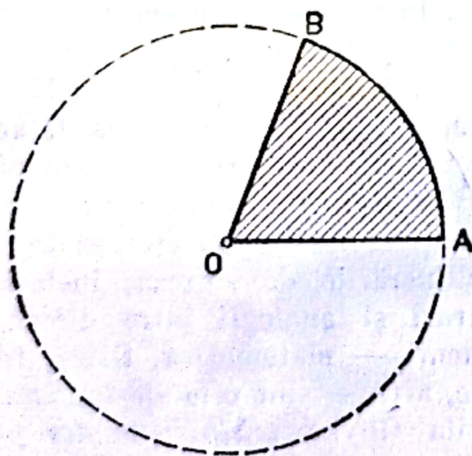


Fig. 148

unde n° este măsura unghiului la centru, exprimată în grade sexagesimale, iar θ, în radiani. A fost studiat iniţial de Euclid (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

sector sferic, corp generat prin rotirea unui sector circular în jurul unui diametru care nu îl traversează. Volumul sectorului sferic cu raza R este:

$$V = \frac{2}{3}\pi R^2 h \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right),$$

h fiind înălţimea zonei sferice generată de arc, $\alpha < \pi$ e unghiul sectorului circular generator, iar β este mărimea unghiului minim făcut de o rază cu diametrul în jurul căruia se roteşte. Aria suprafeţei închise care delimitează sectorul este dată de formula:

$$A = 2\pi R^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2} + \beta\right)\left(2\sin\frac{\alpha}{2} + + \cos\frac{\alpha}{2}\right).$$

Sectorul sferic este întîlnit, încă din antichitate, la Eutokios (sec. 6 î.e.n.). *(V.B.)*

secţiune [lat. *sectio-onis* „tăietură"] (plană), curbă obţinută prin intersectarea unei suprafeţe cu un plan. Ex.: conicele sînt secţiunile plane ale cuadricelor. — *Secţiune normală*, secţiune realizată cu un plan care conţine normala la suprafaţă într-un punct dat. *(V.B.)*

secţiunea de aur, denumire dată de Leonardo da Vinci problemei împărţirii unui segment în raport extrem şi mediu, apărută în antichitatea greacă fie în studiul proporţiilor (Platon, Nicomah), fie în construcţia geometrică a pentagonului regulat şi a ultimelor două dintre cele cinci poliedre regulate: dodecaedrul şi icosaedrul (Pitagora, Euclid, Ptolemeu).

Fiind vorba de o proporție scrisă numai cu doi termeni, dar introducînd și suma lor, rezultă pentru rapoarte o anume, unică, valoare:

$$\frac{M+m}{M}=\frac{M}{m}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}=$$

$$=1{,}61803398...,$$

de unde rezultă construcția grafică de împărțire a segmentului $M + m$ în media *(M)* și extrema *(m)* (planșa 1, fig. 1a) sau determinarea segmentului *m* dîndu-se un segment oarecare *M* (planșa 1, fig. 1b). Întrucît aceeași proporție apare în asemănarea unor triunghiuri de descompunere, prin diagonale, a pentagonului regulat, rezultă construcțiile acestuia. Euclid construiește întîi (planșa 1, fig. 1c) triunghiul isoscel format de o latură *(m)* și două diagonale *(M)*. Ptolemeu dă construcția pentagonului înscris într-un cerc dat (planșa 1, fig. 1d). Dreptunghiul de laturi *m/M* se numește „dreptunghiul de aur" și se construiește dintr-un pătrat de latură *m*, care se descompune într-o infinitate de pătrate așezate în spirală, tinzînd la punctul de intersecție al diagonalei dreptunghiului cu diagonala celui care se alătură pătratului de origine (planșa 1, fig. 1e). Ca valoare a unei proporții continue între întreg și părți, rezultînd totodată din figurile regulate cu ordin de simetrie 5, iar acestea fiind de timpuriu remarcate în proporțiile corpului omenesc, în formele și fenomenele naturii, numărul irațional 1,618... a jucat și joacă un rol deosebit în cercetarea și creația artistică. Preocupările pur geometrice, dar și artistice și filozofice în legătură cu acest număr, din antichitatea greacă (Pitagora, Policlet, Platon, Euclid, Ptolemeu), au revenit în Renașterea italiană cu adaosul unui aspect mistic care face pe Luca Pacioli să-l numească „proporția divină". Leonardo da Vinci, care îi desena figurile la cartea cu același nume (planșa 2, fig. 1), l-a numit însă „secțiunea de aur". Kepler îl numește „secțiunea divină" și-l socotește formînd, împreună cu teorema lui Pitagora, „cele două tezaure ale geometriei". Tot Kepler îl pune în legătură cu șirul lui Fibonacci, cu creșterea plantelor și cosmografia. Reluată în secolul 19, secțiunea de aur este supusă în Germania unor cercetări statistice. Astfel, Zeising, după măsurători pe mii de corpuri umane, regăsește în medie secțiunea de aur ca raport de împărțire, prin ombilic, a înălțimii omului matur, iar Fechner, apoi Timerding, prin statistici de apreciere estetică asupra dreptunghiurilor constată că cel care întrunește majoritatea este dreptunghiul *M/m*. Cercetările ulterioare, prin măsurători și trasee geometrice, asupra arhitecturii antice, catedralelor gotice etc., confirmă fie folosirea conștientă a acestei proporții, fie legătura intrinsecă și naturală între cele mai reușite creații artistice și simțul estetic uman. La începutul secolului 20 numeroase cercetări se fac în America: D'Arcy W. Thompson (1917), asupra formelor creșterii, Jay Hambidge (1920), asupra traseelor geometrice pe vasele grecești, T. Cook (1922), care introduce pentru secțiunea de aur denumirea de „număr de aur" notîndu-l cu Φ. În Europa, de proporțiile catedralelor gotice se ocupă Moessel și Lund (1921). Însuși Le Corbusier (planșa 2, fig. 2) și mișcarea de artă aplicată, inclusiv arhitectura, numită Bauhaus (1920), au folosit trasee geometrice bazate pe secțiunea de aur. Dar lucrările de sinteză, incluzînd legături și analogii între diferitele domenii — matematică, fizică, filozofie, artă — sînt cele ale românului Matila Ghyka „*Esthétique des proportions dans la nature et dans les arts*" (1927) și „*Le nombre d'or*" (1931).

Recent, numeroase cercetări și studii de sinteză sînt întreprinse de autori englezi (Schalfield, Tons Brunés) și germani (Hagenmaier, Wedepohl). Incluzînd secțiunea de aur în problema mai generală a simetriei, pe linia lui Jaeger (1917), matematicianul Herman Weyl a scris, în 1952, o succintă *Simetria* (traducere în limba română, 1966). La noi în țară, începînd din 1960, apar studii privind proporții și trasee geometrice pentru arhitectură și, în special, pentru arhitectura populară românească (planșa 3) și pentru sculptura lui Brâncuși (planșa 4).

secundă [lat. *secundus* „al doilea, următor"] → **grad**

segment [lat. *segmentum* „parte tăiată"] (de dreaptă; *AB*), mulțimea punctelor unei drepte cuprinse între două puncte *A*, *B*, ale ei, inclusiv acestea. — *Segment orientat* ($\overline{AB}$), segment pe care s-a stabilit un sens. În acest caz $\overline{AB} = -\overline{BA}$. Principiul semnelor în geometria sintetică a fost introdus de M. Chasles. *(V.B.)*

segment circular, porțiune din interiorul unui cerc cuprinsă între un arc de cerc și coarda care îl subîntinde (fig. 149). Aria segmentului de cerc

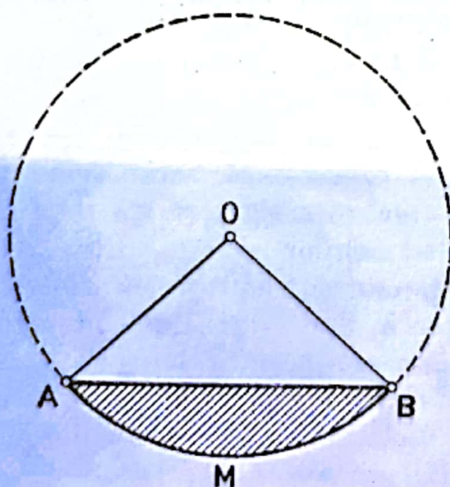


Fig. 149

cu raza *r*, al cărui arc are măsura n°, se calculează cu formula:

$$A = r^2\left(\frac{\pi n^0}{180^\circ} - \frac{\sin n^0}{2}\right). \quad (V.B.)$$

segmente comensurabile [lat. *com* „cu, împreună", *mensurabilis* „care se poate măsura"], segmente avînd proprietatea că există un segment care se cuprinde de un număr întreg de ori în fiecare din ele. Măsura, unul prin altul, a două segmente comensurabile, este un număr rațional. Termenul a fost introdus de N. Oresme (1370). *(V.B.)*

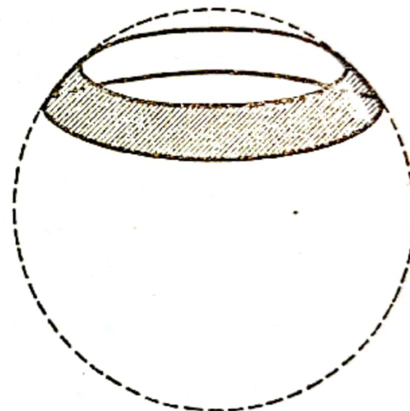


Fig. 150

segmente incomensurabile [lat. *in* „ne, fără", *commensurabilis*], segmente pentru care nu există un segment care să se cuprindă de un număr întreg de ori în fiecare din segmentele date. Măsura unui segment incomensurabil cu segmentul unitate este un număr irațional. Ex.: diagonala și latura pătratului sînt segmente incomensurabile, fapt cunoscut de pitagoreici (sec. 6—4 î.e.n.). Termenul a fost introdus de N. Oresme (1370). *(V.B.)*

segment sferic, corp mărginit de o zonă (eventual, de o calotă) sferică și de două cercuri paralele (respectiv,

de un cerc) (fig. 150). Volumul segmentului sferic e dat de formula:

$$V = \frac{\pi h^3}{6} + \frac{\pi h}{2}(R_1^2 + R_2^2),$$

unde h este înălțimea segmentului, iar R_1, R_2 sînt razele bazelor. Noțiunea de segment sferic a fost considerată întîia dată de Arhimede (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

selecție [lat. *selectio* „alegere"], orice mulțime finită de elemente observate: $x_1, x_2, ..., x_n$, ale unei populații statistice (n se numește *volumul* selecției). Orice valoare de selecție x_i poate fi considerată ca valoare a unei variabile aleatoare X_i, numită *variabilă de selecție*. — *Funcție de selecție*, orice funcție $f(X_1, X_2, ..., X_n)$, depinzînd de variabilele de selecție $X_1, X_2, ..., X_n$. O funcție de selecție poate fi interpretată ca o variabilă de selecție. *(A.Ș.)*

semicerc [lat. *semi* „jumătate", *cerc*], fiecare dintre cele două jumătăți de cerc determinate de un diametru al cercului. Denumirea a fost dată de Arhimede (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

semidreaptă, fiecare dintre cele două părți ale unei drepte în care aceasta este împărțită de un punct al ei (numit originea semidreptei). Noțiunea a fost considerată de Euclid (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

semigrup, mulțime pe care s-a definit o lege de compoziție internă asociativă. Ex.: mulțimea numerelor naturale față de adunare. — *Semigrup monoid*, semigrup cu element neutru. Ex.: mulțimea numerelor naturale față de înmulțire. *(V.B.)*

semiplan, fiecare dintre cele două părți ale unui plan, în care acesta este împărțit de o dreaptă oarecare a lui. *(V.B.)*

seria armonică, seria $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + ... + \frac{1}{n} + ...$. Este o serie divergentă. Seria este denumită astfel, deoarece un termen oarecare al ei este medie armonică între termenii alăturați. Matematicianul român N. Șt. Botez a stabilit (1872) o formulă care dă suma a n termeni succesivi ai seriei armonice, formulă preluată și dezvoltată de E. Catalan (1873) și P.L. Cebîșev (1876). *(V.B.)*

seria binomială → serie de puteri

serie [lat. *series* „șir, înlănțuire"] $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + ...\right)$, expresia $a_1 + a_2 + ... + a_n + ...$ egală cu $\lim_{n\to\infty}(a_1 + a_2 + ... + a_n)$, unde a_n, $n = 1, 2, ...$, sînt termenii unui șir numeric. Numerele a_n se numesc termenii seriei iar sumele $s_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$, $n = 1, 2, ...$, se numesc *sume parțiale*. Dacă șirul sumelor parțiale are limita S (finită sau infinită), numărul S se numește suma seriei și se scrie $S = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$. —*Serie convergentă*, serie pentru care suma S este finită. Ex.: $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + ... + \frac{1}{4^n} + ... = \frac{4}{3}$ (aceasta fiind prima serie întîlnită în știință, datorată lui Arhimede, sec. 3 î.e.n.). Metode de stabilire a convergenței unei serii sînt date de → *criterii de convergență*. — *Serie absolut convergentă*, serie avînd proprietatea că seria formată cu modulele termenilor ei este convergentă. O serie absolut convergentă este convergentă. Seriile absolut convergente au fost considerate inițial de către A. Cauchy (1831). — *Serie semiconvergentă*, serie convergentă dar nu și absolut convergentă; la o astfel de serie schimbarea ordinei termenilor

poate schimba suma ei (putîndu-se obține o serie cu o sumă fixată anticipat — cum au dovedit B. Riemann și P.L. Dirichlet —, sau o serie divergentă). Ex.: seria armonică alternată. Noțiunea și denumirea au fost introduse de A. Legendre (1811). — *Serie divergentă*, serie pentru care suma S este infinită. Ex.: seria armonică. — *Serie alternată*, serie $\pm \sum_{i=1}^{\infty} a_i$, cu proprietatea $a_{2n-1} > 0$, $a_{2n} < 0$, $n = 1, 2, \ldots$. *(V.B.)*

serie de funcții $\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f_1 + f_2 + \ldots\right)$, expresia $f_1 + f_2 + \ldots + f_n + \ldots$, unde f_n, $n = 1, 2, \ldots$, sînt funcții reale cu același domeniu de definiție A. Pentru orice $x \in A$ seria $f_1(x) + \ldots + f_n(x) + \ldots$ este o serie numerică. Seria de funcții $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ este convergentă în punctul $x \in A$, dacă șirul sumelor parțiale $S_n = f_1 + f_2 + \ldots + f_n$ este un șir de funcții convergent în punctul x. *(V.B.)*

serie de puteri, serie de funcții de forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n + \ldots$ ($x \in \mathbf{R}$, $a_n \in \mathbf{R}$, $n = 1, 2 \ldots$). Ex.: seria $1 + x + x^2 + \ldots + x^n + \ldots$ convergentă pe $A = (-1, 1)$, avînd suma $\frac{1}{1-x}$. — *Seria binomială*, seria de puteri:

$$1 + kx + \frac{k(k-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \ldots + \frac{k(k-1)\ldots(k-n+1)}{n!} x^n + \ldots$$

($k \in \mathbf{R}$), convergentă pentru $|x| < 1$, avînd suma $(1 + x)^k$. Seria binomială a fost introdusă de I. Newton (1664). *(V.B.)*

serie Fourier → **serie trigonometrică**

serie Maclaurin → **serie Taylor**

serie Taylor, serie de puteri de forma $\sum_{n=1}^{\infty} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n + \ldots$. — *Serie Taylor a funcției* f *în punctul* a, seria $f(a) + \frac{x-a}{1!} f'(a) + \frac{(x-a)^2}{2!} f''(a) + \ldots + \frac{(x-a)^n}{n!} f^{(n)}(a) + \ldots$.
Seria Taylor a funcției f în punctul a este convergentă, în punctul x, către $f(x)$, dacă și numai dacă valorile în punctul x ale resturilor R_n ale formulelor lui Taylor formează un șir $(R_n(x))$ convergent la 0. A fost stabilită de B. Taylor (1715), căruia îi poartă numele. Dacă $a = 0$, seria se numește *seria Maclaurin* a funcției f (căreia C. Maclaurin, 1742, i-a dat o nouă deducție). *(V.B.)*

serie trigonometrică, serie de funcții de forma:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx).$$

— *Serie Fourier* (a unei funcții f), serie trigonometrică cu coeficienții:

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x)\, dx,$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\, dx,$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\, dx.$$

Seriile trigonometrice au fost considerate în legătură cu studiul coardei şi membranei vibrante, iniţiat de B. Taylor (1713), şi dezvoltat de D. Bernoulli (1753), L. Euler (1754), precum şi J. Fourier (1807) care a desăvîrşit teoria seriilor ce îi poartă numele. *(V.B.)*

sferă [gr. *sphaira*], suprafaţă formată de mulţimea punctelor din spaţiu care se află la aceeaşi distanţă dată (numită rază) de un punct fix (numit centrul sferei) (fig. 151). Aria sferei (stabilită de Arhimede, sec. 3 î.e.n.) este dată de formula:

$$A = 4\pi R^2,$$

iar volumul corpului mărginit de sferă (sfera plină) este:

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3.$$

Ecuaţia carteziană a sferei cu centrul în punctul (a, b, c) şi de rază R, este:

$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 - R^2 = 0$ (ecuaţia dată de A. Parent, 1705). Ecuaţiile parametrice ale sferei, faţă de un reper cartezian ortogonal cu originea în centrul ei, sînt:

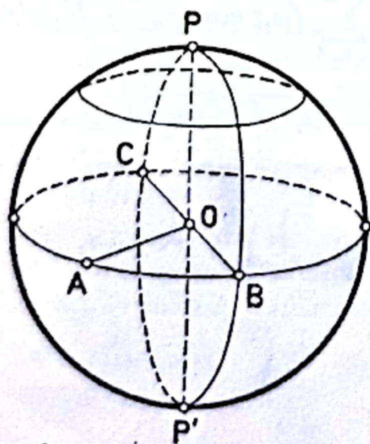


Fig. 151

$$x = R \cos u \sin v$$

$$y = R \sin u \sin v$$

$$z = R \cos v,$$

(unde $0 \leqslant u \leqslant 2\pi$, $0 \leqslant v \leqslant \pi$). Introducînd coordonatele omogene,

$$x = \frac{x_1}{x_4}, \quad y = \frac{x_2}{x_4}, \quad z = \frac{x_3}{x_4}$$

ecuaţia sferei devine:

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - a^2 x_4^2 = 0.$$

Se cunoaşte încă din antichitate că, dintre toate corpurile convexe care au o arie dată, sfera are volumul maxim şi dintre cele cu volumul dat, sfera are aria minimă. Primele studii despre sferă se întîlnesc la Parmenide (sec. 5 î.e.n.), apoi la Platon (sec. 4 î.e.n.); denumirea a fost adoptată de Euclid (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

sferă circumscrisă [lat. *circum* „împrejur", *scribere* „a scrie"] (unui poliedru), sfera care trece prin toate vîrfurile poliedrului (care este astfel un poliedru înscris sferei). *(V.B.)*

sferă înscrisă [lat. *in* „în", *scribere* „a scrie"] (într-un poliedru), sferă la care feţele poliedrului sînt tangente (poliedrul fiind circumscris sferei). *(V.B.)*

sferoid [gr. *sphaira* „sferă", *eidos* „aspect"], corp care are o formă apropiată de aceea a unei sfere. Ex.: un elipsoid obţinut prin rotirea unei elipse cu excentricitatea mică în jurul uneia dintre axele ei de simetrie. Termenul se întîlneşte iniţial la Platon (sec. 4 î.e.n.) şi s-a fixat în terminologia matematică datorită lui Arhimede (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

Sierpinski [şerpinschi], **Waclaw** (1882—1970), matematician polonez. Profesor la Universitatea din Varşovia. Membru al Academiei de Ştiinţe din R.P. Polonă şi membru de onoare al Academiei R.S. România. Unul

dintre fondatorii revistei „Fundamenta mathematicae“ (1920), consacrată teoriei mulţimilor şi aplicaţiilor ei în topologie. Lucrările sale tratează capitole din domeniul teoriei mulţimilor (asupra numerelor transfinite, ipoteza continuului), teoria analitică a numerelor, analiza matematică (rezolvînd problema privind definirea unei curbe ce trece prin fiecare punct al unui pătrat), analiza funcţională. Op. pr.: *Leçon sur les nombres transfinis*, 1928; *Introduction to General Topology*, 1934 (în colab.); *Cardinal and Ordinal numbres*, 1958. *(V.B.)*

simboluri matematice [gr. *symbolon* „semn de recunoaştere“], semne convenţionale, grafice sau literale, folosite pentru desenarea (notarea) anumitor noţiuni, operaţii, relaţii matematice sau pentru indicarea caracterului de generalitate sau particularitate a propoziţiilor etc.

$\{\ \}$	— acolade
antilog	— antilogaritm
$\in$, $\notin$	— apartenenţă, neapartenenţă
$\approx$, $\simeq$	— aproximativ egal
A_n^p	— aranjamente de n elemente luate cîte p
$\overset{\frown}{AB}$	— arc AB
arcsin	— arcsinus
arccos	— arccosinus
arctg	— arctangentă
arcctg	— arccotangentă
arcsec	— arcsecantă
arccosec	— arccosecantă
$\sim$	— asemenea cu
5, V	— cinci
50, L	— cincizeci
500, D	— cincisute
$[a, b]$	— cel mai mic multiplu comun al numerelor a şi b
(a, b)	— cel mai mare divizor comun al numerelor a şi b
colog	— cologaritm
C_n^p, $\binom{n}{p}$	— combinări de n luate cîte p
CM, C_M	— complementara unei mulţimi M
$f\circ g$	— compunerea funcţiilor f şi g
$\bar{z}$	— conjugatul numărului complex z
const.	— constantă
cos	— cosinus
ch	— cosinus hiperbolic
cosec	— cosecantă
cosech	— cosecantă hiperbolică
ctg	— cotangentă
cth	— cotangentă hiperbolică
$\nearrow$, $\searrow$	— creşte, descreşte
$\Longleftrightarrow$	— dacă şi numai dacă (relaţia de echivalenţă logică)
$\Longrightarrow$	— deci, prin urmare, rezultă (relaţia de implicaţie logică)
$\frac{df}{dx} = f'(x)$	— derivata lui $f(x)$ în punctul x
$\frac{d^2f}{dx^2} = f''(x)$	— derivata de ordinul doi a lui $f(x)$
$\frac{d^nf}{dx^n} = f^{(n)}(x)$	— derivata de ordinul n a lui $f(x)$
$\frac{\partial f}{\partial x} = f_x'$	— derivata parţială a lui $f(x, y, ...)$ în raport cu x
$\frac{\partial^n f(x, y, ...)}{\partial x^n}$	— derivata parţială de ordinul n în raport cu x
$\frac{\partial^{m+n} f(x, y, ...)}{\partial x^m y^n}$	— derivata parţială mixtă în raport cu x şi y
$\frac{D(f, g, ...)}{D(x, y, ...)}$	— determinant funcţional

df	— diferenţiala unei funcţii
Δx	— diferenţă finită
$\neq$	— diferit
div **V**	— divergenţa vectorului **V**
$\vdots$	— divizibil
2, II	— doi
$\sim$	— echivalent
$=$	— egal
e	— excentricitate
$\exists x$	— există cel puţin un element x
$n!$	— factorial de n
$f(x, y, \ldots)$ $F(x, y, \ldots)$	— funcţii de $x, y, \ldots$
sgn x	— funcţia signum
$[x]$	— funcţia partea întreagă a lui x real
$\{x\}$	— funcţia partea fracţionară a lui x real
1^g	— grad centesimal (un grad)
1°	— grad sexagesimal (un grad)
grad φ	— gradientul funcţiei φ
$\equiv$, $\not\equiv$	— identic egal cu, neidentic cu
$\subset$, $\supset$	— incluziune (cuprins în, cuprinde pe)
∞	— infinit
$\int$	— integrală (nedefinită)
$\int_a^b$	— integrală de la a la b
$\cap$	— intersecţie a două mulţimi
(a, b)	— interval deschis
$[a, b]$	— interval închis
$(a, b]$	— interval deschis la stînga, închis la dreapta
$[a, b)$	— interval închis la stînga, deschis la dreapta
$(-\infty, +\infty)$	— interval nemărginit
$:$, $-$, $/$	— împărţit cu, la, prin
$\cdot$, $\times$	— înmulţit
h	— înălţime
Δu	— laplacian de u
$\lim\limits_{x \to a} f(x)$	— limita funcţiei $f(x)$ cînd x tinde către a
$\underline{\lim}$	— limită inferioară (lim inf)
$\overline{\lim}$	— limită superioară (lim sup)
$\log_a$	— logaritm în baza a
ln	— logaritm natural
lg	— logaritm zecimal
$>$	— mai mare decît
$\geqslant$	— mai mare sau egal cu
$<$	— mai mic decît
$\leqslant$	— mai mic sau egal cu
inf	— margine inferioară
sup	— margine superioară
1000, M	— mie
$-$	— minus
1^c	— minut centesimal (un minut)
$1'$	— minut sexagesimal (un minut)
$\|x\|$	— modulul lui x
$\gg$	— mult mai mare decît
$\ll$	— mult mai mic decît
C	— mulţimea numerelor complexe
R	— mulţimea numerelor reale
Q	— mulţimea numerelor raţionale
Z	— mulţimea numerelor întregi
N	— mulţimea numerelor naturale

$\varnothing$ — mulțimea vidă
∇ — nabla (operatorul lui Hamilton)
$\|x\|$ — norma lui x
9, IX — nouă
n — număr natural
e — numărul irațional și transcendent e
π — numărul irațional și transcendent pi
8, VIII — opt
$\forall$ — oricare ar fi
$\parallel$ — paralel cu
$(\ )$ — paranteze mici (rotunde)
$[\ ]$ — paranteze mari (drepte)
Re — partea reală a unui număr complex
Im — partea imaginară a unui număr complex
4, IV — patru
P_n — permutări de n elemente
$\perp$ — perpendicular pe
$+$ — plus
% — procent
$\prod_{i=1}^{n} x_i$ — produs după indicele i luînd valori de la 1 la n
$a \cdot b$, $<a, b>$ — produs scalar
$a \times b$ — produs vectorial
$A \times B$ — produs cartezian al mulțimilor A și B
$\div$ — progresie aritmetică
$\div\div$ — progresie geometrică
‰ — promilă
a^n — puterea lui a la n
rd, rad — radian
$\sqrt[n]{\ }$, $\sqrt{\ }$ — radicali (rădăcini) de ordinul n, respectiv, 2
r, R — rază (la cerc, sferă, cilindru etc.)
ρ — rază de curbură; rază vectoare
f^{-1} — inversa unei funcții f
$\cup$ — reuniunea a două mulțimi
rot V — rotorul vectorului V
$\vee$ — sau (disjuncție)
sec — secantă trigonometrică
sh — secantă hiperbolică
1^{cc} — secundă centesimală (o secundă)
$1''$ — secundă sexagesimală (o secundă)
sin — sinus
sh — sinus hiperbolic
str — steradian
$\sum_{i=1}^{n}$ — sumă după indicele i luînd valori de la 1 la n
100, C — sută
6, VI — șase
7, VII — șapte
$\wedge$ — și (conjuncție logică)
tg — tangentă trigonometrică
th — tangentă hiperbolică
$\to$ — tinde către
3, III — trei
ΔABC — triunghiul ABC
$\sphericalangle A$, $\hat{B}$ — unghiuri
i — unitatea imaginară
1, I — unu
δ — variație
v, $\vec{V}$ — vector
i, j, k — versorii atașați axelor de coordonate Ox, Oy, Oz
10, X — zece
0 — zero

(V.B.)

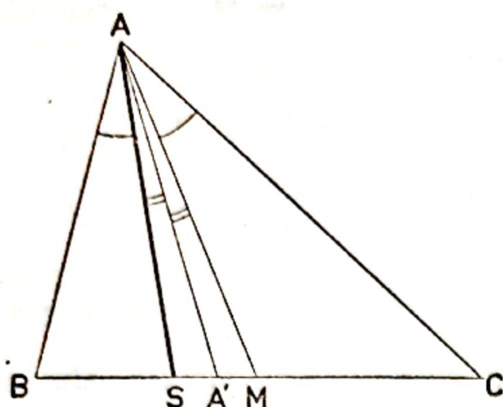


Fig. 152

simediană [*si*metrică, *mediană*], dreaptă simetrică unei mediane față de bisectoarea interioară care trece prin același vîrf al triunghiului (fig. 152). Denumirea a fost propusă de M. d'Ocagne (1883). *(V.B.)*

simetrie [gr. *syn* „împreună", *metron* „măsură"] **1.** (În raport cu un punct). Transformare geometrică, determinată de un punct fix O, care face să corespundă unui punct M, punctul M', astfel încît punctele M, O, M' sînt coliniare și O este mijlocul segmentului MM'. Compunerea a două simetrii față de punctele O_1 și O_2 este o translație de vector $2O_1O_2$. **2.** (În raport cu o dreaptă) Transformare geometrică, determinată de o dreaptă fixă d, numită *axă de simetrie*, care face să corespundă unui punct M, punctul M', astfel încît dreapta d să fie mediatoarea segmentului MM'. Compunerea a două simetrii față de dreptele d_1 și d_2 este o translație (de vector egal cu dublul distanței dintre d_1 și d_2) dacă $d_1 \parallel d_2$ și, în caz contrar, o rotație (cu centrul în punctul de intersecție al dreptelor d_1 și d_2 și de unghi egal cu dublul unghiului ascuțit dintre ele). **3.** (În raport cu un plan). Transformare geometrică determinată de un plan π, care face să corespundă unui punct M, punctul M', astfel încît planul să fie planul mediator al segmentului MM'. Compunerea a două simetrii în raport cu două plane π_1 și π_2 este o translație sau o rotație în jurul dreptei de intersecție a planelor, după cum planele sînt paralele sau nu. Termenul (referitor la simetria unei figuri) se întîlnește la Platon (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

simetrie (a unei relații), proprietate a unei relații binare, R, între elementele x și y ale unei mulțimi M, astfel încît xRy implică yRx, oricare ar fi x, y, din M. Ex.: relațiile de egalitate, paralelism, perpendicularitate, asemănare; relația de ordine, de incluziune nu sînt simetrice. *(V. B.)*

simplificare [lat. *simplex* „simplu", *facere* „a face"] (a unei fracții), împărțire a numitorului și numărătorului cu același număr (eventual cu cel mai mare divizor comun), obținîndu-se o fracție egală cu cea dată. — *Simplificarea unui radical*, împărțire a indicelui radicalului și a exponentului expresiei de sub radical cu același număr natural $(k \neq 0)$, fără ca valoarea radicalului să se schimbe:

$$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (n \geqslant 2). \quad (V.B.)$$

sinus [lat. *sinus* „cută, arc"] (sin) **1.** (Pentru un unghi ascuțit, al unui triunghi dreptunghic). Raportul dintre cateta opusă unghiului și ipotenuză. **2.** (Pentru un unghi orientat, cu vîrful în originea unui reper cartezian, avînd latura inițială pe semiaxa pozitivă a absciselor). Raportul dintre lungimea proiecției pe axa ordonatelor a razei vectoare a unui punct de pe latura finală a unghiului și raza vectoare. **3.** (Pentru un argument numeric). Funcție care atașează unui argument x valoarea sinusului unghiului orientat de x radiani. Funcția sin x este definită pe $\mathbf{R}$ cu valori în $[-1, +1]$; este o funcție periodică de perioadă 2π : $\sin(x + 2\pi) = \sin x$; este o funcție impară: $\sin(-x) = -\sin x$. Legă-

tura dintre funcția sinus și funcțiile exponențiale este dată de formula:

$$\sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i} \text{ (L. Euler, 1748).}$$

Denumirea se întîlnește prima oară la R. Chester (1145); simbolul, propus de A. Girard (1626), s-a impus datorită lui L. Euler (*Introductio in Analysin infinitorum*, 1748). *(V.B.)*

sinus hiperbolic → **funcții hiperbolice**

sinusoidă [lat. *sinus* „cută, arc", *eidos* „înfățișare"], graficul funcției trigonometrice sinus:

$$y = \sin x \text{ (fig. 153)}$$

Prima reprezentare a acestei curbe a fost realizată de G. Roberval (1637), iar denumirea i-a fost atribuită de către H. Fabry (1659). *(V.B.)*

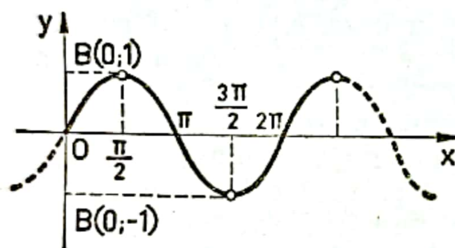


Fig. 153

sistem axiomatic, sistem format din: a) *termeni primitivi* (cu ei sînt construite, după anumite reguli, formulele sistemului numite și propoziții sau enunțuri); b) *axiome* (submulțimea A a mulțimii F a formulelor); c) *reguli de deducție* (cu ajutorul cărora se fac demonstrațiile; o demonstrație este un șir finit de formule în care fiecare formulă este sau o axiomă sau se obține din formulele precedente cu ajutorul regulilor de deducție). O formulă se numește *teză* (sau *teoremă*), dacă există o demonstrație care se termină cu ea. Sistemul axiomatic trebuie să fie *necontradictoriu (consistent)*, adică mulțimea T a tezelor să nu coincidă cu mulțimea F a formulelor. În cazul în care sistemul axiomatic conține și *negație*, el este necontradictoriu dacă și numai dacă nu există nici o propoziție, astfel încît atît ea cît și negația ei să fie teze. Sistemul axiomatic se numește *complet sintactic*, dacă pentru orice formulă f care nu este teză, noul sistem axiomatic, care are pe $\{f\} \cup A$ ca axiome și aceleași reguli de deducție ca sistemul inițial, devine contradictoriu (adică adăugînd pe f ca axiomă pe lîngă vechile axiome, poate fi demonstrată orice formulă a sistemelor). Sistemul axiomatic se numește *complet semantic* dacă o formulă, care este adevărată în orice interpretare (în orice model), este o teză. Completitudinea sintactică implică completitudinea semantică, dar, în general, nu și reciproc. În logica clasică a propozițiilor, cele două completitudini sînt echivalente. Completitudinea unui sistem înseamnă, în esență, posibilitatea de a stabili dacă o formulă este sau nu teză. Sistemul de axiome A se numește *independent*, dacă nici o axiomă nu poate fi demonstrată pe baza celorlalte axiome. Două sisteme axiomatice, care au aceeași mulțime de formule F, se numesc echivalente dacă au și aceeași mulțime de teze. O submulțime H din mulțimea F a formulelor unui sistem axiomatic, se numește *sistem deductiv*, dacă orice formulă, care poate fi demonstrată adăugînd la axiome elemente din H, este tot în H; noțiunea de sistem deductiv corespunde noțiunii de filtru într-o latice. *(A.B.)*

sistem de ecuații [gr. *syn* „împreună", *istemi* „a așeza"], ansamblu de ecuații $f_k(x_1, x_2, ..., x_m) = 0$, $k = 1, 2, ..., n$, unde $x_1, x_2, ..., x_m$ sînt necunoscutele sistemului. A rezolva un sistem de ecuații înseamnă a determina valorile $x_1^0, x_2^0, ..., x_m^0$ cu care, înlocuind necunoscutele $x_1, x_2,$

..., x_m, fiecare dintre ecuațiile sistemului să fie verificată. Un caz important îl constituie sistemele liniare:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1m}x_m = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2m}x_m = b_2$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nm}x_m = b_n,$$

sau sub formă matricială, $AX = B$, unde $A = \|a_{ij}\|_{\substack{i=1,\dots,n\\ j=1,\dots,m}}$ este matricea formată cu coeficienții necunoscutelor, iar:

$$X = \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{Vmatrix}, \quad B = \begin{Vmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{Vmatrix}$$

— *Sistem compatibil*, sistem de ecuații liniare care are cel puțin o soluție. — *Sistem compatibil determinat*, sistem de ecuații liniare care are soluție unică. — *Sistem compatibil nedeterminat*, sistem de ecuații liniare care are cel puțin două soluții distincte. — *Regula lui Cramer*: un sistem de n ecuații liniare cu n necunoscute, cu $D \neq 0$ ($D = \det A$, determinantul format cu coeficienții necunoscutelor), este compatibil determinat, iar soluția este dată de formulele: $x_i^0 = \frac{D_i}{D}$, $i = 1, 2, \dots, n$, unde D_i este determinantul obținut din D prin înlocuirea coloanei i cu coloana termenilor liberi. Teorema a fost dată de G. Cramer (1750). — *Teorema lui Rouché*: condiția necesară și suficientă ca un sistem de n ecuații cu m necunoscute (cu rang $A < n$) să fie compatibil este ca toți determinanții caracteristici ai sistemului să fie nuli. Teorema a fost dată de E. Rouché (1875). *(V.B.)*

sistem de numerație [lat. *numeratio* „numărătoare"], sistem de reguli, denumiri și simboluri care permite exprimarea vorbită și scrisă a numerelor întregi. Numerația vorbită stabilește regulile cu ajutorul cărora, folosind un număr restrîns de cuvinte, pot fi rostite diferite numere. Numerația scrisă stabilește regulile cu ajutorul cărora, folosind un anumit număr de simboluri (numite cifre), să poată fi scris orice număr. Aceste cifre, în sistemul de numerație adoptat, au valori diferite în funcție de poziția lor în numărul respectiv (sistem pozițional). Un număr natural N este scris în baza b (b număr natural, diferit de 1), dacă:

$$N = a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + \dots + a_1 b + a_0,$$

unde n este un număr întreg nenegativ, iar $0 < a_n < b$, $0 \leqslant a_{n-1} < b, \dots, 0 \leqslant a_0 < b$; $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ fiind numere întregi. Numerele întregi $0, 1, 2, \dots, b-2, b-1$ se numesc cifre în baza b. Cel mai mic număr care are n cifre, în baza b, este egal cu b^{n-1}, iar cel mai mare, $b^n - 1$. Trecerea unui număr din sistemul de numerație zecimal într-unul cu baza b se face prin împărțiri succesive: numărul dat se împarte la b, cîtul lor se împarte iar la b ș.a.m.d. — cîturile (în ordinea obținută) sînt cifrele de ordinul întîi, al doilea etc. ale numărului în baza b. Pentru a trece un număr cu baza b la numărul cu altă bază b', se transcrie numărul dat în baza 10, apoi se trece de la aceasta la numărul în baza b'. Ex.:

$$(111101)_2 = 1 \cdot 2^5 + 1 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 1 \cdot 2^2 + 0 \cdot 2 + 1 = (61)_{10} = (2021)_3.$$

În afara sistemului de numerație zecimal ($b = 10$), folosit în mod curent, utilizarea calculatoarelor electronice a impus sistemul de numerație binar ($b = 2$). Sistemul binar a fost imaginat de L. Fibonacci (1202),

fiind dezvoltat apoi de L. Pacioli (1494), J. Neper (1617) şi, mai ales, de G. Leibniz (1703). Primele sisteme poziţionale de scriere a numerelor se întîlnesc la babilonieni (sec. 4 î.e.n.) şi, ulterior, la indienii maya, acestea fiind sisteme improvizate, neperfecţionate. Forma definitivă a sistemului poziţional zecimal şi folosirea simbolurilor speciale pentru numerele de la 0 la 9 (care au condus la formarea acestuia) este realizarea indienilor, astfel încît în secolul 7, sistemul poziţional capătă aspectul actual, însuşit de arabi, prin intermediul cărora pătrunde în Europa (întîi în Spania, sec. 10). — *Clasele sistemului zecimal de numeraţie*, fiecare dintre grupele de cîte trei cifre (considerate de la dreapta la stînga) ale numerelor întregi cu mai multe cifre. Cele trei cifre ale unei clase desemnează cîte un ordin: al unităţilor, al zecilor şi al sutelor, iar clasele sînt denumite astfel: prima — clasa unităţilor, a doua — clasa miilor, a treia — clasa milioanelor, a patra — clasa bilioanelor (sau miliardelor), a cincea — clasa trilioanelor, apoi clasele cvadrilioanelor, cvintilioanelor, sextilioanelor, septilioanelor, octilioanelor, nonilioanelor, decilioanelor ş.a.m.d., ale căror denumiri se formează din denumirea latină a numărului de ordine al clasei respective micşorat cu două unităţi (ce se referă la clasa unităţilor şi a miilor), urmată de sufixul *ilion*, după propunerea lui N. Chuquet (*Le triparty en la science des nombres*, 1484). *(V.B.)*

sistem de referinţă, ansamblu de elemente geometrice (puncte, linii, suprafeţe), imobile unul faţă de celelalte, care serveşte la fixarea poziţiei punctelor ce aparţin unei mulţimi date (sisteme de puncte materiale, figuri, corpuri etc.). Ex.: sistemul de axe de coordonate cartezian, sistemul de referinţă al coordonatelor polare. Se mai numeşte *reper*. *(V.B.)*

sistem de vectori liniar dependenţi, mulţime de vectori $x_1, x_2, ..., x_n$, dintr-un spaţiu liniar peste corpul K, care satisfac o relaţie de forma:

$$k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_nx_n = 0,$$

unde $k_i \in K$, $i = 1, 2, ..., n$, sînt scalari, nu toţi nuli. *(V.B.)*

sistem de vectori liniar independenţi, mulţime de vectori $x_1, x_2, ..., x_n$, dintr-un spaţiu liniar peste corpul K, care verifică o relaţie de forma:

$$k_1x_1 + k_2x_2 + ... + k_nx_n = 0,$$

dacă şi numai dacă scalarii k_i, $i = 1, 2, ..., n$, din corpul K, sînt nuli. Noţiunea de independenţă liniară a vectorilor a fost introdusă de H. Grasmann (1878). *(V.B.)*

sistem informaţional, complex de operaţii, metode, echipament şi personal, necesar obţinerii, transmiterii, prelucrării şi utilizării informaţiei pentru fundamentarea deciziilor luate în vederea atingerii unui anumit obiectiv. *(T.B.)*

sistem metric, sistem de unităţi de măsură pentru lungimi, suprafeţe, volume, masă, capacitate etc., bazat pe unităţi fixe ale căror multipli şi submultipli se formează după sistemul zecimal. — *Metrul* [gr. *metron* „măsură“] (m), unitate fundamentală de măsură pentru lungimi. A fost adoptat în Franţa, la 7 aprilie 1785, fiind egal cu a zecea milioana parte din sfertul meridianului pămîntesc, la propunerea matematicienilor C. Condorcet, J.B. Delambre, J. Lagrange, P. Laplace, G. Monge (cărora li se datorează şi denumirea). Ulterior (1960) metrul s-a definit ca fiind egal cu 1650763,73 lungimi de undă ale radiaţiei (în vid) care corespunde tranziţiei atomului de kripton 86 între nivelele $2p_{10}$ şi $5d_5$. — *Litrul* [gr., lat. *litra* — veche unitate de măsură pentru capacitate] (l), uni-

tate de măsură a capacității recipientelor egală cu volumul unui kilogram de apă distilată la temperatura 4°,1C și la presiunea de 1 atmosferă; 1 l = = 0,000028 dm³. A fost adoptat, în 1799, la Paris. — *Kilogramul* [gr. *kiloi* „mie", *gramma* „gram"] (kg), unitate de măsură pentru masă egală cu masa kilogramului-etalon — cilindru echilater, $h = 2r = 39$ mm, făcut din aliaj de platină 90% cu iridiu 10% (adoptat la Conferința Internațională de Măsuri și Greutăți de la Paris, 1889); masa acestuia este cu 28 mg mai mare decît masa unui decimetru cub de apă distilată, cîntărit în vid, la nivelul mării, la temperatura de +4°,1C și la latitudinea de 45°. *(V.B.)*

soluție (a unei ecuații) → **ecuație**

spațiu Banach → **spațiu liniar normat**

spațiu euclidian (real) n-dimensional ($\mathbf{R}^n$), mulțime ale cărei elemente sînt sisteme ordonate $(x_1, x_2, ..., x_n)$ de cîte n numere reale (numite puncte), pe care s-a definit o distanță între două puncte $x(x_1, x_2, ..., x_n)$, $y(y_1, y_2, ..., y_n)$ prin relația:

$$d(x, y) = \sqrt{\sum_{1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Pe un spațiu euclidian n-dimensional se poate defini un produs scalar prin: $< x, y > = \sum_{1}^{n} x_i y_i$. Ex.: pentru $n = 1$, $\mathbf{R}^1 = \mathbf{R}$ este dreapta numerică, $\mathbf{R}^2$ este planul în care distanța este cea obișnuită din geometria elementară, ca și în $\mathbf{R}^3$, care desemnează spațiul nostru obișnuit. Pentru prima dată, spațiul cu mai mult de trei dimensiuni a fost imaginat de H. Grassmann (*Die Lineale Ausdehnungslehre*, 1844). *(V.B.)*

spațiu Hilbert, spațiu liniar normat, complet, pe care s-a definit un produs scalar $< x, y >$, norma fiind definită cu ajutorul produsului scalar prin

$$\|x\| = \sqrt{< x, x >}. \quad (V.B.)$$

spațiu liniar → **spațiu vectorial**

spațiu liniar normat, spațiu liniar pe care s-a definit o normă. Un spațiu liniar normat poate fi metrizat, definind distanța prin $d(x,y) = \|x - y\|$. Noțiunea a fost introdusă de S. Banach și H. Hahn (1920). — *Spațiu Banach*, spațiu liniar normat, metrizat (cu $d(x, y) = \|x - y\|$), complet. Noțiunea a fost introdusă de S. Banach (1922). *(V.B.)*

spațiu metric, mulțime pe care s-a definit o distanță. Ex.: mulțimea numerelor reale **R**, cu distanța $d(x, y) = |x - y|$, spațiu euclidian n-dimensional, mulțimea funcțiilor continue definite pe un interval $[a, b]$ cu distanța $d(x, y) = \sup_{t \in [a, b]} |x(t) - y(t)|$. Noțiunea a fost introdusă de M. Fréchet (1906) și dezvoltată, în special, de F. Hausdorff (1914), pornindu-se de la ideile lui G.B. Riemann (1854). — *Spațiu metric complet*, spațiu metric în care orice șir fundamental este convergent. *(V.B.)*

spațiu Minkowski, mulțime ale cărei elemente sînt puncte caracterizate de 4 coordonate (x, y, z, t), pe care s-a definit o distanță ds între două puncte vecine (x, y, z, t) și $(x + dx, y + dy, z + dz, t + dt)$ prin:

$$ds^2 = c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2,$$

unde c este viteza luminii. Primele trei coordonate x, y, z ale unui punct corespund coordonatelor spațiale obișnuite, iar a patra coordonată t corespunde timpului. Noțiunea a fost introdusă de H. Minkowski (1908) și este fundamentală în teoria relativității restrînse. *(V.B.)*

spaţiu Riemann, mulţime ale cărei elemente sînt puncte caracterizate de n coordonate $(x^1, x^2, ..., x^n)$ pe care s-a definit o distanţă ds între două puncte vecine de coordonate (x^i) şi $(x^i + dx^i)$ prin:

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i\, dx^j,$$

unde coeficienţii g_{ij} depind de punct şi satisfac relaţia $g_{ij} = g_{ji}$. Noţiunea a fost introdusă de B. Riemann (*Über die Hypothesen die der Geometrie zugrunde liegen*, 1854) şi a fost utilizată de A. Einstein (1916) în teoria relativităţii generalizate. *(V.B.)*

spaţiu topologic, mulţime X împreună cu o mulţime T de submulţimi ale lui X, cu următoarele proprietăţi: a) $\varnothing$, $X \in T$; b) dacă $\{A_i\}_{i\in I}$ este o familie oarecare (nevidă) de mulţimi care aparţin lui T, atunci şi mulţimea $\bigcup_{i\in I} A_i$ aparţine lui T; c) dacă A_i, $i = 1, 2, ..., n$, sînt mulţimi care aparţin lui T, atunci şi mulţimea $A = \bigcap_{i=1}^{n} A_i$ aparţine lui T. Mulţimea T se numeşte *topologie* pe X, ea determinînd pe X o *structură topologică*. Mulţimile care aparţin lui T se numesc *mulţimi deschise*, iar elementele lui X se numesc *puncte*. Spaţiul topologic este cel mai general cadru în care poate fi definită noţiunea de limită. Mulţimea $\mathbf{R}$ a numerelor reale cu topologia formată din intervale deschise şi reuniuni de intervale deschise este un spaţiu topologic, pe care noţiunile de limită şi funcţie continuă revin la cele din analiza funcţiilor reale de variabilă reală. *(V.B., A.B.)*

spaţiu vectorial, modul peste un corp. Ex.: mulţimea funcţiilor reale continue definite pe un interval $[a, b]$, mulţimea matricilor pătrate de ordinul n sînt spaţii vectoriale peste corpul numerelor reale, respectiv complexe. Spaţiile vectoriale au fost definite în forma actuală de G. Peano (1888), deşi K. Gauss (1799) folosise implicit noţiunea de plan vectorial; fondatorul teoriei spaţiilor vectoriale rămîne însă H. Grassmann (1844). Se mai numeşte *spaţiu liniar*. *(V.B.)*

spirala hiperbolică [gr. *spira* „încolăcire, înfăşurare"], curbă cu ecuaţia polară:

$$\rho = \frac{a}{\theta},$$

unde a este o constantă (fig. 154). Aria unui sector (OM_1M_2) se determină prin formula: $A = \frac{a^2}{2}\left(\frac{1}{\theta_1} - \frac{1}{\theta_2}\right) = \frac{a}{2}\ (\rho_1 - \rho_2)$. Această spirală a fost introdusă de P. Varignon (1704) şi denumită astfel, din cauza asemănării ecuaţiei ei cu cea a hiperbolei echilatere raportată la asimptote, de Jean Bernoulli, care a descoperit-o (1710), independent de P. Varignon, ca transformată prin inversiune, în raport cu polul, a spiralei lui Arhimede. *(V.B.)*

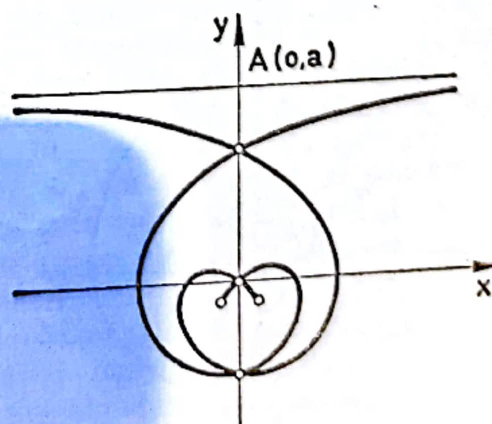


Fig. 154

spirala logaritmică, curbă plană care taie toate razele sale vectoare sub un unghi u constant (fig. 155). În raport cu un reper polar, ecuația ei este:

$$\rho = ae^{b\theta}$$

unde a, b sînt constante $(b = \operatorname{ctg} u)$. Aria sectorului curbiliniu (OM_1M_2) al acestei spirale se calculează prin formula:

$$A = \frac{1}{4b}(\rho_2^2 - \rho_1^2),$$

iar pentru lungimea unui arc M_1M_2 se folosește formula:

$$L = \frac{\sqrt{1 + b^2}}{b}(\rho_2 - \rho_1).$$

Spirala logaritmică are proprietatea de a fi asemenea cu ea însăși (cum a dovedit pentru prima dată Jacques Bernoulli, în 1692), ceea ce înseamnă că această spirală este expresia geometrică a creșterii unui organism ce prezintă continuu asemănare cu forma pe care a avut-o în stadiile anterioare (cochiliile melcilor și ale scoicilor, coarnele animalelor, femurul piciorului unui om etc.). Descoperirea spiralei logaritmice i se datorează lui R. Descartes (1638), iar denumirea a fost propusă de P. Varignon (1702), datorită faptului că ecuația ei poate fi scrisă sub forma $\ln \frac{\rho}{a} = b\theta$. *(V.B.)*

spirala lui Arhimede, curbă plană descrisă de un punct ce parcurge uniform (cu viteza v) o dreaptă care se rotește (cu viteza constantă ω) în jurul unui punct fix al ei (fig. 156). Ecuația curbei în coordonate polare (reperul fiind format cu pozițiile inițiale ale punctului și dreptei) este:

$$\rho = a\theta, \text{ unde } a = \frac{v}{\omega}.$$

Aplicînd metoda de aproximare prin exhaustie (ce conține germenii calculului integral), Arhimede (sec. 3 î.e.n.) a demonstrat că aria primei spire este $\frac{1}{3}$ din aria cercului cu raza egală cu aceea a punctului terminal: $A = \frac{4a^2\pi^3}{3}$. Aria sectorului (OM_1M_2) este $A = \frac{a^2}{6}(\theta_2^3 - \theta_1^3)$. Lungimea unui arc OM se calculează prin formula:

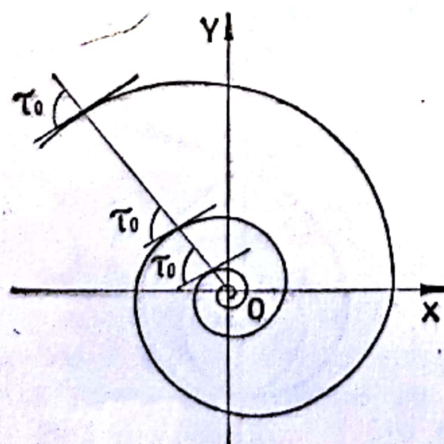


Fig. 155

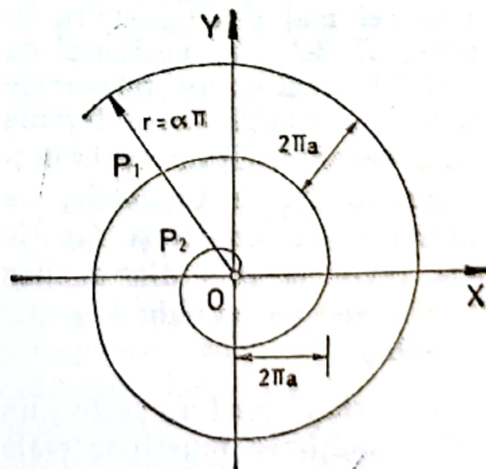


Fig. 156

$$L = \frac{a}{2}\left(\theta\sqrt{\theta^2+1} + \operatorname{argsh}\,\theta\right).$$

Proprietățile acestei spirale au fost stabilite de Arhimede *(Peri elicon)*, iar descoperirea ei se datorează, după cum menționează însuși Arhimede, lui Conon din Samos (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

spirala lui Cornu → **clotoidă**

spirala sinusoidală, curbă plană reprezentată prin ecuația polară:

$$\rho^n = a^n \sin n\theta,$$

sau:

$$\rho^n = a^n \cos n\theta',$$

unde $\theta = \frac{\pi}{2n} + \theta'$. Cazuri particulare de spirale sinusoidale sînt: dreapta (pentru $n = -1$), cercul (pentru $n = 1$), parabola $\left(\text{pentru } n = -\frac{1}{2}\right)$, cardioida $\left(\text{pentru } n = \frac{1}{2}\right)$, lemniscata lui Bernoulli (pentru $n = 2$), hiperbola echilateră (pentru $n = -2$) ș.a., spiralele sinusoide fiind curbe algebrice, cînd n este rațional. Au fost studiate inițial de C. Maclaurin (1742); denumirea a fost propusă de A. Goupillière (1876). *(V.B.)*

stabilitate, proprietate a unui sistem mecanic, care se găsește într-o anumită stare, ca, la apariția unor perturbații, să dezvolte forțe care să se opună acestora, astfel încît parametrii ce definesc sistemul din punct de vedere mecanic să aibă variații mărginite sau care tind să dispară odată cu creșterea timpului, față de parametrii corespunzători stării date. Un sistem stabil la perturbații care variază lent (de exemplu modificarea cu o viteză foarte mică a coordonatelor unui punct material) se spune că prezintă *stabilitate statică*, iar dacă el e stabil și la perturbații bruște, ce conduc la mișcări oscilatorii de amplitudine finită, se spune că el are *stabilitate dinamică*. Stabilitatea se mai poate clasifica în: *stabilitate pozitivă*, cînd punctele materiale ale sistemului revin la starea inițială de echilibru după un interval de timp finit, *stabilitate neutrală*, cînd punctele materiale ajung într-o nouă stare de echilibru, și *stabilitate negativă* (instabilitate), cînd punctele materiale se depărtează mult, și uneori necontenit, de starea inițială, căpătînd deviații mari față de parametrii care definesc acea stare. Studiul stabilității mișcării a dus la dezvoltarea teoriei ecuațiilor diferențiale. *(Șt.G.)*

statică [gr. *statikos* „care stă în echilibru"], parte a mecanicii care studiază echilibrul sistemelor de puncte materiale sub acțiunea lor reciprocă și a forțelor exterioare. *(Șt.G.)*

statistică matematică [lat. *status* „stare, situație"], teorie matematică care se ocupă cu formularea și interpretarea legilor de comportare ale fenomenelor de masă (inaccesibile metodelor deterministice), sau ale fenomenelor aleatoare, pe baza studiului unor date rezultate din observații asupra acestor fenomene. Baza teoretică a metodelor de investigație utilizate în statistica matematică este teoria probabilităților. Capitolele importante ale statisticii matematice sînt: a) *teoria selecției*, care studiază metodele de alegere a datelor de observație, de grupare și de prelucrare a acestora, în concordanță cu principiile teoriei probabilităților, în scopul de a obține cantitatea de informație necesară stabilirii legii probabilistice corespunzătoare populației statistice; b) *teoria estimației*, care abordează problemele legate de elaborarea metodelor de estimare a

unor parametri numerici, de care depinde repartiţia teoretică a populaţiei statistice studiate; c) *verificarea ipotezelor statistice* elaborează metode de verificare a ipotezelor privind parametrii sau forma repartiţiei pentru una sau mai multe populaţii statistice. Apariţia statisticii matematice se situează în secolele 18—19, prin contribuţiile aduse de D. Bernoulli (1738), J.C. Maxwell (1860) şi, mai cu seamă, de A. Quetelet (începînd cu 1833), care este considerat întemeietorul statisticii moderne. Denumirea se datorează lui G. Achenwall (1749). Statistica matematică a căpătat, treptat, un larg cadru de aplicare în economie, tehnică, fizică, astronomie, biologie, medicină, sociologie, lingvistică etc. *(A.Ş., V.B.)*

steradian [gr. *stereos* „solid", lat. *radius* „rază"] (str), unitate de măsură pentru unghiuri solide, egală cu acel unghi solid care, avînd vîrful în centrul unei sfere, interceptează pe suprafaţa acestuia o arie egală cu pătratul razei sferei. *(V.B.)*

stereometrie, ramură a geometriei, cu caracter aplicativ, care are drept scop determinarea şi măsurarea corpurilor geometrice. Denumirea a fost propusă de Platon (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

Stevin, Simon (1548—1620), matematician şi inginer olandez. Profesor de matematică la Leyda. Ca inginer, a executat importante lucrări de fortificaţii. Este primul care a introdus fracţiile zecimale şi (încă din 1585) a arătat necesitatea şi avantajul sistemului zecimal de măsuri şi greutăţi. Lui i se datorează extinderea algoritmului lui Euclid la aflarea celui mai mare divizor comun a două polinoame, precum şi un criteriu de existenţă a rădăcinii unei ecuaţii într-un interval dat. S-a ocupat cu studiul perspectivei. În domeniul mecanicii şi hidrostaticii a demonstrat experimental compunerea forţelor după regula paralelogramului, a rezolvat, cel dintîi, problema echilibrului unui corp aflat pe un plan înclinat, a elaborat metoda de compunere a trei forţe aplicate aceluiaşi punct, a formulat legea presiunii hidrostatice, a explicat paradoxul ce poartă numele lui Pascal. Op. pr.: *De Beghinselen der Weeghconst*, 1586; *De Beghinselen des Waterwichts*, 1586; *Ideae mathematicae*, 1593; *De Havenvinding*, 1599; *Wiskontige Ghedachtenissen*, 5 volume, 1605—1608). *(V.B.)*

Stoilow, Simion (1887—1961), matematician român. Studii la Paris (doctor la Sorbona, 1916). Profesor la Universitatea din Cernăuţi (din 1923), la Politehnica din Bucureşti (din 1939) şi la Universitatea din Bucureşti (din 1941). Academician (din 1945; membru corespondent din 1936). Membru al unor societăţi internaţionale de matematică. Director al Institutului de matematică al Academiei (din 1954, director adjunct de la înfiinţare, 1949). Organizatorul şcolii româneşti de matematică modernă; a contribuit la formarea a numeroşi matematicieni români. Apreciat pe plan mondial datorită lucrărilor sale referitoare la teoria topologică a funcţiilor analitice, el fiind unul dintre creatorii acesteia (a introdus importanta noţiune de transformare interioară şi a dat o caracterizare topologică a suprafeţelor riemanniene). Contribuţii la studiul ecuaţiilor liniare cu derivate parţiale şi în teoria mulţimilor. Op. pr.: *Leçon sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, 1938; *Teoria funcţiilor de o variabilă complexă* (vol. I, 1954; vol. II, 1958, în colab.; ed. în lb. rusă, 1962). *(V.B.)*

strofoidă [gr. *stropheion* „odgon", *eidos* „aspect"], curbă plană, loc geometric al punctelor M, M' ale unei drepte mobile, ce trece printr-un punct fix P de pe latura unui unghi

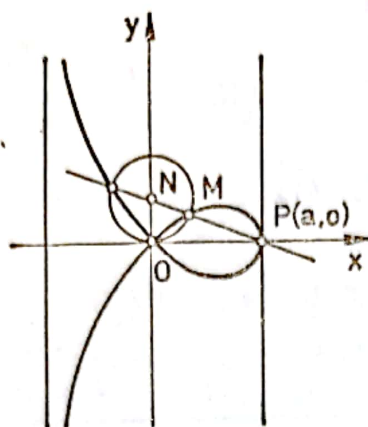


Fig. 157

drept POD și care intersectează cealaltă latură a unghiului drept în N, astfel încît $MN = M'N = NO$ (fig. 157). În raport cu sistemul de coordonate avînd axele suprapuse pe laturile unghiului drept, ecuația curbei este:

$$y = \pm x \sqrt{\frac{a - x}{a + x}},$$

unde $a = PO$. Curba admite asimptota verticală $x = -a$. Ecuația în coordonate polare (cu polul în O și avînd ca axă polară axa Ox) este:

$$\rho = \frac{a \cos 2\theta}{\cos \theta}.$$

Aria domeniului mărginit de bucla strofoidei este:

$$A = \left(2 - \frac{\pi}{2}\right) a^2,$$

iar aria domeniului cuprins între strofoidă și asimptota ei se calculează prin formula:

$$A = \left(2 + \frac{\pi}{2}\right) a^2.$$

Studiată inițial de E. Torricelli (1645), denumirea i-a fost dată de E. Montucci (1846). *(V.B.)*

structură algebrică [lat. *structura* „alcătuire, compoziție"] (pe o mulțime M), familie de relații între elemente sau părți din M, constînd în legi de compoziție interne sau externe (cînd este dat un domeniu de operatori) peste tot definite și supuse eventual unor condiții (comutativitate, asociativitate). Ex.: structura de grup, inel, modul, spațiu vectorial. *(V.B., A.B.)*

structură topologică → **spațiu topologic**

subgrup [lat. *sub* „sub, în", *grup*] (al unui grup G), orice parte G' a lui G care, împreună cu operația de compunere a grupului G, este ea însăși grup. Ex.: mulțimea numerelor întregi pare, împreună cu adunarea, este un subgrup al grupului aditiv al tuturor întregilor; mulțimea întregilor **Z** este un subgrup al grupului aditiv **Q** al numerelor raționale; **Q** este subgrup al grupului aditiv **R** al numerelor reale. *(V.B.)*

submulțime (a unei mulțimi B), mulțime A ale cărei elemente aparțin mulțimii B: $A \subset B$. Mulțimea vidă și mulțimea însăși se numesc submulțimi improprii ale mulțimii considerate. *(V.B.)*

subnormală, segment de pe axa Ox, determinat de proiecția ortogonală P a unui punct M al unei curbe plane și de intersecția N cu această axă a

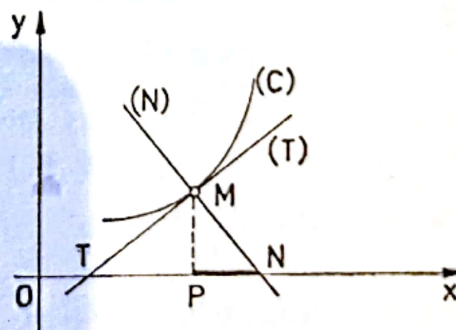


Fig. 158

normalei la curbă în punctul considerat (fig. 158). Lungimea subnormalei unei curbe cu ecuația $y = f(x)$ este dată de formula:

$$PN = y \cdot y',$$

iar în cazul curbei dată parametric $x = x(t)$, $y = y(t)$:

$$PN = \frac{y \cdot y'}{x'},$$

unde x', y, y', au valorile corespunzătoare coordonatelor punctului M. *(V.B.)*

subrutină, program scris pentru efectuarea unui grup de operații care intervin ca parte determinantă a unui proces de calcul mai complex. — *Subrutină deschisă*, subrutină care se introduce în programul principal ori de cîte ori e necesar în timpul execuției. — *Subrutină închisă*, subrutină care este memorată o singură dată într-o regiune de memorie diferită de cea în care este programul principal. Utilizarea ei este realizată printr-o tehnică ce asigură intrarea în subrutină, la cererea programului principal și ieșirea din subrutină, cu revenire la punctul de chemare. *(T.B.)*

substituție [lat. *substitutio* „înlocuire"], înlocuirea unui element sau a mai multor elemente, dintr-o expresie matematică, prin alte elemente. Ex.: ecuația $\operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2 \cos x - 1 = 0$ devine prin substituția $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = t$:

$$t^3 + t^2 + t - 3 = 0. \quad (V.B.)$$

subșir (al unui șir (a_n)), șir $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}, \ldots$ $(n_1 < n_2 < \ldots < n_p < \ldots)$ format cu elementele șirului (a_n). *(V.B.)*

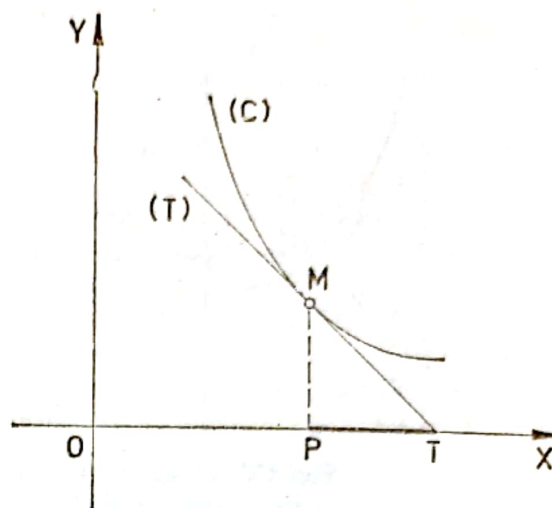


Fig. 159

subtangentă, segment determinat de proiecția ortogonală P, pe axa absciselor, a unui punct M de pe o curbă plană și de intersecția P a tangentei la curbă, în acel punct, cu axa absciselor (fig. 159). Lungimea subtangentei unei curbe cu ecuația $y = f(x)$ este dată de formula:

$$PT = \frac{y}{y'},$$

iar în cazul cînd curba este dată parametric $x = x(t)$, $y = y(t)$:

$$PT = \frac{x'y}{y'},$$

unde x', y, y', au valorile corespunzătoare coordonatelor punctului de tangență M. *(V.B.)*

sumă [lat. *summa* „sumă, total"] **1.** → *adunare.* **2.** Simbolul „Σ" folosit pentru scrierea prescurtată a unor sume (1):

$$\sum_{k=n_0}^{n} a_k = a_{n_0} + a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots + a_n,$$

unde k se numește *indice de sumare*,

Ex.: $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + \ldots + n$;

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^{n-k} b^k = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + \\ + \ldots + C_n^n b^n = (a + b)^n.$$

Simbolul „Σ" poate fi utilizat și fără specificarea indicilor de sumare. Ex.:

$(a + b + \ldots + k)^2 = \Sigma a^2 + 2\Sigma ab$,

unde Σa^2 înseamnă suma pătratelor tuturor termenilor din paranteză, iar Σab, suma tuturor produselor a doi termeni distincți;

$\Sigma \sin A = \sin A + \sin B + \sin C$, unde A, B, C, sînt unghiurile unui triunghi. Simbolul a fost propus de L. Euler *(Institutiones calculi differentialis*, 1755). *(V.B.)*

sumă parțială (a unei serii) → **serie**

supervizor, program de control care supraveghează activitatea unui sistem de calcul, avînd atribuția de a prelucra întreruperile de program, de a controla operațiile de intrare/ieșire a datelor și programele active ale sistemului, de a încărca în memoria principală programe din biblioteca sistemului și de a reactualiza comunicarea dintre om și calculator. Se mai numește program *monitor*. *(T.B.)*

suprafață [lat. *super* „deasupra, pe", *facies* „față, formă exterioară"], **figură geometrică în spațiu generată prin mișcarea unui punct M, a cărei poziție depinde de doi parametri independenți. Într-un sistem de referință cartezian ecuațiile:**

$$x = x(u, v)$$
$$y = y(u, v)$$
$$z = z(u, v),$$

unde u și v sînt doi parametri reali, dau coordonatele punctului M de pe suprafață și se numesc *ecuațiile parametrice* ale suprafeței (K. Gauss, 1823). Eliminînd parametrii u și v, între aceste ecuații, se obține ecuația suprafeței sub forma $f(x, y, z) = 0$ (P. Fermat, 1679) sau explicit, una sau mai multe pînze $z = z(x, y)$. Denumirea a fost adoptată ca urmare a definiției formulate de Platon (sec. 4 î.e.n.): suprafața este marginea unui corp. *(V.B.)*

suprafață cilindrică (În geometria elementară), suprafață generată de o dreaptă de direcție dată care se sprijină pe o curbă dată. Se mai numește *cilindru* (2). *(V.B.)*

suprafață conică (În geometria elementară), suprafață generată de o dreaptă ce trece printr-un punct fix și se sprijină pe o curbă dată. Se mai numește *con* (2). *(V.B.)*

suprafață de rotație, suprafață generată de un cerc mobil, cu centrul pe o dreaptă dată, situat într-un plan perpendicular pe dreaptă și care se sprijină pe o curbă dată. *(V.B.)*

suprafață desfășurabilă, suprafață care poate fi aplicată pe un plan, fără îndoire sau rupere. Suprafețele desfășurabile au fost considerate prima oară de L. Euler (1771). *(V.B.)*

suprafață piramidală, suprafață generată de o dreaptă ce trece printr-un punct fix și se sprijină pe o linie frîntă închisă. *(V.B.)*

suprafață poliedrală, suprafață formată din poligoane situate în plane diferite, care au laturi comune. *(V.B.)*

suprafață prismatică, suprafață generată de o dreaptă de direcție dată, care se sprijină pe o linie frîntă închisă. *(V.B.)*

suprafață riglată, suprafață generată de o dreaptă mobilă a cărei poziție

depinde de un singur parametru. Ex.: cilindrul, conul. *(V.B.)*

suprafață Țițeica, suprafață cu proprietatea: $kd^2 = \text{const.}$, unde d este distanța de la un punct fix O la planul tangent la suprafață într-un punct, iar $\frac{1}{k^2}$ este curbura totală în acel punct. O transformare afină care lasă neschimbată originea (transformare centroafină) transformă o suprafață Țițeica într-o suprafață Țițeica. Noțiunea a fost introdusă de geometrul român Gh. Țițeica (1907). *(V.B.)*

surjecție → funcție surjectivă

sută [sanscr. *satam*], număr natural egal cu 10^2. Se mai notează cu cifra romană C (inițiala cuvîntului latin *centum* „sută"). *(V.B.)*

șapte [lat. *septem*, termen provenit din cuvîntul sanscrit *sapta*], număr natural reprezentat prin cifra 7 sau, după sistemul roman, prin simbolul VII. *(V.B.)*

șase [sanscr. *șaș*], număr natural redat prin cifra 6 sau, conform sistemului roman, prin simbolul VI. *(V.B.)*

șir ((a_n)), funcție definită pe mulțimea numerelor naturale. Imaginea a_n a numărului natural n, se numește termenul de rang n al șirului. Termenii unui șir pot fi numere reale (șir numeric), funcții sau în general elemente ale unui spațiu topologic. Un șir care admite limită se numește *șir convergent*. În mulțimea șirurilor numerice se definesc operațiile de adunare $(a_n) + (b_n) = (a_n + b_n)$, înmulțire $(a_n)\cdot(b_n) = (a_n \cdot b_n)$, înmulțire cu un număr real $\alpha\cdot(a_n) = (\alpha\cdot a_n)$, împărțire $\left(\frac{(a_n)}{(b_n)}\right) = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)$ (dacă $b_n \neq 0$) și dacă șirurile sînt convergente au loc egalitățile: $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n + b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} b_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha\cdot a_n) = \alpha\cdot\lim\limits_{n\to\infty} a_n$, $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$ ($\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$). Mulțimea șirurilor convergente formează o algebră. — *Șir divergent*, șir care nu este convergent. Ex.: șirul $(-1)^n$. Definiția șirului, ca funcție definită pe **N**, a fost dată de G. Peano (1897). *(V.B.)*

șir Cauchy → șir fundamental

șir crescător, șir de numere reale cu proprietatea $a_n \leqslant a_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$. — *Șir strict crescător*, șir de numere reale cu proprietatea $a_n < a_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Ex.: șirul $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ este strict crescător. *(V.B.)*

șir descrescător, șir de numere reale, cu proprietatea $a_n \geqslant a_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$. — *Șir strict descrescător*, șir de numere reale, cu proprietatea $a_n > a_{n+1}$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Ex.: șirul $a_n = \frac{1}{n}$ este strict descrescător. *(V.B.)*

șir fundamental, șir (x_n) de elemente ale unui spațiu metric, cu proprietatea că, oricare ar fi $\varepsilon > 0$ există un rang N_ε (care depinde de ε), astfel încît $d(x_n, x_m) < \varepsilon$, pentru orice $n, m \in \mathbf{N}$. Orice șir fundamental de numere reale este convergent, și reciproc. (**R** considerat ca spațiu metric cu $d(x, y) = |x - y|$). Denumirea a fost propusă de G. Cantor. Se mai numește *șir Cauchy*. *(V.B.)*

șirul lui Fibonacci, șir recurent definit prin $a_1 = 1$, $a_2 = 1$, $a_{n+2} = a_{n+1} +$

$+ a_n$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$. Numărul a_n se calculează prin formula: $a_n =$

$$= \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right],$$

de unde rezultă: $a_1 = 1, a_2 = 1, a_3 = 2, a_4 = 3, a_5 = 5, a_6 = 8$ etc. Numerele lui Fibonacci au o serie de proprietăţi; prezenţa lor este întîlnită în lumea plantelor superioare: fiecare plantă se caracterizează printr-un unghi propriu de divergenţă între două frunze (sau între doi muguri, sau între două flori) învecinate dispuse în spirală împrejurul unei crengi, astfel: la tei şi ulm unghiul de divergenţă al frunzelor cuprinde $\frac{1}{2}$ din circumferinţă; la fag, $\frac{1}{3}$; la stejar şi vişin, $\frac{2}{5}$; la plop şi păr, $\frac{3}{8}$; la salcie, $\frac{5}{13}$ etc. — fracţii la care numărătorii şi numitorii sînt numere ale şirului Fibonacci. Acest şir a fost pus în evidenţă de L. P. Fibonacci (1202). *(V.B.)*

şir mărginit, şir de numere reale, cu proprietatea că $\alpha \leqslant a_n \leqslant \beta$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{R})$. O condiţie echivalentă este $|a_n| < M$, pentru orice $n \in \mathbf{N}$ $(M \in \mathbf{R})$. *(V.B.)*

şir monoton, şir de numere reale crescător sau descrescător. Orice şir monoton şi mărginit este convergent. — *Şir strict monoton,* şir de numere reale strict crescător sau strict descrescător. *(V.B.)*

şir recurent [lat. *recurent-tis* „cel care revine"], şir cu proprietatea că un termen se exprimă în funcţie de termenii precedenţi. Ex.: şirul lui Fibonacci, progresiile aritmetice, geometrice ş.a. Denumirea a fost propusă de A. Moivre (1724). *(V.B.)*

T, Ţ

tabelă matematică [lat. *tabella* „tăbliţă"], mulţime a valorilor unei funcţii care corespund anumitor valori ale argumentelor, valori ce se obţin prin calcul, prin experienţe sau prin observaţii şi care se aranjează, de obicei, într-o anumită ordine în şiruri şi în coloane. Cele mai vechi tabele matematice au fost întocmite de babilonieni pentru funcţiile: $\frac{1}{n}$, n^2, $\sqrt{n}$, n^3, $n^2 + n^3$ etc. (unde n este număr natural). Alte tabele mai cunoscute sînt: tabelele cu puteri, radicali, logaritmi, tabele pentru funcţii trigonometrice, tabelele pentru calculul dobînzilor ş.a. Tabelele matematice au o largă utilizare în tehnică, astronomie, fizică, chimie etc. — *Tabla înmulţirii* (a lui Pitagora), tabelă compusă dintr-un pătrat cu 10 linii şi 10 coloane, prima linie (de sus) şi prima coloană (din stînga) cuprinzînd numerele de la 1 la 10; a doua linie (respectiv, coloană) conţine multiplii consecutivi ai lui 2, a treia linie (coloană) conţine multiplii lui 3 ş.a.m.d.; produsul unui număr din prima linie cu un număr din prima coloană se află la intersecţia coloanei şi liniei cărora le aparţin numerele factori. *(V.B.)*

Tales din Milet (624—546 î.e.n.), matematician, astronom, filozof, inginer şi om politic grec (de origine feniciană). În prima jumătate a secolului 6 î.e.n. a întreprins o călătorie în Egipt, avînd posibilitatea să cunoască realizările matematice de aici. A fondat în Milet cea mai veche şcoală filozofică materialistă, de care este legată naşterea matematicii greceşti. Este primul matematician care a enunţat teoreme însoţite de demonstraţii şi anume: diametrul împarte cercul în două părţi egale; unghiul înscris într-un semicerc este drept; suma unghiurilor unui triunghi este de două unghiuri drepte; unghiurile de la baza unui triunghi isoscel sînt egale; egalitatea triunghiurilor care au o latură şi unghiurile adiacente egale; asemănarea triunghiurilor avînd unghiurile respectiv egale (în corelaţie cu teorema ce-i poartă numele). Î se atribuie şi prima aplicaţie a compasului şi a vasometrului, măsurarea înălţimii unei piramide după lungimea umbrei ei, precum şi procedeul de a determina distanţa unei corăbii de la ţărm, vizată din două puncte de pe mal. Ca astronom, este primul care a afirmat că Luna primeşte lumina de la Soare şi a prezis eclipsa de Soare din 28 mai 585 î.e.n. *(V.B.)*

tangentă [lat. *tangens-ntis* „care atinge"] (la o curbă într-un punct M), limita secantei MM', cînd M' tinde către M, unde M' este un punct al curbei (fig. 160). Pentru o curbă dată prin ecuaţiile: $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, ecuaţiile tangentei sînt:

$$\frac{X - x}{x'} = \frac{Y - y}{y'} = \frac{Z - z}{z'},$$

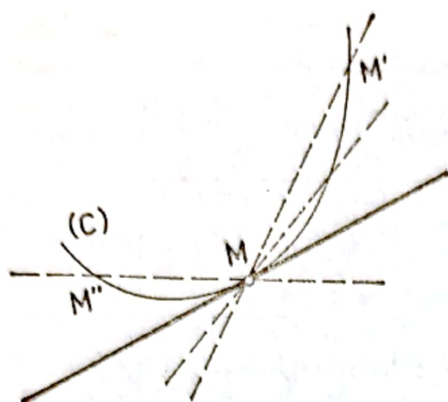


Fig. 160

unde x, y, z, x', y', z' sînt luate în punctul M. În cazul curbei dată prin ecuațiile: $f_1(x, y, z) = 0$, $f_2(x, y, z) = 0$, ecuațiile tangentei sînt:

$$\frac{X - x}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{vmatrix}} = \frac{Y - y}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial z} & \frac{\partial f_1}{\partial x} \\ \frac{\partial f_2}{\partial z} & \frac{\partial f_2}{\partial x} \end{vmatrix}} = \frac{Z - z}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}},$$

unde x, y, z și derivatele parțiale sînt luate în punctul M. La o curbă plană dată prin ecuația $f(x, y) = 0$, ecuația tangentei este:

$$(X - x)\frac{\partial f}{\partial x} + (Y - y)\frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

(x, y) fiind coordonatele lui M (derivatele parțiale sînt luate în M). Pentru curba $y = f(x)$ ecuația tangentei este:

$$Y - y = f'(x)\,(X - x),$$

unde (x, y) sînt coordonatele lui M, iar coeficientul unghiular al tangentei este egal cu valoarea derivatei funcției $f(x)$ în punctul M. Ecuațiile tangentelor la conice (cu ecuația redusă), stabilite de J. Biot (1802), sînt date în tabelul 5. *(V.B.)*

tangentă (tg) **1.** (Pentru un unghi ascuțit al unui triunghi dreptunghic). Raportul dintre cateta opusă și cea alăturată unghiului. **2.** (Pentru un unghi orientat, cu vîrful în originea unui reper cartezian, avînd latura inițială pe semiaxa pozitivă a absciselor). Raportul dintre lungimile proiecțiilor, pe axa ordonatelor și pe axa absciselor, a razei vectoare a unui punct de pe latura finală a unghiului. **3.** (Pentru un argument numeric). Funcție care atașează unui argument x valoarea tangentei unghiului orientat de x radiani. Funcția tg x este definită pe $\mathbf{R} - \left\{(2k + 1)\frac{\pi}{2}\right\}$, $(k \in \mathbf{Z})$, cu valori în $\mathbf{R}$; este o funcție periodică de perioada π: $\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$ și impară:

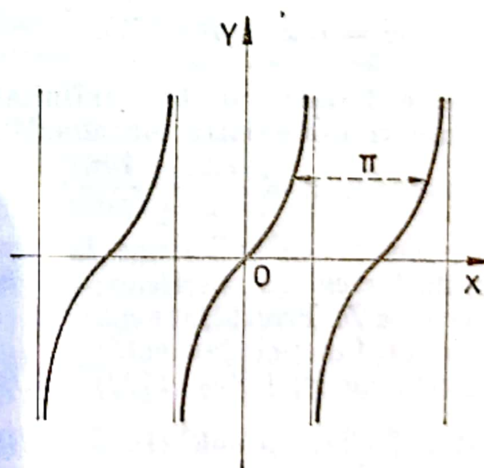


Fig. 161

Tabelul 5

Natura conicei	Ecuaţia conicei	Ecuaţia tangentei în punctul $M(x_0, y_0)$	Ecuaţia tangentei de pantă m
elipsă	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0$	$\frac{xx_0}{a^2}+\frac{yy_0}{b^2}-1=0$	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2+b^2}$
hiperbolă	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-1=0$	$\frac{xx_0}{a^2}-\frac{yy_0}{b^2}-1=0$	$y=mx\pm\sqrt{a^2m^2-b^2}$
parabolă	$y^2=2px$	$yy_0-p(x+x_0)=0$	$y=mx+\frac{p}{2m}$

$\mathrm{tg}(-x)=-\mathrm{tg}x$. De asemenea, $\mathrm{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$ (Abul-Vefa, sec. 10). Noţiunea a fost introdusă de J. Müller Regiomontanus (1464), denumirea a fost propusă de T. Fink (1538), iar notaţia de T. Simpson (1748) şi L. Euler (1753). *(V.B.)*

tangentă hiperbolică → funcţii hiperbolice

tangentoidă [*tangentă*, gr. *eidos* „formă, aspect"], curbă plană reprezentată, în raport cu un reper cartezian, de o ecuaţie de forma:

$$y=\mathrm{tg}x \quad \text{(fig. 161).}$$

Curba e formată dintr-o infinitate de ramuri egale între ele admiţînd asimptotele: $x=\frac{(2k+1)\pi}{2}$ şi care au punctele de inflexiune la intersecţiile lor cu axa absciselor: $x=k\pi$, unde $k\in\mathbf{Z}$. Prima tangentoidă, ca grafic al funcţiei tangentă, a fost realizată de R. Cotes (1722). *(V.B.)*

Taylor [tẹilə], **Brook** (1685—1731), matematician englez. Membru în Royal Society din Londra. Lucrarea sa cea mai importantă este intitulată *Methodus incrementorum directa et inversa* (1715); aici a expus metoda dezvoltării în serie a unei funcţii, a pus, pentru prima dată, problema coardei vibrante de la care ulterior s-a ajuns la seriile trigonometrice; a studiat probleme de izoperimetrie. Unul dintre creatorii teoriei diferenţelor finite. A studiat problemele perspectivei şi aplicaţiile acesteia. *(V.B.)*

tăietura lui Dedekind, împărţire a mulţimii numerelor raţionale **Q** în două clase A şi B, disjuncte, astfel încît orice număr din clasa A este mai mic decît orice număr din clasa B. — *Tăietura de speţa întîi*, tăietură, astfel încît există în clasa A un număr mai mare decît orice număr din A, sau există în B un număr mai mic decît orice număr din B. O tăietură de speţa întîi defineşte un număr raţional, şi anume cel mai mare număr din A sau cel mai mic din B. Ex.: aşezînd în B toate numerele al căror pătrat este mai mare decît 9, iar în A pe toate celelalte, 3 se află în A (pentru că $3^2=9$ nu este mai mare decît 9), fiind cel mai mare număr din clasa A; prin această tăietură se defineşte numărul

raţional 3. — *Tăietura de speţa a doua*, tăietură, astfel încît nu există în A un număr mai mare decît toate din A şi nici în B un număr mai mic decît toate din B. O tăietură de speţa a doua defineşte un număr iraţional, care este mai mare decît orice număr din A şi mai mic decît orice număr din B. Ex.: aşezînd în A toate numerele raţionale a căror pătrat este mai mic decît 2, iar în B pe toate celelalte, nu există în A un număr mai mare decît toate cele din A şi nu există în B un număr mai mic decît toate din B; această tăietură definind numărul iraţional $\sqrt{2}$. Considerarea acestor tăieturi în mulţimea numerelor raţionale a fost făcută de R. Dedekind (1872), fiind concepută în scopul definirii numerelor iraţionale. *(V.B.)*

tensor [lat. *tendo-tensum* „a întinde"], mărime, ataşată unui punct, dintr-un spaţiu cu o anumită structură geometrică, care asociază fiecărui sistem de coordonate (specific acestui spaţiu) un ansamblu ordonat de componente scalare care, la schimbarea sistemului de coordonate, se transformă prin anumite relaţii liniare şi omogene, la fel ca şi componentele scalare ale unor vectori (faţă de care tensorii sînt, într-un anumit sens, o generalizare). Noţiunea a apărut (la mijlocul sec. 19) în urma cercetărilor aprofundate în mecanica mediilor continue deformabile şi s-a dezvoltat odată cu apariţia teoriei relativităţii; însuşi termenul a fost adoptat datorită faptului că una dintre primele mărimi de acest gen studiate a fost sistemul tensiunilor într-un punct oarecare al unui corp elastic supus întinderii. Tensorii se clasifică după ordinul lor: tensori de ordinul zero (scalarii), tensori de ordinul întîi (vectorii), tensori de ordinul al doilea, al treilea etc.; după structura lor: tensorii covarianţi, contravarianţi, micşti, precum şi după numărul de dimensiuni ale spaţiului considerat. Ordinul unui tensor dintr-un spaţiu cu n dimensiuni este numărul m, prin care se exprimă cele n^m componente ale tensorului (adică, cîte o componentă fiecărui aranjament cu repetiţie de n coordonate luate cîte m); astfel, în spaţiul euclidian cu trei dimensiuni, scalarii sînt tensori de ordinul zero, $3^0 = 1$, aceştia asociază fiecărui reper o valoare unică; vectorii sînt tensori de ordinul întîi, $3^1 = 3$, aceştia asociind fiecărui reper $Ox_1x_2x_3$, definit printr-un sistem de vectori necoplanari $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$, trei componente scalare v_1, v_2, v_3, astfel încît:

$$\mathbf{v} = \mathbf{e}_1v_1 + \mathbf{e}_2v_2 + \mathbf{e}_3v_3 = \sum_{s=1}^{3} \mathbf{e}_sv_s.$$

Tensorul de ordinul al doilea asociază fiecărui reper cartezian $Ox_1x_2x_3$, cîte $3^2 = 9$ componente scalare alcătuind matricea:

$$T = \begin{Vmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{21} & t_{22} & t_{23} \\ t_{31} & t_{32} & t_{33} \end{Vmatrix}$$

(ordinul oricărui tensor este egal cu numărul indicilor componentelor lui). Ex.: tensorul tensiunilor elastice: fiind dat un corp elastic şi considerînd în interiorul lui un volum V mărginit de o suprafaţă S, pe fiecare element dS al acestei suprafeţe va acţiona din partea particulelor corpului, situate în exteriorul volumului V, o forţă care provine din deformaţia corpului, fiind proporţională cu mărimea elementului de arie dS şi depinzînd de direcţia normalei $\mathbf{n}$ la elementul considerat: $\mathbf{T}_n\, dS$ (vectorul $\mathbf{T}_n$, numit tensiune, nu are, în general, aceeaşi direcţie ca $\mathbf{n}$). Odată cu vectorul $\mathbf{T}_n$ se pot defini, pentru fiecare sistem de coordonate, vectorii $\mathbf{T}_x, \mathbf{T}_y, \mathbf{T}_z$ (unde $\mathbf{T}_x$, de exemplu, este vectorul tensiune pe elementul

de arie perpendicular pe axa Ox); componentele acestor vectori pe axele Ox, Oy, Oz, alcătuiesc matricea:

$$T = \begin{Vmatrix} t_{xx} & t_{xy} & t_{xz} \\ t_{yx} & t_{yy} & t_{yz} \\ t_{zx} & t_{zy} & t_{zz} \end{Vmatrix}.$$

definind un tensor al tensiunilor în fiecare punct al unui corp elastic:

$$\mathbf{T} = \mathbf{e}_1\mathbf{T}_1 + \mathbf{e}_2\mathbf{T}_2 + \mathbf{e}_3\mathbf{T}_3 = \sum_{s=1}^{3} \mathbf{e}_s\mathbf{T}_s$$

prin cei trei vectori: $\mathbf{T}_1 = \mathbf{T}_x$, $\mathbf{T}_2 = \mathbf{T}_y$, $\mathbf{T}_3 = \mathbf{T}_z$. Alte exemple de tensori de ordinul al doilea în spațiul tridimensional sînt: tensorul deformațiilor, tensorul momentului de inerție al unui solid rigid ce se rotește în jurul unui punct fix, tensorul viteză unghiulară instantanee ș.a. În spațiul cvadridimensional, un tensor de ordinul al doilea este tensorul energie-impuls (sau tensorul tensiunilor cinetice, după denumirea lui T. Levi-Civita). *(V.B.)*

Teodorescu, Nicolae (n. 1908), matematician român. Studii la Facultatea de Științe din București și la Paris (doctor la Sorbona, 1931). Profesor la Institutul Politehnic din București (din 1942) și la Universitatea din București (din 1948). Membru al Academiei R.S. România (din 1963; membru corespondent din 1955). Contribuții privind geometrizarea ecuațiilor cu derivate parțiale și generalizarea noțiunii de derivată areolară. Lucrări de fizică matematică. Op. pr.: *La dérivée aréolaire et ses applications à la Physique mathématique*, 1931; *Metode vectoriale în fizica matematică* (vol. I, 1953; vol. II, 1954). *(V.B.)*

teorema ariilor (în cazul mișcării plane): vitezele areolare, ale punctelor materiale ale unui sistem, față de un punct O al planului, multiplicate cu masele respective, dau o sumă constantă, dacă forțele exterioare au un moment nul față de normala în O, la planul punctelor, adică $\sum_{1}^{n} m_j \Omega_j = \frac{C}{2}$. Constanta C poartă numele de constanta ariilor. *(Șt.G.)*

teorema bisectoarei → bisectoare

teorema celor trei perpendiculare: dacă dintr-un punct O exterior unui plan π se duce perpendiculara OA pe plan și dacă din piciorul acesteia se duce perpendiculara AI pe o dreaptă (d) a planului, atunci dreapta OI este perpendiculară pe (d) (fig. 162). *(V.B.)*

teorema cosinusurilor → formule trigonometrice

teorema creșterilor finite 1. (Prima) → *teorema lui Lagrange*. **2.** (A doua) → *teorema lui Cauchy*.

teorema energiei cinetice: în orice moment, diferențiala energiei cinetice este egală cu suma lucrului mecanic elementar al forțelor exterioare și a lucrului mecanic elementar al forțelor interioare: $dE = dL_{ext} + dL_{int}$, unde $dL_{ext} = \sum_{1}^{n} \mathbf{F}_j \cdot d\mathbf{r}_j$ iar $dL_{int} = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_{jk} \right) \cdot d\mathbf{r}_j$. Dacă sistemul de puncte materiale este rigid, atunci lucrul mecanic elementar al forțelor interioare este nul. *(Șt.G.)*

teorema fundamentală a algebrei → ecuație algebrică

teorema impulsului: derivata impulsului în raport cu timpul este egală cu suma forțelor exterioare care acționează asupra punctelor materiale ce formează sistemul considerat, adică

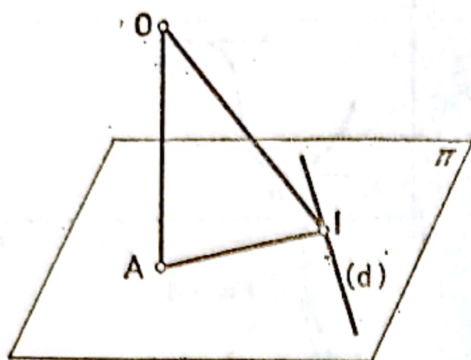


Fig. 162

$\hat{H} = \sum_{1}^{n} F_j$. *(Ş.t.G.)*

teorema lui Abel → **rază de convergență**

teorema lui Bézout: valoarea polinomului $P(x)$, pentru $x = a$, este egală cu restul împărțirii polinomului $P(x)$ prin $x - a$. Corolar: un polinom $P(x)$ este divizibil cu $x - a$ dacă și numai dacă a este o rădăcină a ecuației $P(x) = 0$. Teorema, precum și alte contribuții privind rezolvarea sistemelor de ecuații algebrice de grad superior, se datorează lui E. Bézout (1779). *(V.B.)*

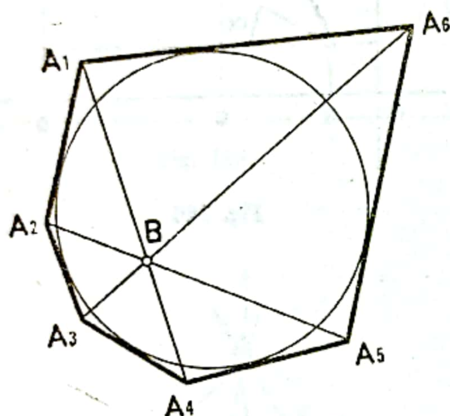


Fig. 163

teorema lui Brianchon: cele trei diagonale care unesc vîrfurile opuse ale unui exagon circumscris unei conice sînt concurente (fig. 163) (Ch. Brianchon, 1806). Este duala teoremei lui Pascal. *(V.B.)*

teorema lui Cauchy: dacă f și g sînt două funcții definite pe un interval I și a, b două puncte din $I (a < b)$ și dacă f, g sînt continue pe $[a, b]$, derivabile pe (a, b), iar $g'(x) \neq 0$ pe (a, b), atunci $g(b) \neq g(a)$ și există un punct c, $a < c < b$, astfel încît:

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

Se mai numește *teorema creșterilor finite (a doua). (V.B.)*

teorema lui Cauchy și Hadamard → **rază de convergență**

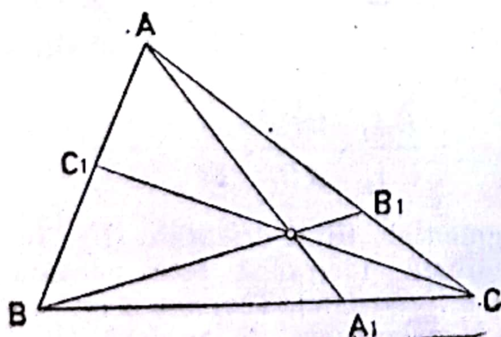


Fig. 164

teorema lui Ceva: dacă în triunghiul ABC, AA_1, BB_1, CC_1 sînt trei ceviene concurente atunci:

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = -1,$$

segmentele fiind orientate (fig. 164). Teorema reciprocă este adevărată (→ *concurență*). Teorema a fost dată de G. Ceva (sec. 17). *(V.B.)*

teorema lui Darboux: dacă f este o funcţie derivabilă pe un interval I, atunci derivata sa, f', are proprietatea lui Darboux. *(V.B.)*

teorema lui Desargues → triunghiuri omologice

teorema lui Euler: dacă o placă rigidă plană se deplasează în propriul ei plan, poate trece de la o poziţie la alta fie printr-o translaţie, fie printr-o rotaţie. *(Şt.G.)*

teorema lui Fermat 1. (În teoria numerelor): dacă p este un număr prim, care nu divide numărul întreg a, atunci $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$. — *Marea teoremă a lui Fermat → ecuaţie diofantică.* **2.** (În analiza matematică): o funcţie derivabilă pe un interval are derivata nulă în orice punct de extrem din interiorul intervalului (fig. 165). *(V.B.)*

teorema lui Guldin: volumul corpului generat de un trapez curbiliniu, care se roteşte în jurul laturii perpendiculare pe baze, este egal cu aria trapezului înmulţită cu lungimea cercului descris de centrul său de greutate. Teorema era cunoscută de Pappus (sec. 3); în forma actuală se datorează lui P. Guldin (1635). *(V.B.)*

teorema lui Lagrange: dacă f este o funcţie definită pe un interval I şi a, b două puncte din I $(a < b)$, şi dacă f este continuă pe $[a, b]$ şi derivabilă pe (a, b), atunci există un punct c, $a < c < b$, astfel încît:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \qquad \text{(fig. 166).}$$

Se mai numeşte *teorema creşterilor finite (prima)*. *(V.B.)*

teorema lui Lami: dacă trei forţe concurente sînt în echilibru, intensitatea fiecăreia este proporţională cu sinusul unghiului dintre celelalte două. *(Şt.G.)*

teorema lui Menelaus: dacă o dreaptă intersectează laturile unui triunghi ABC, sau prelungirile lor, în A_1, B_1, C_1 atunci:

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1,$$

segmentele fiind orientate (fig. 167). Teorema reciprocă este adevărată (→ *coliniaritate*). Teorema a fost dată de Menelaus (sec. 2), pe sferă. *(V.B.)*

teorema lui Morley → trisectoare

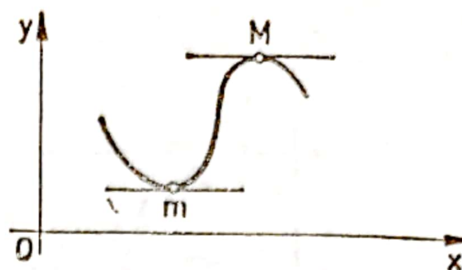


Fig. 165

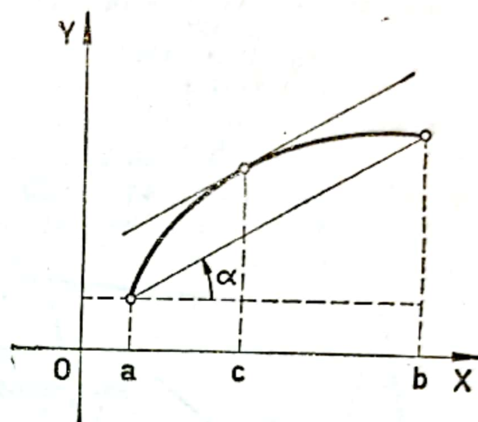


Fig. 166

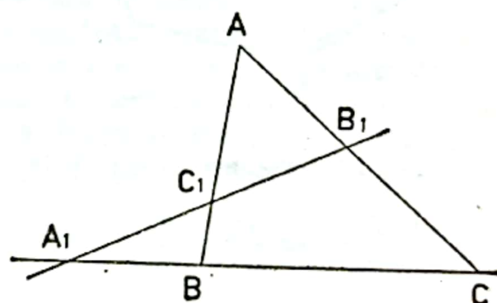


Fig. 167

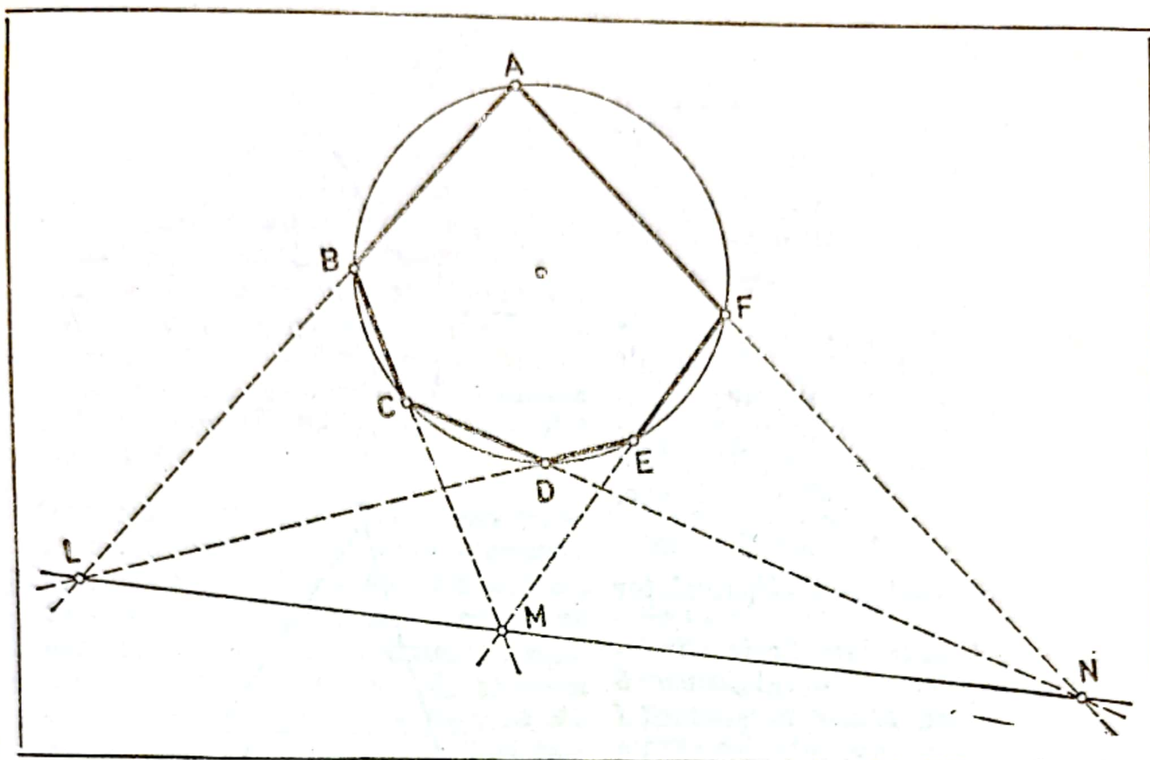


Fig. 168

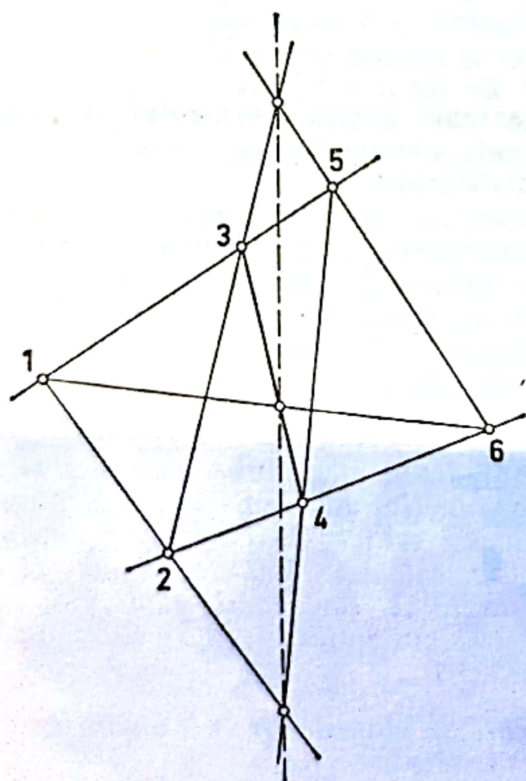


Fig. 169

teorema lui Pappus → **teorema lui Pascal**

teorema lui Pascal: laturile opuse ale unui exagon înscris într-o conică se intersectează în trei puncte coliniare (fig. 168) (B. Pascal, 1640). Atunci cînd conica degenerează în două drepte concurente se obține *teorema lui Pappus* (fig. 169). *(V.B.)*

teorema lui Pitagora: într-un triunghi dreptunghic, pătratul ipotenuzei este egal cu suma pătratelor catetelor (fig. 170):

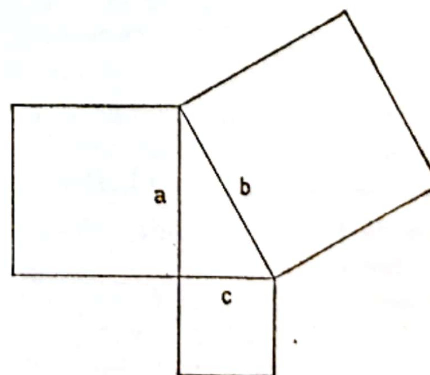


Fig. 170

$$a^2 = b^2 + c^2.$$

Teorema era cunoscută în cazuri numerice particulare de către sumerieni (sec. 20 î.e.n.). În şcoala lui Pitagora (sec. 6—5 î.e.n.) a fost extinsă pentru orice triunghi dreptunghic. *(V.B.)*

teorema lui Pompeiu: distanţele de la un punct, la cele trei vîrfuri ale unui triunghi echilateral, din acelaşi plan, sînt laturile unui triunghi. Teorema a fost dată de D. Pompeiu (1936), utilizînd numerele complexe. *(V.B.)*

teorema lui Ptolemeu → patrulater

teorema lui Rolle: dacă f este o funcţie definită pe un interval I şi a, b două puncte din $I (a < b)$ şi dacă f este continuă pe $[a, b]$, derivabilă pe (a, b), iar $f(a) = f(b)$, atunci există un punct c, $a < c < b$, în care derivata se anulează, $f'(c) = 0$ (fig. 171). Teorema se datorează lui M. Rolle (1690). *(V.B.)*

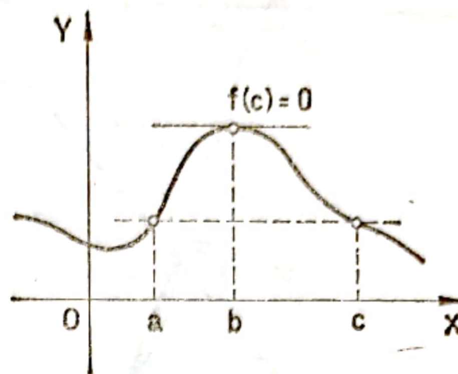


Fig. 171

teorema lui Rouche → sistem de ecuaţii

teorema lui Schwarz → derivată parţială

teorema lui Tales: o paralelă la o latură a unui triunghi împarte celelalte două laturi în segmente proporţionale (fig. 172):

$$\frac{AM}{MB} = \frac{AN}{NC}.$$

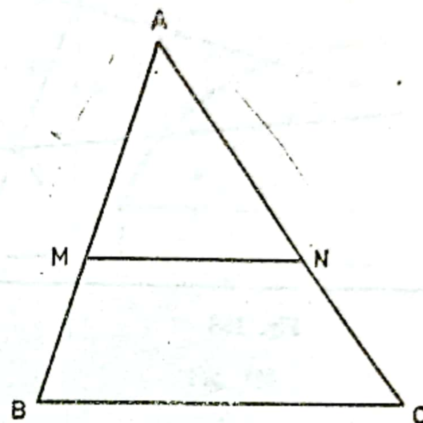


Fig. 172

Reciproca este adevărată: dacă relaţia precedentă are loc, atunci MN este paralelă cu BC. *(V.B.)*

teorema lui Varignon: momentul faţă de un punct O al rezultantei generale, aplicate în A, al unui sistem de forţe concurente în A, este egal cu suma momentelor forţelor sistemului faţă de A. *(Şt.G.)*

teorema lui Wilson → număr prim

teorema mişcării centrului maselor: centrul maselor unui sistem de puncte materiale se deplasează ca şi un punct material, de masă egală cu masa sistemului, asupra căruia acţionează o forţă egală cu suma forţelor exterioare aplicate sistemului considerat, adică $M\ddot{\mathbf{R}} = \sum_{1}^{n} \mathbf{F}_j$. *(Şt.G.)*

teorema momentului cinetic: derivata în funcţie de timp a momentului cinetic este egală cu suma momentelor, calculate faţă de originea O a raportului considerat, ale forţelor exterioare aplicate asupra sistemului. *(Şt.G.)*

teorema sinusurilor → formule trigonometrice

teorema torsorului: pentru un sistem de puncte materiale S, derivata faţă

de timp a torsorului impulsurilor lui S este egală cu torsorul forțelor exterioare aplicate lui S. *(Șt.G.)*

teoremă [gr. *theorema* „examinare, cercetare"], enunț de forma: dacă p atunci q, al cărui adevăr rezultă în urma unei demonstrații. Propoziția p se numește *ipoteză* sau *premiză*, iar propoziția q, *concluzie*. Noțiunea se definește în mod riguros în cadrul unui → *sistem axiomatic*. Denumirea a fost folosită inițial de Aristotel (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

teoremă reciprocă [lat. *reciprocus* „care inversează"] (a unei teoreme), teoremă a cărei ipoteză este concluzia teoremei date și a cărei concluzie este ipoteza teoremei date. În opoziție cu teorema reciprocă, teorema inițială se mai numește *teoremă directă*. Teorema reciprocă a unei teoreme poate fi adevărată sau nu. O teoremă și reciproca ei se pot reda printr-un singur enunț. Ex.: pentru ca un polinom (cu o nedeterminată, definit într-un corp numeric) să fie identic nul este necesar și suficient ca toți coeficienții săi să fie nuli; într-un cerc (sau în două cercuri egale) două coarde sînt egale dacă și numai dacă distanțele lor pînă la centru sînt egale. *(V.B.)*

teoria așteptării, capitol al cercetării operaționale care studiază caracteristicile fundamentale ale sistemelor susceptibile de a produce fenomene de așteptare, datorită solicitării unui anumit serviciu de către un număr de „unități" ale căror sosiri au un caracter aleator. Studiul științific al modelelor de acest tip, are drept scop crearea unei baze teoretice pentru adoptarea deciziilor capabile să înlăture fenomenul de așteptare, sau să-l limiteze la un nivel rezonabil. Fără a constitui o teorie matematică propriu-zisă (nu există o axiomatizare specifică și nici un ansamblu de teoreme proprii), teoria așteptării își propune să studieze o colecție de modele reprezentative de un grad cît mai mare de generalitate. Criteriile de clasificare a modelelor din teoria așteptării sînt: a) legea probabilistică a venirilor (repartiția timpului dintre două sosiri, repartiția numărului de sosiri în unitatea de timp etc.); b) numărul firelor de așteptare; c) numărul stațiilor de serviciu (înțelegînd prin aceasta mecanismul care satisface cererile unităților solicitante); d) disciplina așteptării (regulile după care se dispun în așteptare unitățile, modul în care acestea sînt servite). Dat fiind caracterul aleator al fenomenelor studiate, teoria așteptării folosește metodele de investigare ale statisticii matematice. Aparatul matematic utilizat este destul de dezvoltat, un loc important revenind teoriei proceselor stochastice. *(A.Ș.)*

teoria estimației → **statistică matematică**

teoria informației [lat. *informatio* „veste, știre"], teorie matematică a proprietăților generale ale surselor de informație (mesaje, transmitere de știri), ale canalelor de transmisiune a informațiilor și ale instalațiilor de prelucrare și de păstrare a informațiilor. Teoria informației folosește, îndeosebi, aparatul matematic al calculului probabilităților și statisticii matematice. A fost inițiată de R. Hartley (1928), pornind de la tratarea teoretică a problemelor de telecomunicații, dar creatorul ei este C.E. Shannon, care (în jurul anului 1948) și-a propus să studieze din punct de vedere matematic problemele ce apar la transmiterea cu ajutorul semnalelor în sistemele de comunicație electrice și, generalizînd aceste probleme, a dat o măsură a cantității de informație *(entropia)* ce se transmite cu ajutorul unor semnale, a elaborat metode pentru reducerea influenței perturbației care

alterează informația transmisă, pentru codificarea semnalelor ș.a. Contribuții de seamă la dezvoltarea teoriei informației au adus N. Wiener (începînd cu 1948), A.I. Hincin (1953), A.N. Kolmogorov (1956) ș.a., precum și cercetătorii români ca: O. Onicescu, S. Guiașu ș.a. Teoria informației are largi aplicații în telecomunicații, automatică, cibernetică, lingvistică, genetică etc. *(V.B.)*

teoria jocurilor, teorie matematică a situațiilor conflictuale care opun interesele a doi sau mai mulți participanți, într-un cadru descris de un ansamblu de reguli precise, care stabilesc posibilitățile de acțiune ale fiecărui participant, precum și modul în care acestora li se repartizează, în final, anumite valori. Respectînd regulile, fiecare participant la joc (jucător) urmărește o manieră de acțiune care să optimizeze cîștigul său. Clasificarea jocurilor se face după o serie de criterii, cum ar fi: a) numărul participanților la joc; b) numărul de mutări (numărul de acțiuni succesive la care are dreptul fiecare jucător); c) numărul de posibilități de acțiune ale fiecărui jucător — joc finit sau joc infinit; d) cantitatea de informație pe care o deține fiecare jucător asupra acțiunilor sale proprii sau asupra posibilităților de acțiune ale celorlalți participanți — joc fără informație, joc cu informație parțială, joc cu informație completă; e) modul în care se repartizează cîștigurile între participanții la joc — joc cu sumă nulă, joc cu sumă nenulă constantă. De asemenea, trebuie să se țină seama de posibilitatea comunicării între diverși participanți la joc și de stabilirea unor alianțe vizînd satisfacerea unor interese comune (jocuri cooperatiste), sau din contră, de interdicția asupra oricărei comunicări între grupuri de jucători (jocuri necooperatiste). O noțiune de bază în teoria jocurilor este cea de *strategie,* care desemnează modul de acțiune ales de un jucător (strategie individuală), sau de toți participanții la joc (strategia jocului). După cum alegerile au caracter deterministic, sau aleator, numim strategiile pure, respectiv, mixte. Teoria jocurilor de două persoane, cu sumă nulă (cîștigul unui jucător este egal cu pierderea celuilalt), este dominată de principiul min-max;

$$\min_y \max_x K(x,y) = \max_x \min_y K(x,y),$$

unde $K(x, y)$ este funcția care stabilește cîștigurile celor doi participanți, date fiind strategiile x, y alese. Multe dintre modelele cercetării operaționale își găsesc rezolvarea în cadrul teoriei jocurilor. E. Borel (1927) a tratat, pentru prima oară, problema generală a jocurilor strategice; J. Neumann și O. Morgenstern (1944) au elaborat primul tratat consacrat teoriei jocurilor, prin care s-au pus bazele acestei teorii. În țara noastră, studii valoroase a întreprins O. Onicescu *(Strategia jocurilor cu aplicații la programarea liniară,* 1961), și elevii săi, evidențiind aplicațiile însemnate ale acestei teorii în problemele practice, economice, tehnice, militare etc. *(V.B., A.Ș.)*

teoria numerelor → aritmetică

teoria probabilităților, ramură a matematicii care are ca obiect studiul matematic al fenomenelor aleatoare. Apariția teoriei probabilităților este legată de probleme referitoare la jocurile de noroc (L. Pacioli, 1494; G. Cardano, 1539); astfel B. Pascal și P. Fermat (1654) devin fondatorii acestei teorii rezolvînd o problemă privind împărțirea mizei între doi jucători, în cazul unui joc întrerupt. Contribuții de seamă la dezvoltarea noii teorii au adus Jacques Bernoulli *(Ars conjectandi,* publicată postum în 1713), care demonstrează legea numerelor mari prin care s-a trecut

la aplicaţii practice ale teoriei probabilităţilor ca: întocmirea tabelelor de mortalitate (Chr. Huygens, 1669), calculul rentelor viagere (E. Halley, 1694) ş.a. D. Bernoulli a aplicat calculul infinitezimal (1768), contribuţii ulterioare fiind aduse de Th. Bayes, P.S. Laplace, P.L. Cebîşev, A.A. Markov. J.C. Maxwell a aplicat teoria probabilităţilor în mecanică (1859), iar L. Boltzmann, în termodinamică. În 1933, A.N. Kolmogorov a pus teoria probabilităţilor pe baze axiomatice. Fondatorii şi animatorii şcolii româneşti în acest domeniu sînt O. Onicescu şi Gh. Mihoc. *(V.B.)*

teoria relativităţii, teorie a spaţiului, timpului şi mişcării materiei. În 1887, A. Michelson şi E.W. Morley, în urma unor experienţe, au ajuns la concluzia că viteza luminii este independentă de sistemul faţă de care o măsurăm şi de direcţia de deplasare, infirmîndu-se, pentru prima oară, valabilitatea generală a legilor mecanicii clasice. Alte experienţe au arătat că dificultăţile întîlnite nu erau izolate, ele afectînd o mare parte a opticii şi electricităţii. H. Poincaré, în 1904, a formulat principiul relativităţii, după care legile fenomenelor fizice trebuie să fie aceleaşi pentru doi observatori, dintre care unul are o mişcare de translaţie uniformă faţă de celălalt, şi a prevăzut o nouă dinamică, în care nu se poate depăşi viteza luminii. A. Einstein în 1905 a fundamentat teoria relativităţii restrînse, care conduce la transformările lui Lorenz, după care sistemul (x_1, y_1, z_1, t_1) se mişcă, cu viteza constantă v, de-a lungul axei Ox a sistemului (x, y, z, t), iar la $t = t_1 = 0$ cele două sisteme coincid, atunci, notînd $b = v/c$ (c — viteza luminii):

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r} - \mathbf{v}\left[\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{v^2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\right) + \frac{t}{\sqrt{1-b^2}}\right], \qquad t_1 = \frac{t - \dfrac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{v}}{c^2}}{\sqrt{1-b^2}}.$$

Se construieşte o nouă mecanică, la viteze mici în comparaţie cu viteza luminii, rezultatele coincizînd practic cu cele date de mecanica clasică. Un punct material de masă de repaus m_0 are la viteza v faţă de un observator fix masa $m_0/\sqrt{1-b^2}$, iar energia sa este $m_0c^2 + \frac{1}{2}m_0v^2 + \ldots$. Prin identificarea transformării lui Lorenz cu o rotaţie în spaţiul cuadridimensional al lui Minkowski, în care raza vectoare are componentele x, y, z şi ict, ecuaţiile mecanicii relativiste apar ca relaţii între vectori cuadridimensionali. Modulul vitezei cuadridimensionale este independent de sistemul de referinţă inerţial şi constituie o caracteristică absolută a mişcării. Teoria relativităţii restrînse a primit confirmări experimentale prin eliberarea energiei atomice, creşterea masei particulelor rapide în acceleratoare, creşterea timpului de viaţă al mezonilor rapizi, în comparaţie cu cel al mezonilor lenţi etc. Teoria relativităţii generale (sau generalizate), elaborată de A. Einstein între 1907 şi 1917, urmăreşte extinderea principiului relativităţii la toate sistemele de referinţă şi la toate fenomenele cunoscute, avînd la bază principiul echivalenţei, care afirmă că un sistem de referinţă neinerţial este echivalent cu un anumit cîmp gravitaţional. Spaţiul, timpul şi materia se dovedesc a fi într-o strînsă interdependenţă, deoarece proprietăţile spaţiale şi temporale ale fenomenelor sînt determinate de distribuţia maselor gravitaţionale, iar, pe de altă parte, mişcarea acestora este determinată de proprietăţile spaţiului şi timpului. Din punct de vedere matematic, spaţiul este unit cu timpul într-o formă pătratică riemanniană

cuadridimensională, ajungîndu-se la o lege generală a inerției, care cuprinde într-o singură expresie fenomenele de inerție și gravitație. Teoria relativității generale a primit confirmări experimentale ca: avansul periheliului lui Mercur, devierea razelor de lumină în apropierea unor mase mari și deplasarea spre roșu a liniilor spectrale emise de o mare masă gravifică. *(Șt.G.)*

teoria selecției → **statistică matematică**

teoria siguranței, capitol al cercetării operaționale care studiază legile generale de care trebuie să se țină seama la proiectarea, fabricarea și experimentarea, recepția și exploatarea unui utilaj, în scopul obținerii unei eficiențe maxime în funcționarea lui. Aparatul matematic folosit în această teorie se bazează, în mare parte, pe rezultatele obținute în teoria proceselor stochastice. Prin siguranța în funcționare a unui utilaj se înțelege capacitatea acestuia de a-și păstra calitățile în condiții determinate de exploatare. *(A.Ș.)*

teoria stocurilor, capitol al cercetării operaționale care studiază, prin intermediul unor modele matematice, procesele economice de stocare, urmărind adoptarea unei decizii de maximă eficiență economică. Fără a fi o teorie matematică propriu-zisă, teoria stocurilor își propune aprofundarea studiului celor mai reprezentative modele din această categorie, precum și formularea unor metode de cercetare aplicabile tuturor modelelor particulare de stocare. *(A.Ș.)*

tetraedru [gr. *tetra* „patru“, *hedra* „față“], poliedru cu patru fețe. Tetraedrul are fețele triunghiuri, patru vîrfuri și șase muchii. Volumul tetraedrului cu vîrfurile în punctele $M_i\,(x_i,\ y_i,\ z_i)$ $i = 1, 2, 3, 4$ se calculează cu formula:

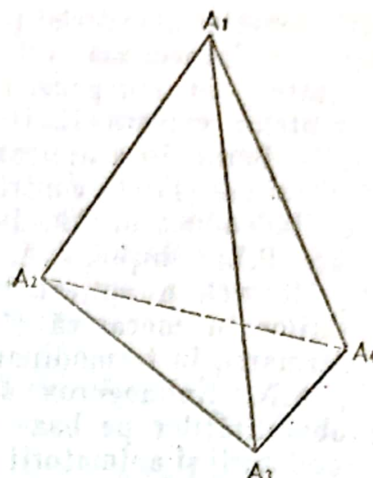


Fig. 173

$$V = \frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$$

Tetraedrul regulat este unul din cele cinci poliedre regulate (fig. 173). Planele fețelor lui fac unghiuri diedre de 70°31′43″,6. Volumul tetraedrului regulat în funcție de muchia l este: $V = \frac{\sqrt{2}\, l^2}{12}$, iar aria sa este dată de formula $A = \sqrt{3}\, l^2$. Relațiile dintre muchia l și razele r a sferei înscrise și R a sferei circumscrise sînt:

$$l = 2\sqrt{6}\, r = \frac{2\sqrt{6}}{3} R.$$

Denumirea s-a statornicit în terminologia matematică datorită lui Pappus (sec. 3). — *Tetraedru ortocentric,* tetraedru la care muchiile opuse sînt perpendiculare. Într-un tetraedru ortocentric înălțimile sînt concurente. *(V.B.)*

timp *(t)*, una dintre formele de existență a materiei, exprimînd succesiunea și simultaneitatea proceselor realității obiective. El este unidi-

mensional şi ireversibil. Pentru determinarea intervalelor de timp s-a folosit mişcarea de rotaţie a pămîntului în jurul axei sale, care a condus la noţiunea de zi, sau mişcarea sa de revoluţie în jurul Soarelui, ceea ce a dat anul, fie, mai recent, unele procese moleculare sau atomice. Unitatea de măsură fundamentală a timpului este secunda (s) în toate sistemele de măsură, definită ca a 86400-a parte din ziua solară medie. *(Şt.G.)*

tip (al unei matrici) → **matrice**

titlu [lat. *titulus* „indiciu"] (al unui aliaj), raportul dintre masa metalului preţios pe care îl conţine şi masa totală de aliaj. Ex.: aliajul de aur cu titlul 0,750 conţine la 1000 părţi de aliaj, 750 părţi de aur. — *Proba unui aliaj*, numărul care exprimă de 1000 de ori titlul aliajului. Ex.: proba unui aliaj cu titlul 0,750 este 750. *(V.B.)*

topologie [gr. *topos* „loc", *logos* „relaţie, vorbire"], ramură a matematicii care studiază proprietăţile mulţimilor de puncte, invariante faţă de o transformare topologică. Numărul de dimensiuni, vecinătatea, contactul sînt exemple de noţiuni invariante în grup, deci topologice. Mulţimile obţinute printr-o transformare topologică sînt omeomorfe; de exemplu cercul şi pătratul sînt figuri omeomorfe. Anterior (datorită lui G. Leibniz, 1679), topologia era numită „analysis situs" (sugestie a faptului că în ea se face analiza situării punctelor acelor figuri ce sînt supuse unor transformări care pot distruge proprietăţile lor metrice şi proiective). Începutul topologiei e marcat de cercetările lui L. Euler şi K. Gauss (care o denumea „geometria situs"), dar fundamentarea ei în sensul modern al obiectului se datorează lui B. Riemann (1854) şi H. Poincaré. Denumirea apare pentru prima dată la J.B. Listing, în titlul lucrării *Vorstudien zur Topologie* (1847). *(V.B.)*

tor [lat. *torus* „coardă"], suprafaţă generată de un cerc care se roteşte în jurul unei axe din planul său, care nu taie cercul (fig. 174). Faţă de un reper cartezian ortogonal cu axa Oz situată pe axa de rotaţie, cercul generator avînd raza r, iar centrul fiind la distanţa a de axă, ecuaţia torului este:

$$(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - r^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

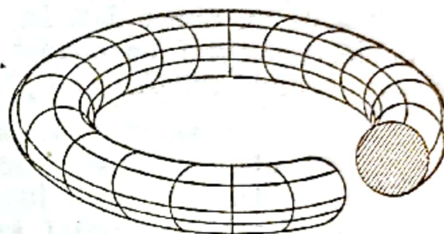


Fig. 174

Aria torului se obţine prin formula: $A = 4\pi^2 ar$, iar volumul corpului mărginit de tor: $V = 2\pi^2 ar^2$. Torul a fost considerat prima oară de Arhitas (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

torsiune [fr. *torsion* „răsucire"] $\left(\text{a unei curbe într-un punct } M; \dfrac{1}{\tau}\right)$, limita raportului dintre unghiul $\Delta\theta$ al binormalelor în două puncte vecine ale curbei, P şi P', şi lungimea Δs a arcului PP', cînd P' tinde către P:

$$\frac{1}{\tau} = \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta s}.$$

Pentru curba $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, torsiunea este dată de formula:

$$\frac{1}{\tau} = \frac{\begin{vmatrix} x' & y' & z' \\ x'' & y'' & z'' \\ x''' & y''' & z''' \end{vmatrix}}{A^2 + B^2 + C^2},$$

unde $A = y'z'' - y''z'$, $B = z'x'' - x'z''$, $C = x'y'' - x''y'$. Torsiunea unei curbe plane este nulă (şi reciproc). Torsiunea unei curbe a fost introdusă de A. Clairaut (1731). *(V.B.)*

torsor (al unui sistem S de forţe $\mathbf{F}_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$, în punctul O; $\tau(S)$), sistemul format din rezultanta generală şi momentul rezultant determinat în O, adică $(\mathbf{R}, \mathbf{M}_0)$. Torsorul permite aprecierea efectului lui S asupra unui sistem de puncte materiale. Două sisteme S şi S' au acelaşi efect asupra unui sistem de puncte materiale dacă au acelaşi torsor faţă de un punct dat. La noi în ţară, V. Vâlcovici s-a ocupat de teoria torsorului. *(Şt.G., V.B.)*

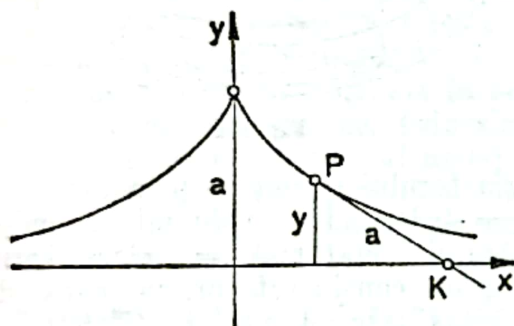


Fig. 175

tractrice [lat. *tractare* „a trage"], curbă plană avînd proprietatea că, în fiecare punct al ei, segmentul de tangentă, cuprins între punctul de tangenţă şi intersecţia tangentei cu o dreaptă fixă (numită bază), situată în planul curbei, are lungimea constantă a (fig. 175). Faţă de un reper cartezian ortogonal, cu axa absciselor pe baza tractricei, ecuaţia curbei este:

$$x = a \ln \frac{a + \sqrt{a^2 - y^2}}{y} - \sqrt{a^2 - y^2}.$$

Aria domeniului plan mărginit de curbă şi de asimptota ei (baza tractricei) este dată de formula $A = \frac{\pi a^2}{2}$. Prin rotirea tractricei în jurul asimptotei se obţine pseudosfera. Apariţia tractricei este legată de consideraţii mecanice, ea fiind curba brahistocronă pentru forţele plane perpendiculare pe o dreaptă fixă din plan şi proporţionale cu distanţele de la punctele de aplicaţie la dreaptă, fapt demonstrat de G. Leibniz (1693). Tractricea a fost studiată de Chr. Huygens şi de A.J. Fresnel, care a indicat diverse dispozitive pentru trasarea ei. *(V.B.)*

transformare [lat. *transformare* „a trece de la o formă la alta"] → **funcţie**

transformare afină, transformare proiectivă care lasă un plan fix. Între coordonatele punctelor transformate avem relaţii lineare, de determinant diferit de zero. Transformarea afină este determinată prin patru perechi de puncte, în spaţiu, sau trei, în plan. *(N.M.)*

transformare geometrică, corespondenţă între elementele a două mulţimi de figuri geometrice. Transformările care depind de un număr de parametri formează o mulţime de transformări; o transformare a mulţimii este determinată pentru anumite valori date parametrilor. Dacă transformarea f_1 transformă mulţimea A în A_1 şi f_2 pe A_1 în A', transformarea f, care operează în acest sens de la A la A' este produsul transformărilor f_1, f_2. O mulţime de transformări formează un grup de transformări, dacă produsul a două transformări din mulţime aparţine mulţimii şi inversa unei transformări din mulţime aparţine mulţimii. Rezultă că, un grup de transformări conţine transformarea identică operînd pe intersecţia mulţimilor transformate între ele. Proprietăţile invariante într-un grup de transformări constituie o geometrie ataşată grupului. Două

figuri obținute una din alta printr-o transformare a grupului, sînt egale în grup. Geometria elementară are diferite ramuri bazate pe grupul deplasărilor, grupul metric, grupul asemănărilor, grupul analagmatic, grupul proiectiv, grupul afin, grupul topologic etc. Transformările acestor grupuri sînt deplasări, izometrii, asemănări, inversiuni, proiectivități, afinități, omeomorfisme etc. sau combinări ale acestor transformări. Teoria grupurilor continui de transformări a fost elaborată de Sophus Lie în cartea sa din 1888—1890. Punctul de vedere conform căreia o geometrie este studiul invarianților unui grup de transformări a fost expus în 1872 de Felix Klein. *(N.M.)*

transformare proiectivă, transformare punctuală biunivocă a spațiului, prin care un plan devine alt plan. Între coordonatele omogene ale punctelor transformate avem relații liniare și omogene de determinant diferit de zero. Transformarea proiectivă este determinată de cinci perechi de puncte, în spațiu, sau patru, în plan, și are patru puncte duble în spațiu, sau trei, într-o proiectivitate în același plan. O transformare proiectivă între două plane este echivalentă cu un lanț de trei proiecții centrale, intermediare. *(N.M.)*

transformare topologică, transformare biunivocă și bicontinuă (continuă împreună cu inversa sa). Figurile egale în grup sînt numite omeomorfe. *(V.B.)*

transformata Fourier (a unei funcții reale de argument real, $f(x)$), funcția:

$$F(t) = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itx} f(x)dx.$$

Se utilizează la integrarea ecuațiilor diferențiale și a ecuațiilor cu derivate parțiale întîlnite, de exemplu, la studiul regimurilor tranzitorii în circuitele electrice liniare și în sistemele liniare de reglare automată. *(V.B.)*

transformata Laplace (a unei funcții reale de argument real, $f(x)$), funcția:

$$F(t) = \int_0^{\infty} e^{-tx} f(x)dx.$$

Se utilizează la rezolvarea unor ecuații diferențiale, integrale sau cu derivate parțiale. *(V.B.)*

translație [lat. *translatio* „deplasare"], transformare geometrică punctuală, determinată de un vector **v** (numit vector director), astfel încît unui punct P din spațiu să-i corespundă punctul P' cu $\mathbf{PP'} = \mathbf{v}$. Mulțimea translațiilor formează un grup abelian (fiind un subgrup al grupului deplasărilor). Translația conservă distanțele între puncte, coliniaritatea lor și paralelismul dreptelor, transformînd o figură într-alta, egală și paralelă cu cea dată. Față de un reper cartezian $Oxyz$, dacă vectorul director **v** are componentele a, b, c, relațiile care dau coordonatele punctului $P'(x', y', z')$, translatatul punctului $P(x, y, z)$, sînt:

$$x' = x + a, \quad y' = y + b, \quad z' = z + c.$$

Translația a fost folosită, ca metodă de transformare geometrică, de I. Alexandrov (1881) și J. Petersen (1886). *(V.B.)*

transpoziție [lat. *transpozitio* „mutare peste, transpunere"], permutare în care toate elementele, în afară de două, rămîn neschimbate; cele două elemente se schimbă unul în celălalt. Ex.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \end{pmatrix}$. Termenul a fost introdus de A. Cauchy (1815). *(V.B.)*

transversală [lat. *transversus* „așezat de-a curmezișul"], dreaptă care taie o figură dată. Ex.: dreptele care taie laturile unui triunghi. *(V.B.)*

tranzitivitate [lat. *tranzitivus* „care trece"], proprietate a unei relații R

între elementele unei mulțimi, astfel încît dacă xRy și yRz, atunci xRz, oricare ar fi x, y, z din mulțimea considerată. Ex.: egalitatea, implicația, asemănarea, paralelismul, divizibilitatea, relația de ordine. Termenul a fost propus de A. Cauchy (1815). *(V.B.)*

trapez [gr. *trapezion*], patrulater cu două laturi paralele (numite *baze*) (fig. 176). Aria trapezului este egală cu produsul dintre înălțime și semisuma bazelor (fapt cunoscut de egiptenii antici). — *Trapez dreptunghic*, trapez cu una din laturile neparalele perpendiculară pe baze (fig. 177). — *Trapez isoscel*, trapez cu laturile neparalele egale. Trapezul isoscel are unghiurile alăturate bazelor egale, diagonalele egale și este inscriptibil (fig. 178). Denumirea de trapez a fost folosită inițial de Eudem (sec. 4 î.e.n.), iar definiția a fost formulată de Euclid (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

trei [lat. *tres*, termen format din cuvîntul sanscrit *tri* „a introduce, a adăuga"], număr natural indicat prin cifra 3 sau, după sistemul roman, prin simbolul III. Forma actuală a cifrei 3 provine prin legarea celor trei bare orizontale folosite inițial pentru redarea acestui număr. *(V.B.)*

triedru [gr. *tri* „cu trei, din trei", *hedra* „față"], figură formată din trei plane care se taie două cîte două și sînt limitate de dreptele lor de intersecție. Punctul comun planelor se numește vîrf, semidreptele se numesc muchii, iar porțiunile de plane determinate de ele se numesc fețe. În orice triedru, fiecare față este mai mică decît suma celorlalte două, iar suma celor trei fețe este mai mică decît patru unghiuri drepte. — *Triedrul tridreptunghic*, triedru la care fiecare muchie este perpendiculară pe celelalte două (fig. 179). — *Triedrul lui Frenet*, triedru tridreptunghic asociat punctelor unei curbe, ale

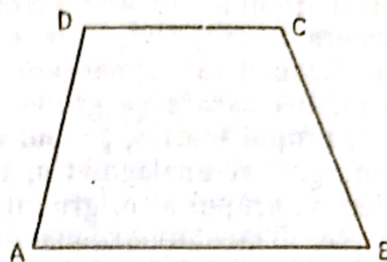


Fig. 176

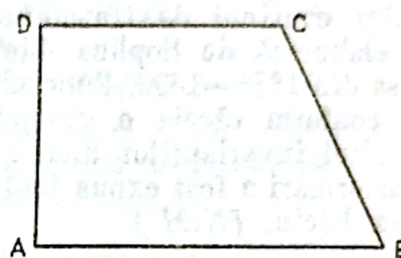


Fig. 177

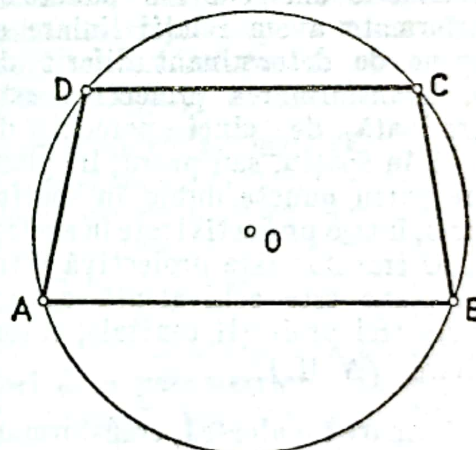


Fig. 178

cărui muchii sînt: tangenta, normala principală și binormala. *(V.B.)*

trigonometrie [gr. *trigonos* „triunghi", *metron* „măsură"], ramură a matematicii care studiază funcțiile trigonometrice (goniometria), relațiile dintre elementele unui triunghi (trigonometria plană) și relațiile dintre elementele unui triunghi sferic (trigonometria sferică). Trigonometria s-a născut ca urmare a necesității rezolvării

problemelor de astronomie, topometrie şi geodezie. Ptolemeu (sec. 2) a dat, sub formă geometrică, relaţiile dintre laturile şi unghiurile triunghiului sferic dreptunghic şi teorema de adiţie a sinusurilor. Ca ramură aparte a matematicii, prin introducerea denumirii funcţiilor goniometrice şi a operaţiilor algebrice cu ele, trigonometria a fost creată în evul mediu de matematicienii de limbă arabă. Al-Habaş (?764—864) a dat relaţiile algebrice dintre funcţiile trigonometrice ale unui arc; al-Biruni (973—1048) cunoştea teorema sinusurilor într-un triunghi, iar Abul Vefa (940—997) cunoştea, mai înainte, aceeaşi teoremă în triunghiul sferic; al-Batani (?850—929) a dat formula fundamentală care exprimă latura unui triunghi sferic în funcţie de celelalte două şi unghiul opus; al-Kaşi (sec. 14) a calculat cu precizie tabele de funcţii trigonometrice; al-Tusi (1201—1274) a scris prima carte de trigonometrie. În Europa, Johannes Müller (Regiomontanus) (1436—1476) a scris, în 1464, o carte fundamentală de trigonometrie. În Renaştere, Fr. Viète (1540—1603) a dat formulele de transformare a sumei şi diferenţei de sinusuri şi cosi-

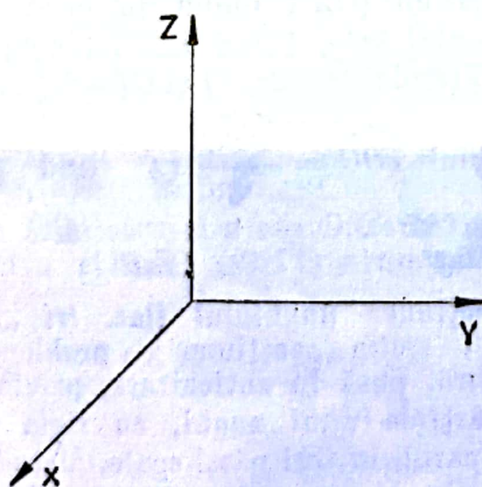


Fig. 179

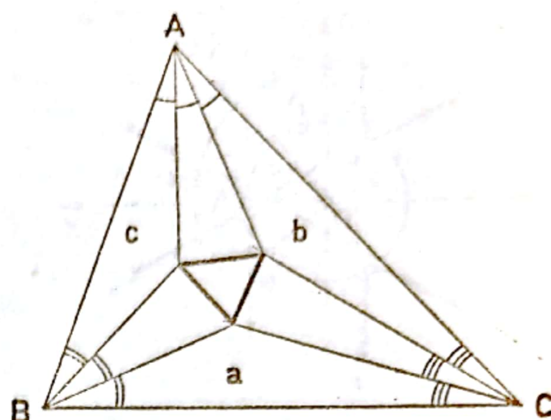


Fig. 180

nusuri în produse, a completat relaţiile de bază dintre laturile şi unghiurile unui triunghi, a stabilit relaţiile fundamentale dintre triunghiurile polare pe sferă. J. Neper (1550—1617) a dat reguli de transformare în produse a formulelor trigonometrice, printre care relaţiile uzuale de calculare a unghiurilor în funcţie de laturi, în triunghiul plan şi sferic. În secolul 18, trigonometria a fost definitivată ca ramură aparte a matematicii, completîndu-se acum formulele importante în triunghiul sferic, prin metodele unitare de stabilire a formulelor şi prin elaborarea unor manuale metodice în care accentul a trecut de la geometrie la algebră. Contribuţii importante au adus Leonhard Euler (1707—1783), Joseph Lagrange (1736—1813), Andrei Leksel (1740—1784), Andrea Cagnoli (1743—1816), Jean Delambre (1749—1822), Simon l'Huilier (1750—1840), iar Jean Callet (1744—1798) şi G. Vega (1756—1802) au întocmit tabelele de logaritmi ale funcţiilor trigonometrice. *(N.M.)*

trinom [gr. *tri* „cu trei, din trei", *nomos* „parte, membru"], polinom cu trei termeni. — *Trinom de gradul doi*, trinomul $ax^2 + bx + c$. *(V.B.)*

trisectoare [lat. *tri* „în trei", *sector*-*oris* „cel care taie, tăietor"], fiecare dintre cele două drepte care împart

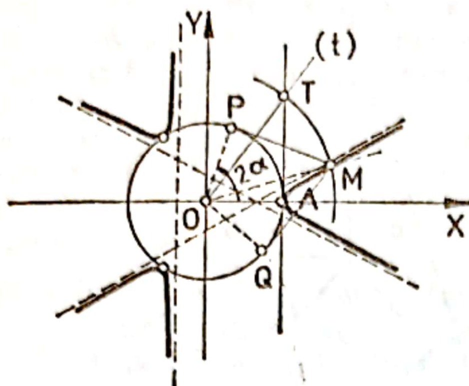


Fig. 181

un unghi în trei părţi. — *Teorema lui Morley*: trisectoarele unghiurilor unui triunghi se taie în vîrfurile unui triunghi echilateral (fig. 180). *(V.B.)*

trisectoarea lui Longchamps, curbă, loc geometric al punctului M de intersecţie al tangentelor în punctele P şi Q ale cercului orientat raportat la doi diametri perpendiculari AA', BB', unde P este determinat de unghiul $\widehat{AOP} = 2\alpha$, iar Q, de relaţia $\widehat{AOQ} = 2\pi - \alpha$ (fig. 181). În raport cu reperul cartezian determinat de diametri AA' şi BB', ecuaţia curbei este:

$$x(x^2 - 3y^2) - r(x^2 + y^2) = 0,$$

unde r este raza cercului considerat; ecuaţia polară este de forma:

$$\varrho = \frac{r}{\cos 3\theta}.$$

Curba este raţională şi are în originea reperului (centrul cercului dat) un punct dublu izolat. Fiind dat un unghi $\widehat{xOt}$, unghiul $\widehat{xOM} = \frac{\widehat{xOt}}{3}$ se obţine cu ajutorul trisectoarei, unde M este intersecţia cercului de rază OT cu trisectoarea, T fiind punctul comun al tangentei în A la cercul dat şi al laturii Ot a unghiului considerat. Curba a fost definită de G. Longchamps (1888). *(V.B.)*

trisectoarea lui Maclaurin, curbă, loc geometric al punctului M, din planul xOy, situat pe o dreaptă mobilă ce trece prin O, astfel încît $OM = PN$, unde P şi N sînt intersecţiile dreptei mobile cu cercul tangent în O axei ordonatelor şi, respectiv, cu mediatoarea razei $OA = 2r$ a cercului considerat (fig. 182). Ecuaţia carteziană a trisectoarei este:

$$x(x^2 + y^2) - r(y^2 - 3x^2) = 0,$$

ecuaţia polară are forma:

$$\varrho = \frac{r(1 - 4\cos^2\theta)}{\cos\theta}.$$

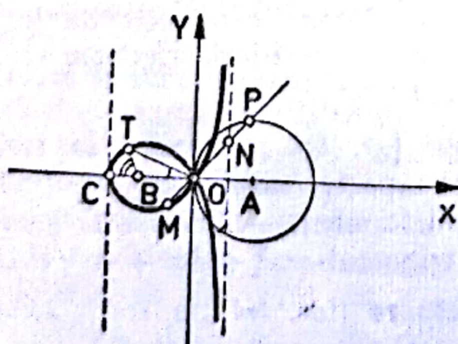


Fig. 182

Curba este raţională şi circulară, avînd un punct dublu în originea reperului xOy. Fiind dat triunghiul TBC (unde $B(-2r, 0)$ şi $C(-3r, 0)$), unghiul $\widehat{TOC} = \frac{\widehat{TBC}}{3}$ (T fiind pe trisectoare). Curba a fost definită de C. Maclaurin (1720). *(V.B.)*

trisecţiunea unghiului [lat. *tri* „în trei", *sectio* „secţiune"], problemă celebră, pusă în antichitate, privind împărţirea unui unghi, cu rigla şi compasul, în trei părţi egale. Metode aproximative au dat Hippias (sec. 4 î.e.n.), Nicomede (sec. 3 î.e.n.),

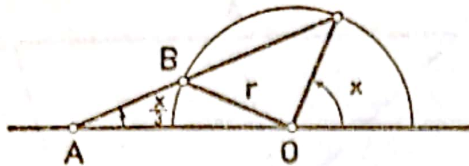


Fig. 183

Pappus (sec. 3) cu ajutorul unor curbe şi Arhimede (sec. 3 î.e.n.) cu ajutorul unei rigle pe care este marcat un segment AB egal cu raza unui semicerc cu centrul în vîrful unghiului şi aşezată astfel încît punctul A să se găsească pe prelungirea unei laturi a unghiului, iar punctul B pe semicerc (fig. 183). Din punct de vedere analitic problema, pentru un unghi u, este echivalentă cu rezolvarea ecuaţiei:

$$x^3 - 3x - 2\cos u = 0.$$

Această ecuaţie nu admite în general rădăcini raţionale sau exprimabile prin radicali de indici doi, problema dovedindu-se astfel imposibil de rezolvat, datorită lui P. Wantzel (1837). *(V.B.)*

triunghi [lat. *tri* „cu trei", *angulus* „unghiuri"] (ΔABC), poligon cu trei laturi. Elementele triunghiului sînt vîrfurile A, B, C şi laturile $AB = c$, $BC = a$, $CA = b$. Suma unghiurilor interioare ale unui triunghi este egală cu două unghiuri drepte, fapt cunoscut de Pitagora (sec. 6 î.e.n.). Laturile triunghiului satisfac inegalităţile: $a < b + c$, $a > b - c$ şi analoagele. Aria unui triunghi, ca fiind egală cu semiprodusul dintre o latură şi înălţime, apare în papirusurile egiptene (cu 2 000 ani î.e.n.). Alte formule pentru calculul ariei unui triunghi sînt:

$$S = \frac{ab\sin A}{2} = \frac{a^2 \sin B \sin C}{2\sin A},$$

prima dintre aceste formule fiind stabilită de W. Snellius (1627);

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

$$\text{unde } p = \frac{a+b+c}{2},$$

numită formula lui Heron;

$$S = pr = \frac{abc}{4R} =$$

$$= 2R^2 \sin A \sin B \sin C =$$

$$= r^2 \operatorname{ctg}\frac{A}{2} \operatorname{ctg}\frac{B}{2} \operatorname{ctg}\frac{C}{2} =$$

$$= \sqrt{r r_a r_b r_c} =$$

$$= (p-a)r_a = (p-b)r_b = (p-c)r_c,$$

unde r şi R sînt razele cercurilor înscris şi circumscris, iar r_a, r_b, r_c ale cercurilor exînscrise;

$$S = \frac{\sin u}{2} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

unde x_i, y_i $(i = 1, 2, 3)$ sînt coordonatele carteziene ale vîrfurilor triunghiului raportat la un reper ale cărei axe formează unghiul u, formulă stabilită de G. Monge (1809) şi dată sub formă de determinant de A. Cayley (în 1843). Pentru triunghiul dat prin coordonatele carteziene spaţiale ale vîrfurilor $M_i(x_i, y_i, z_i)$, $i = 1, 2, 3$, raportate la un reper ortogonal, aria se calculează prin formula:

$$S = \frac{1}{2}\left(\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} y_1 & z_1 & 1 \\ y_2 & z_2 & 1 \\ y_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} z_1 & x_1 & 1 \\ z_2 & x_2 & 1 \\ z_3 & x_3 & 1 \end{vmatrix}^2\right)^{\frac{1}{2}},$$

dată de K. Gauss (1810). În literatura matematică românească termenul apare inițial la Gh. Lazăr (1820). Simbolul triunghiului „Δ" a fost propus de P. Herigone (1634). După mărimea unghiurilor, triunghiurile se clasifică astfel: — *Triunghi ascuțitunghic*, triunghi cu toate unghiurile ascuțite. — *Triunghi dreptunghic*, triunghi care are un unghi drept; în terminologia matematică românească, această denumire a fost adoptată de P. Poenaru (1837). — *Triunghi obtuzunghic*, triunghi cu un unghi obtuz. După mărimea laturilor, triunghiurile se clasifică astfel: — *Triunghi scalen* [gr. *skalenos* „șchiop"], triunghi cu laturile neegale. Se mai numește *triunghi oarecare*. — *Triunghi isoscel* [gr. *isos* „egal", *skelos* „picior"], triunghi cu două laturi egale. Egalitatea unghiurilor de la baza unui triunghi isoscel a fost demonstrată inițial de Tales (sec. 6 î.e.n.). — *Triunghi echilateral* [lat. *aequus* „egal", *latus-ris* „latură"], triunghi cu toate laturile egale. *(V.B.)*

triunghi anticomplementar, triunghiul determinat de paralelele duse la laturile unui triunghi dat, prin vîrfurile opuse (fig. 184). Triunghiul dat și cel anticomplementar au același centru de greutate. Centrul cercului circumscris triunghiului anticomplementar este ortocentrul triunghiului dat. Denumirea a fost propusă de către J. Neuberg. *(V.B.)*

triunghi aritmetic → **triunghiul lui Pascal**

triunghi complementar, triunghiul cu vîrfurile în picioarele medianelor unui triunghi dat (fig. 185). Triunghiul complementar și cel dat au același centru de greutate. Centrul de greutate al perimetrului triunghiului dat este centrul cercului înscris triunghiului complemenar. Denumirea a fost propusă de J. Neuberg. Se mai numește *triunghi median*. *(V.B.)*

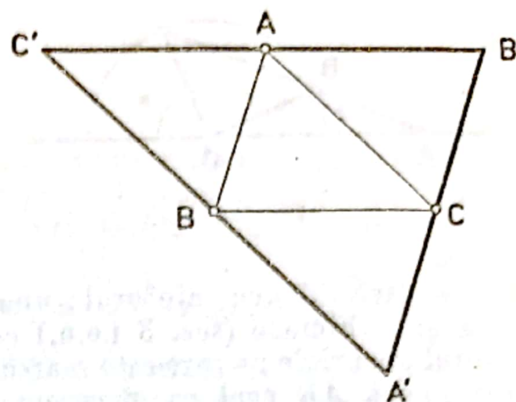


Fig. 184

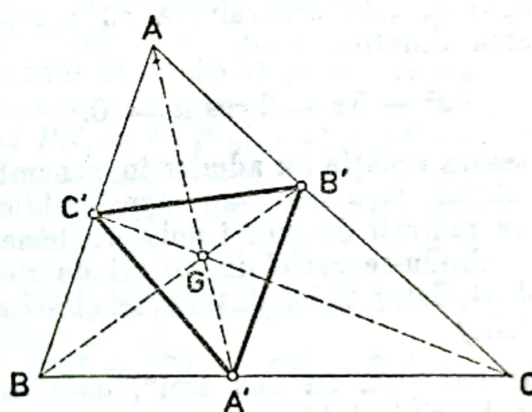


Fig. 185

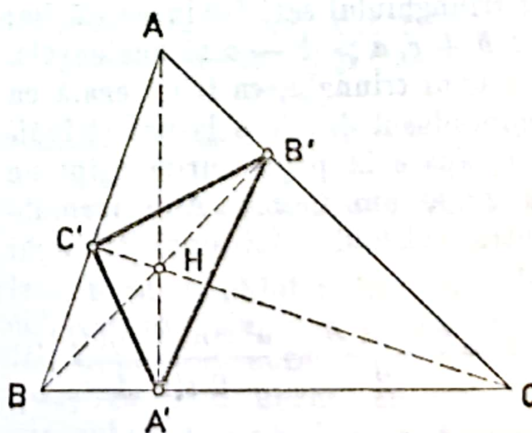


Fig. 186

triunghi conjugat [lat. *conjunctus* „împreună"] (unui cerc), triunghiul ale cărui vîrfuri sînt polii laturilor opuse în raport cu cercul considerat. *(V.B.)*

triunghi curbiliniu, triunghi ale cărui laturi sînt arce de curbe. *(V.B.)*

triunghi median → **triunghi complementar**

triunghi ortic [gr. *orthos* „drept, perpendicular"], triunghiul ale cărui vîrfuri sînt picioarele înălţimilor unui triunghi dat (fig. 186). Triunghiul ortic are laturile egal înclinate pe laturile triunghiului dat. Denumirea se datorează lui Besant (1869). *(V.B.)*

triunghi pedal [lat. *pes-pedis* „picior"], triunghi care se formează unind două cîte două, picioarele a trei ceviene concurente ale unui triunghi dat. Ex.: triunghiul median (fiind triunghiul pedal al medianelor), triunghiul ortic (este triunghiul pedal a înălţimilor unui triunghi dat). *(V.B.)*

triunghi podar [gr. *podos* „picior"] (asociat unui punct), triunghiul ce se obţine unind, două cîte două, picioarele perpendicularelor duse din punctul dat pe laturile unui triunghi coplanar. Ex.: triunghiul ortic (fiind triunghiul podar al ortocentrului unui triunghi dat). *(V.B.)*

triunghi polar, triunghi ale cărui laturi sînt polarele fiecărui vîrf al unui triunghi sferic (polarele fiind descrise din vîrfuri cu raze sferice avînd 90°), iar vîrfurile sînt polii laturilor triunghiului sferic. Relaţia dintre triunghiurile polare este reciprocă: dacă ABC şi $A'B'C'$ sînt două triunghiuri polare de laturi a, b, c, respectiv a', b', c', există relaţiile:

$$a = \pi - A', \quad A = \pi - a'.$$

şi analoagele. Au fost considerate de Nassirreddin al-Tusi (1260), dar studiul lor detaliat a fost făcut întîi de W. Snellius (1627). *(V.B.)*

triunghi sferic, triunghi de pe o sferă ale cărui laturi curbilinii sînt arce de cercuri mari, care se taie două cîte două în puncte distincte (fig. 187). Elementele triunghiului sferic sînt: unghiurile A, B, C (fiecare mai mic decît 180°) şi cele trei laturi a, b, c. Dacă laturile sînt mai mici decît 180°, triunghiul se numeşte *triunghi Euler*, iar dacă laturile sînt mai mari decît 180°, acel triunghi se numeşte *triunghi Möbius*. Într-un triunghi sferic, suma unghiurilor este cuprinsă între 180° şi 540°, iar suma laturilor este mai mică decît 360°. Aria triunghiului sferic este dată de formula:

$$S = \frac{R^2}{180°}(A + B + C - 180°).$$

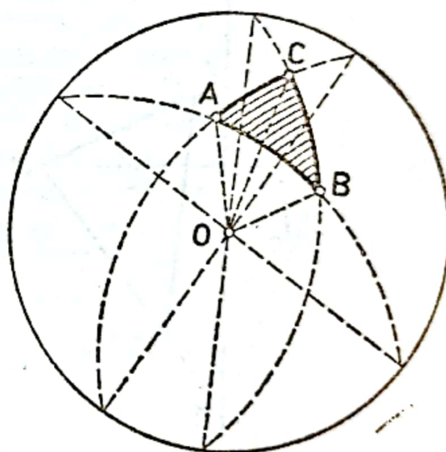


Fig. 187

Această formulă a fost obţinută de T. Harriot (1603) şi demonstrată riguros de B. Cavalieri (1632). Noţiunea se întîlneşte iniţial la Menelaus (c. 100). *(V.B.)*

triunghiul lui Pascal, tabloul triunghiular de numere (fig. 188), construit astfel încît fiecare linie începe şi se termină cu 1, iar un element oarecare este egal cu suma elementelor care se găsesc deasupra sa în

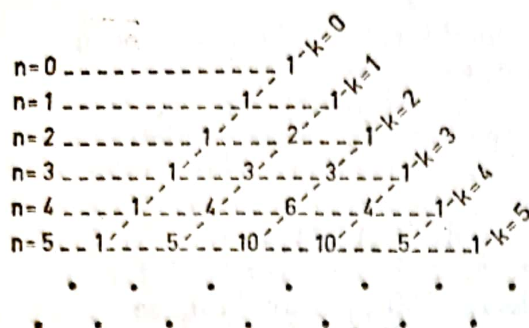


Fig. 188

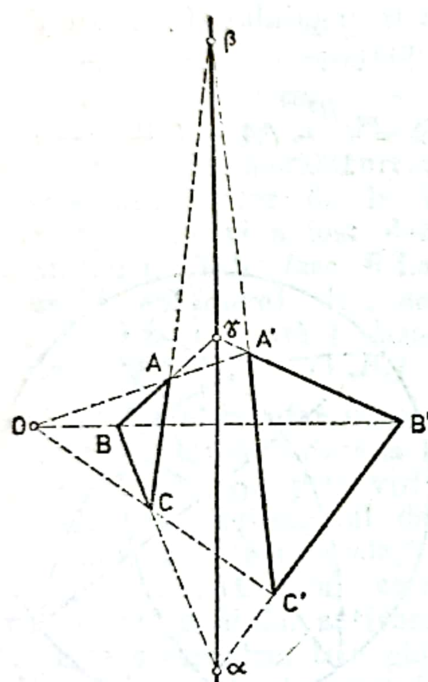


Fig. 189

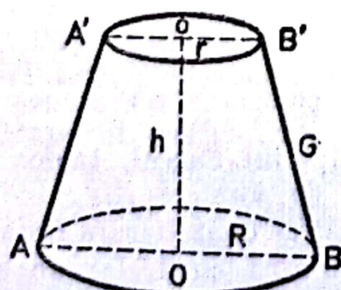


Fig. 190

linia precedentă. Linia n-a conține coeficienții binomiali de ordinul n. Era cunoscut încă de indieni (sec. 2 î.e.n.) și chinezi (sec. 12), dar a căpătat o largă popularitate datorită lui B. Pascal *(Traité du triangle arithmétique*, 1665*)*. Se mai numește *triunghi aritmetic*. *(V.B.)*

triunghiuri omologice [gr. *homos* „la fel", *logos* „relație"], două triunghiuri ale căror vîrfuri sînt, două cîte două, pe trei drepte concurente (în centrul de omologie). — *Teorema lui Desargues*: dacă ΔABC și $\Delta A'B'C'$ sînt triunghiuri omologice atunci punctele $\gamma = AB \cap A'B'$, $\alpha = BC \cap B'C'$, $\beta = CA \cap C'A'$ sînt coliniare (fig. 189). (G. Desargues, 1636). Propoziția este adevărată și sub formă reciprocă. *(V.B.)*

trunchi de con [lat. *trunculus*], porțiune dintr-un con (1) cuprinsă între bază și o secțiune făcută cu un plan paralel cu baza (fig. 190). Volumul trunchiului de con circular este egal cu:

$$V = \frac{\pi h}{3}(R^2 + r^2 + Rr),$$

iar aria laterală (pentru conul circular drept) este:

$$A = \pi G(R + r),$$

unde s-au notat prin h, r, R, G lungimea înălțimii, a razelor cercurilor bazelor și, respectiv, a generatoarei trunchiului de con circular drept. *(V.B.)*

trunchi de piramidă, porțiune dintr-o piramidă cuprinsă între bază și o secțiune făcută cu un plan paralel cu baza (fig. 191). Volumul trunchiului de piramidă se calculează după formula:

$$V = \frac{h}{3}(B + b + \sqrt{B \cdot b}),$$

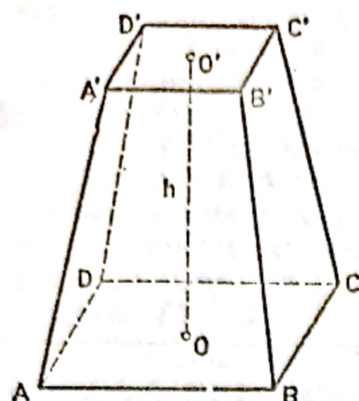


Fig. 191

unde B şi b sînt ariile bazelor, iar h înălţimea trunchiului, formulă, care redată în cuvinte, se întîlneşte pentru prima dată într-un papirus egiptean (sec. 20 î.e.n.). Aria laterală a unui trunchi de piramidă regulată e dată de formula:

$$A = \frac{(P + p)a}{2},$$

în care P şi p sînt perimetrele bazelor, iar a este apotema trunchiului. *(V.B.)*

Ţiţeica, Gheorghe (1873—1939), matematician român. Studii la Facultatea de Ştiinţe din Bucureşti şi la Paris (doctor, 1899, sub îndrumarea lui G. Darboux). Profesor la Universitatea din Bucureşti (agregat din 1900, titular din 1903) şi la Şcoala Politehnică din Bucureşti (din 1928). Membru al Academiei Române (din 1913; membru corespondent din 1909). Membru corespondent al Academiei din Maryland, membru al Societăţii de Ştiinţe din Liège şi în Societas Scientiarum Varsoviensis; doctor honoris causa al Universităţii din Varşovia. Preşedinte al secţiei de geometrie la congresele internaţionale de matematică de la Toronto (1924), Zürich (1932), Oslo (1936). A predat la Universităţile din Paris, Bruxelles, Roma. Rol de seamă în dezvoltarea învăţămîntului matematic românesc, în special prin activitatea la „Gazeta matematică" (autor al unor culegeri de probleme de largă circulaţie). Lucrări în domeniul geometriei diferenţiale afine (unde a descoperit curbele şi suprafeţele care îi poartă numele) şi al geometriei diferenţiale proiective a reţelelor. Activitatea sa este oglindită în c. 300 de lucrări de matematică sau de popularizare a ştiinţei. Op. pr.: *Géométrie projective différentielle des réseaux*, 1923; *Introduction à la géométrie différentielle projective des courbes*, 1931. *(V.B.)*

U

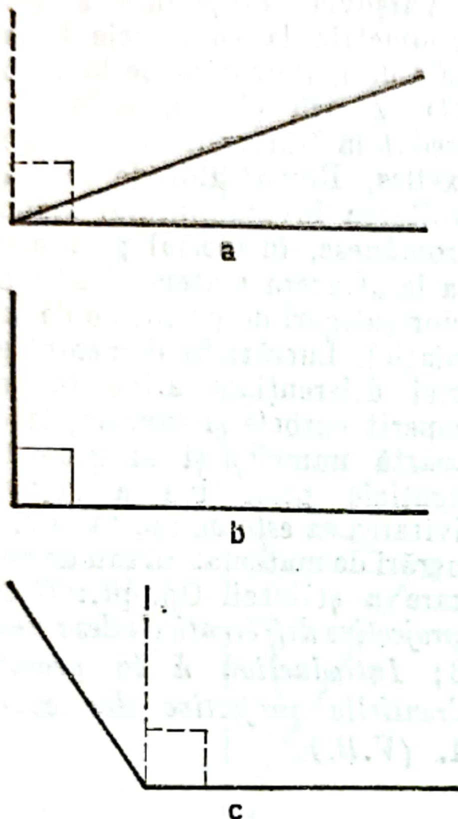


Fig. 192

unghi [lat. *angulus*] ($\measuredangle u$, $\widehat{xOy}$), figură formată de două semidrepte (numite laturi) care pornesc din același punct (numit vîrful unghiului). Unghiurile se măsoară în grade sexagesimale (s°), în grade centesimale (c^g), în radiani (rd) sau în unghiuri drepte (dr), trecerea de la o măsură la alta făcîndu-se prin relațiile:

$$\frac{s^\circ}{360^\circ} = \frac{c^g}{400^g} = \frac{rd}{2} = \frac{dr}{4}.$$

Noțiunea de unghi a fost introdusă, pornind de la necesitățile astronomiei, de babilonieni și chinezi (cu circa 4000 de ani î.e.n.). Notația unghiului prin semnul „$\measuredangle$" a fost introdusă de S. Word (1654), iar cea prin semnul „$\widehat{\ }$", plasat deasupra literei ce denumește vîrful unghiului sau deasupra literelor atașate laturilor (cu litera comună vîrfului la mijloc), a fost propusă de L. Carnot (1803). Termenul apare pentru prima dată în scrierile românești la Gh. Șincai (1810). După mărime unghiurile se clasifică astfel: — *Unghi ascuțit* [lat. *excotis*], unghi mai mic decît un unghi drept (fig. 192 a). — *Unghi drept* [lat. *directus*], unghi avînd laturile perpendiculare (fig. 192 b). Simbolul unghiului drept „L" a fost propus de P. Hérigone (1644). — *Unghi obtuz* [lat. *obtusus* „tocit"], unghi mai mare decît un unghi drept și mai mic decît două unghiuri drepte (fig. 192 c). Clasificarea unghiurilor în ascuțite, drepte și obtuze s-a făcut în antichitate. *(V.B.)*

unghi de contingență [lat. *con* „cu", *tangens-ntis* „tangentă"] (al unui arc de curbă plană), unghiul ascuțit format de tangentele duse în extremitățile arcului. Acest unghi este folosit la definiția curburii arcului considerat într-unul din punctele de tangență. A fost introdus (cu altă denumire) de Lancret (1805). *(V.B.)*

unghi diedru → diedru

unghi exterior (unui poligon), fiecare dintre unghiurile formate de o latură a poligonului şi prelungirea celeilalte, dincolo de vîrful comun. Unghiul exterior al unui triunghi este mai mare decît oricare dintre unghiurile interioare nealăturate şi egal cu suma lor. Suma unghiurilor exterioare unui poligon convex este egală cu 4 unghiuri drepte. *(V.B.)*

unghi orientat $(\widehat{AOB})$, unghi generat prin rotirea laturii OA, numită *latură iniţială*, în jurul punctului O, pînă la suprapunere peste latura OB, numită *latură finală*. Unghiul orientat este pozitiv sau negativ, după cum sensul de rotaţie este antiorar sau orar (A. Mőbius, 1827). *(V.B.)*

unghi poliedru [gr. *polys* „mult, numeros“, *hedra* „faţă“], figură geometrică formată de mai multe plane care trec prin acelaşi punct (numit vîrful unghiului), mărginite de intersecţiile lor succesive (muchiile unghiului poliedru), cuprinzînd o porţiune de spaţiu infinită într-un sens. *(V.B.)*

unghi solid [lat. *solidus* „dens, plin“], porţiune din spaţiu mărginită de o suprafaţă conică. Măsura unghiului solid, exprimată în steradiani, se obţine împărţind la pătratul razei sferei aria porţiunii decupate, de conul corespunzător, dintr-o suprafaţă sferică, ce are centrul în vîrful conului. Considerarea unghiurilor solide se întîlneşte pentru prima dată la Platon (sec. 4 î.e.n.). *(V.B.)*

unghiul a două curbe (într-un punct), unghi format de cele două tangente duse la curbe în punctul considerat (fig. 193). Unghiul a două cercuri secante este acelaşi în ambele puncte comune. *(V.B.)*

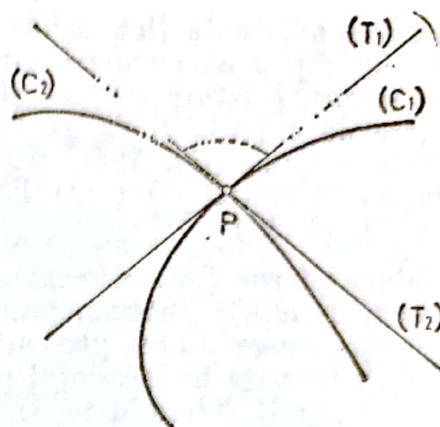


Fig. 193

unghiul a două drepte în spaţiu, unghiul format de paralelele duse la dreptele date printr-un punct oarecare (eventual, printr-un punct al uneia din drepte). Mărimea unghiului u a două drepte date prin ecuaţiile:

$$\frac{x-x_1}{l_1}=\frac{y-y_1}{m_1}=\frac{z-z_1}{n_1}$$

$$\frac{x-x_2}{l_2}=\frac{y-y_2}{m_2}=\frac{z-z_2}{n_2}$$

se calculează cu formula:

$$\cos u = \frac{l_1l_2+m_1m_2+n_1n_2}{\pm\sqrt{l_1^2+m_1^2+n_1^2}\cdot\sqrt{l_2^2+m_2^2+n_2^2}}.$$

(V.B.)

unghiul dintre o dreaptă şi un plan, unghiul format de dreaptă cu proiecţia ei pe plan. Mărimea unghiului u, dintre o dreaptă dată prin ecuaţia:

$$\frac{x-x_0}{l}=\frac{y-y_0}{m}=\frac{z-z_0}{n}$$

şi planul

$$Ax+By+Cz+D=0$$

rezultă din formula:

$$\sin u=\frac{Al+Bm+Cn}{\sqrt{l^2+m^2+n^2}\cdot\sqrt{A^2+B^2+C^2}}.$$

(V.B.)

unghiuri adiacente [lat. *adiacens-tis* „învecinat"], două unghiuri care au același vîrf, o latură comună și sînt situate de o parte și de cealaltă a laturii comune (fig. 194). Au fost considerate inițial de către Pappus (sec. 3). *(V.B.)*

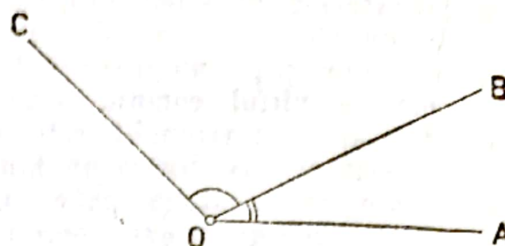


Fig. 194

unghiuri alterne [lat. *alternus* „de o parte și de alta"] (interne, respectiv externe), fiecare dintre perechile de unghiuri formate în interiorul (exteriorul) regiunii determinate de două drepte ce sînt tăiate de o secantă, de o parte și de alta a secantei (fig. 195):

$\hat{1}$ și $\hat{7}$, $\hat{2}$ și $\hat{8}$ (alterne externe)

$\hat{3}$ și $\hat{5}$, $\hat{4}$ și $\hat{6}$ (alterne interne).

În cazul cînd cele două drepte sînt paralele, unghiurile alterne interne (alterne externe) sînt egale două cîte două. *(V.B.)*

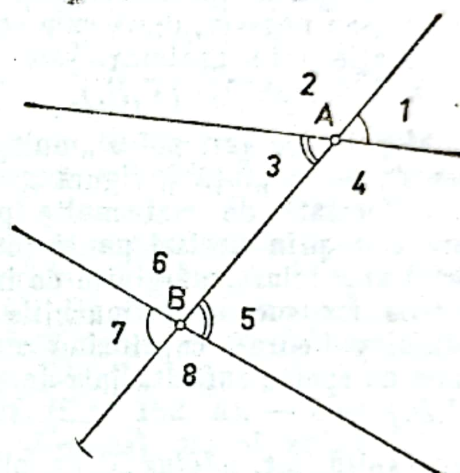


Fig. 195

unghiuri complementare [lat. *complementum* „care completează"], unghiuri a căror sumă este egală cu un unghi drept. *(V.B.)*

unghiuri corespondente, perechile de unghiuri nealăturate, formate de aceeași parte a unei secante care intersectează două drepte, un unghi fiind situat între cele două drepte, altul în afara regiunii determinate de ele, astfel (fig. 195):

$\hat{1}$ și $\hat{5}$, $\hat{2}$ și $\hat{6}$

$\hat{3}$ și $\hat{7}$, $\hat{4}$ și $\hat{8}$.

Dacă secanta intersectează două drepte paralele, unghiurile din fiecare pereche sînt egale. Termenul a fost propus de către N. Oresme (c. 1370). *(V.B.)*

unghiurile lui Euler, unghiuri care determină poziția unui corp rigid cu un punct fix *O*, ales ca origine a unui

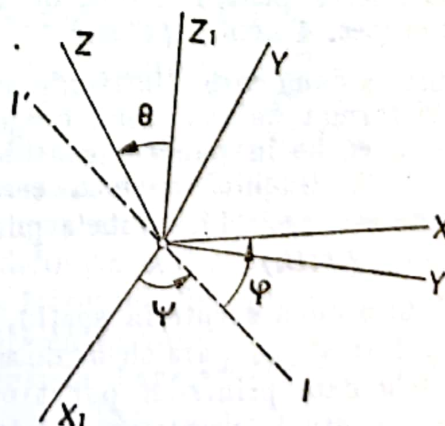


Fig. 196

sistem de referință fix $Ox_1y_1z_1$ și a unui sistem de referință solidar legat de corp, $Oxyz$. Cele două sisteme pot fi făcute să coincidă prin trei rotații succesive, și unghiurile de rotație corespunzătoare sînt unghiurile lui Euler. Notînd (fig. 196) prin $I'OI$ intersecția planelor Ox_1y_1 și Oxy, dreaptă care se numește linia nodurilor, se notează $\psi = (\widehat{Ox_1, OI})$, numit *unghi de precesie*. Unghiul descris de axa Oz_1, în sens direct, în jurul lui OI pînă se suprapune peste Oz, cu coincidența sensurilor, se notează cu θ și se numește *unghi de nutație*. Prin rotirea lui OI în jurul lui Oz pînă se suprapune peste Ox, se descrie unghiul $\varphi = (\widehat{OI, Ox})$, numit *unghi de rotație proprie*. Se găsește atunci că viteza instantanee de rotație $\omega(t)$ este dată prin proiecțiile sale pe axele sistemului fix și, respectiv, mobil, de $(\dot\varphi \sin\theta \sin\psi + \dot\theta \cos\psi)\mathbf{i}_1 - (\dot\varphi \sin\theta \cos\psi - \dot\theta \sin\psi)\mathbf{j}_1 + (\dot\varphi \cos\theta + \dot\psi)\mathbf{k}_1$ și $(\dot\psi \sin\theta \sin\varphi + \dot\theta \cos\varphi)\mathbf{i} + (\dot\psi \sin\theta \cos\varphi - \dot\theta \sin\varphi)\mathbf{j} + (\dot\psi \cos\theta + \dot\varphi)\mathbf{k}$. Problema mișcării unui corp cu un punct fix revine atunci la determinarea unghiurilor lui Euler ca funcții de timp, cînd la momentul inițial se cunoaște poziția corpului și viteza sa instantanee de rotație. Au fost introduse de L. Euler (1748). *(Șt.G., V.B.)*

unghiuri opuse la vîrf, două unghiuri la care laturile unuia sînt în prelungirea laturilor celuilalt. Egalitatea unghiurilor opuse la vîrf a fost demonstrată de Tales (sec. 6 î.e.n.). *(V.B.)*

unghiuri suplimentare [lat. *supplementum* „care se adaugă"], unghiuri a căror sumă este egală cu două unghiuri drepte. *(V.B.)*

unitate imaginară → **număr complex**

unu [lat. *unus*, termen provenit din cuvîntul sanscrit *eca* „singuratic"], număr natural redat prin cifra 1 sau, după sistemul roman, printr-o bară verticală I. *(V.B.)*

V

valoare absolută → modul (1)

valoare logică [lat. *valor-oris*] (a unei propoziţii p; $v(p)$), funcţie definită pe mulţimea propoziţiilor cu valori în $\{0, 1\}$ astfel:

$$v(p) = \begin{cases} 0, \text{ dacă } p \text{ este falsă} \\ 1, \text{ dacă } p \text{ este adevărată.} \end{cases}$$

(A.B.)

valoare medie 1. (Pentru o variabilă aleatoare discretă; $M(X)$), numărul $M(X) = p_1x_1 + p_2x_2 + \ldots + p_nx_n = \sum_{i=1}^{n} p_ix_i$, unde $x_1, x_2, \ldots, x_n$ sînt valorile variabile aleatoare X, iar $p_1, p_2, \ldots, p_n$ probabilităţile corespunzătoare. **2.** (Pentru o variabilă aleatoare continuă; $M(X)$), numărul

$$M(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathrm{d}F(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x,$$

unde $F(x)$ este funcţia de repartiţie a variabilei aleatoare X, iar $f(x)$ funcţia densitate de probabilitate corespunzătoare (dacă există). Noţiunea a fost introdusă (cu o altă denumire) de Chr. Huygens (1656). Se mai numeşte *moment de ordinul întîi*. *(V.B.)*

valoare numerică (a unei expresii algebrice), numărul care se obţine înlocuind, într-o expresie dată, literele cu numere date şi efectuînd operaţiile indicate în expresie (dacă acestea au sens). Ex.: numărul $E(-1, 2) = -\frac{3}{4}$, obţinut prin înlocuirea literelor a şi b cu -1, respectiv 2, în expresia: $E(a, b) = \frac{a-b}{a^2+b^2-1}$. *(V.B.)*

variabilă aleatoare [lat. *alea* „zar"], funcţie definită pe Ω cu valori reale, măsurabilă în raport cu corpul borelian K, unde $\{\Omega, K\}$ este un cîmp de evenimente. Variabila aleatoare asociată unei experienţe aleatoare constituie o reprezentare cantitativă a fenomenului aleator respectiv, asociind un număr fiecărui eveniment aleator posibil. După forma mulţimii valorilor, se face diferenţierea între două tipuri de variabile aleatoare: variabile aleatoare discrete (care pot lua o mulţime cel mult numărabilă de valori) şi variabile aleatoare continue (pentru care mulţimea valorilor este nenumărabilă). Un caz particular în clasa variabilelor aleatoare de tip discret îl constituie variabilele simple, care pot lua doar un număr finit de valori. — *Variabile aleatoare independente*, variabilele aleatoare $X_1, X_2, \ldots, X_k$, dacă

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{k} X_i^{-1}(B_i)\right) = \prod_{i=1}^{k} P(X_i^{-1}(B_i)),$$

oricare ar fi mulţimile boreliene B_i, $(i = 1, 2, \ldots, k)$. În cazul variabi-

lelor aleatoare de tip discret, această proprietate se realizează atunci cînd evenimentele:

$$\{X_i = x_i\},\ (i = 1, 2, ..., k)$$

sînt independente, oricare ar fi valorile x_i ale variabilelor aleatoare X_i. O interpretare intuitivă a independenței variabilelor aleatoare ar fi următoarea: repartiția oricăreia dintre variabilele familiei nu este influențată de valorile pe care le iau celelalte. Denumirea, prin obîrșia ei, sugerează caracterul de întîmplător; sinonimul stochastică (gr. *stohosis* „presupunere, conjunctură"] a fost propus de Jacques Bernoulli (*Ars conjectandis sive stochastice*, tipărită postum, 1713). *(A.Ș., V.B.)*

variabilă independentă → **funcție**

Vâlcovici, Victor (1885—1970), matematician și mecanician român. Studii la Facultatea de Științe din București și la Göttingen (doctor, 1913). Profesor la Universitatea din Iași (agregat din 1915, titular din 1918), la Politehnica din Timișoara (din 1921) și la Universitatea din București (din 1930). Membru al Academiei R.S. România (din 1965; membru corespondent din 1936). A contribuit la organizarea Politehnicii din Timișoara, al cărei prim rector a fost între 1921—1930. Cercetări de mecanică generală și analitică (statica solidului rigid, geometria maselor, dinamica punctului, principii variaționale), de mecanica fluidelor (mișcare turbionară, suprafața Bernoulli în hidrodinamică), teoria elasticității, rezistența materialelor, cosmogonie. Op. pr.: *Ueber die diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen mit zwei freien Strahlen*, 1913; *Mecanica teoretică*, 1959 (în colab.). *(V.B.)*

vecinătate [lat. *vicinitas-tatis* „împrejurime"] (a unui punct x dintr-un spațiu topologic X), mulțime $V \subset X$ care include o mulțime deschisă, care-l conține pe x. Pe $\mathbb{R}$ orice interval deschis (a, b) care conține punctul x este o vecinătate a lui x. — *Vecinătatea simetrică* (a unui punct $x \in \mathbb{R}$), vecinătate de forma $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$, cu $\varepsilon > 0$. Orice vecinătate a lui x conține o vecinătate simetrică. *(V.B.)*

vector [lat. *vecto-vectare* „a trage, a duce"] ($\mathbf{v}$, $\vec{v}$), element al unui spațiu vectorial. Noțiunea s-a extins din mecanică în legătură cu unele mărimi (forță, viteză ș. a.) caracterizate de un modul, direcție și sens, și care se reprezintă printr-un segment orientat. Dacă A și B sînt două puncte fixe din spațiu ele determină un *vector fix* **AB**. În mulțimea vectorilor astfel definiți se introduce o relație de echivalență, numită *echipolență* astfel: **AB** echipolent cu **CD** dacă și numai dacă există o translație care să-l transforme pe unul în celălalt. O clasă de echivalență astfel obținută se numește *vector liber* și ca reprezentant al ei se alege vectorul **OM**, cu originea în originea axelor de coordonate. Vectorii care au aceeași dreaptă-suport se numesc *vectori glisanți*; ex.: forțele aplicate unui corp rigid (P. Varignon). Un vector **OM** este complet determinat de coordonatele (a, b, c) ale punctului M, numite *componente* (față de sistemul de referință considerat). Suma a doi vectori și înmulțirea cu un scalar se pot efectua pe componente și pot fi extinse asupra unui vector $\mathbf{v} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dintr-un spațiu n-dimensional, ceea ce a condus la noțiunea de spațiu vectorial. — *Modulul* (unui vector $\mathbf{v} = (x_1, x_2, ..., x_n)$), $|\mathbf{v}| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} x_i^2}$. În plan sau în spațiu, modulul unui vector reprezintă lungimea segmentului orientat $\overline{AB}$, prin care este reprezentat vectorul. — *Înmulțirea cu un scalar*, operație definită prin $k\mathbf{v} =$

$= (kx_1, kx_2, ..., kx_n)$. În plan sau în spaţiu, prin înmulţirea unui vector **v** cu un scalar $k (k \in \mathbf{R})$ se obţine un vector de aceeaşi direcţie cu **v**, de modul $k|\mathbf{v}|$, şi acelaşi sens cu **v** dacă $k > 0$ şi de sens contrar dacă $k < 0$. — *Adunarea vectorilor* se efectuează după „regula paralelogramului" (pusă în evidenţă — empiric, pentru forţe — de Heron (sec. 1 î.e.n.) şi stabilită experimental de S. Stevin (1600)), construind un paralelogram care să aibă două laturi succesive pe vectorii echipolenţi cu cei doi vectori daţi şi unind originea primului vector cu extremitatea celuilalt; pentru mai mulţi vectori, suma lor se obţine construind poligonul lor: din vîrful vectorului $\mathbf{v}_1$ se duce vectorul $\mathbf{v}_2'$ echipolent cu $\mathbf{v}_2$, din extremitatea lui $\mathbf{v}_2'$ se duce vectorul $\mathbf{v}_3'$ echipolent cu $\mathbf{v}_3$ etc. suma fiind vectorul care închide conturul poligonal — adică vectorul care uneşte originea primului cu extremitatea vectorului echipolent ultimului. — *Produsul mixt* (a 3 vectori **a**, **b**, **c**), scalarul rezultat din produsul scalar al unui vector prin produsul vectorial al celorlalţi, al cărui modul este egal cu volumul paralelipipedului construit pe vectorii daţi:

$$\mathbf{a}(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}$$

Produsul mixt a fost semnalat iniţial de J. Gibbs (1881). — *Produsul scalar* (a doi vectori **a**, **b**), numărul (de aici şi denumirea dată produsului) rezultat din produsul modulelor celor doi vectori înmulţit cu cosinusul unghiului u format de ei: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a \cdot b \cos u$. Dacă componentele vectorilor daţi pe axele triedrului ortogonal de referinţă sînt a_x, a_y, a_z, şi b_x, b_y, b_z, forma analitică a produsului scalar este:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z.$$

Produsul scalar este comutativ, distributiv faţă de adunare, asociativ în raport cu un scalar multiplicativ: $m\mathbf{a} \cdot n\mathbf{b} = mn(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$. Notaţiile curente ale produsului scalar sînt: $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ sau $(\mathbf{a}, \mathbf{b})$ propuse de H. Lorentz (1895), $\mathbf{a}|\mathbf{b}$ (G. Peano, 1903), $<\mathbf{a}, \mathbf{b}>$ (C. Burali-Forti şi S. Marcolongo, 1909). Noţiunea se datoreşte lui W. Hamilton (1843) şi H. Grassmann (1844). — *Produs vectorial* (a doi vectori **a**, **b**), vectorul (ceea ce justifică denumirea produsului) al cărui modul este dat de formula: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = a \cdot b \sin u$ (u fiind unghiul format de vectori), dirijat perpendicular pe planul vectorilor daţi astfel încît un observator care priveşte din extremitatea lui spre origine să vadă că rotaţia care aduce pe drumul cel mai scurt primul vector la al doilea se efectuează în sens antiorar. Notînd cu a_x, a_y, a_z şi b_x, b_y, b_z componentele vectorilor pe axele triedrului ortogonal $Oxyz$, **i**, **j**, **k** fiind versorii axelor, produsul vectorial se exprimă analitic prin formula:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Produsul vectorial este distributiv faţă de adunare, asociativ faţă de înmulţirea cu un scalar: $m(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = m\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times m\mathbf{b} = (\mathbf{a} \times \mathbf{b})m$, dar nu este comutativ (întrucît: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$). Pentru notarea produsului vectorial a doi vectori, **a** şi **b**, se folosesc simbolurile: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$, după propunerea lui J. Gibbs (1902), $[\mathbf{a}, \mathbf{b}]$ (H. Lorentz, 1895), $\mathbf{a} \wedge \mathbf{b}$ (C. Burali-Forti şi R. Marcolongo, 1909). Noţiunea a fost introdusă de W. Hamilton (1843) şi de H. Grass-

mann (1844). Vectorii se notează printr-o literă (adesea supraliniată), $\bar{v}$, sau prin două litere, $\overline{AB}$ (unde A este originea, iar B extremitatea vectorului), notaţii avînd obîrşia în lucrările lui J.R. Argand (1806), sau folosind pentru supraliniere o săgeată, $\vec{v}$, $\overrightarrow{AB}$ (după propunerea lui L. Brillouin şi P. Langevin, 1912), sau prin litere aldine **v** (notaţii recent recomandate internaţional). Denumirea vector (sugerînd faptul că această noţiune întruneşte caracterele esenţiale ale unei forţe de tracţiune) a fost introdusă de W. Hamilton (1846). *(V.B.)*

vector de poziţie → **rază vectoare**

verificarea ipotezelor statistice → **statistică matematică**

versor [lat. *versum* „către, în direcţia“], vector de modul unitate. În spaţiu, dacă **i**, **j**, **k** sînt versorii orientaţi după direcţiile pozitive ale unor axe de coordonate rectangulare, orice vector **v** cu originea în originea axelor se scrie:

$$\mathbf{v} = a\cdot\mathbf{i} + b\cdot\mathbf{j} + c\cdot\mathbf{k},$$

unde (a, b, c) sînt componentele sale. Noţiunea a fost concepută de K. Wessel (1797); considerarea versorilor **i**, **j**, **k** se datorează lui W. Hamilton (1853). *(V.B.)*

vibraţie, mişcare oscilatorie de o frecvenţă foarte mare, care se propagă în interiorul corpurilor avînd, în general, o amplitudine mică. *(Şt.G.)*

Viète [viet], **François** (1540—1603), matematician francez. A profesat avocatura şi a deţinut diverse funcţii oficiale. Unul dintre creatorii algebrei prin introducerea consecventă a calculelor cu formule literale. A stabilit relaţiile dintre rădăcinile şi coeficienţii unei ecuaţii algebrice. A calculat valoarea numărului π cu 9 zecimale exacte şi a stabilit o formulă sub forma unui produs infinit pentru π. Contribuţii în trigonometrie. Op. pr.: *Canon mathematicus*, 1579; *In artem analyticum isagoge*, 1591. *(V.B.)*

viteză (**v**), vector definit ca derivata vectorului de poziţie al unui punct material. Ecuaţia dimensională a vitezei este $[v] = LT^{-1}$, astfel încît unitatea de măsură pentru viteză este egală cu unitatea de măsură pentru lungime raportată la unitatea de timp. *Viteză absolută* ($\mathbf{v}_a$), este viteza unui punct material în raport cu un sistem de referinţă fix. Dacă viteza se calculează în mişcarea punctului material în raport cu un reper mobil, atunci ea se numeşte *viteză relativă* ($\mathbf{v}_r$). Viteza unui punct solidar cu reperul mobil se numeşte *viteză de transport* (viteză de antrenare; $\mathbf{v}_t$), între cele trei viteze astfel definite existînd relaţia $\mathbf{v}_a = \mathbf{v}_t + \mathbf{v}_r$. Viteza are suportul identic cu al tangentei la traiectoria descrisă de punctul material, în punctul unde se află acesta. Modulul vitezei la un moment t este egal cu modulul derivatei, în raport cu timpul, a abscisei curbilinii s a punctului material în acel moment: $v = |\dot{s}|$, iar sensul ei, la acelaşi moment, coincide cu sensul în care se deplasează punctul material pe traiectorie. Dacă se consideră mişcarea plană a punctului şi se folosesc coordonatele polare (r, θ) şi versorii corespunzători $\mathbf{e}_r$ şi $\mathbf{e}_\theta$, expresia vectorului viteză este $\mathbf{v} = \dot{r}\mathbf{e}_r + r\dot{\theta}\mathbf{e}_\theta$. De obicei, proiecţiile lui **v** pe direcţiile versorilor $\mathbf{e}_r$ şi $\mathbf{e}_\theta$ se numesc, respectiv, *viteză radială* şi *viteză transversală* a punctului material. Factorul $\dot{\theta}$ care apare în expresia vitezei transversale se numeşte *viteză unghiulară* a punctului material şi ea se măsoară în radiani pe secundă. Cînd se consideră şi aria A, parcursă de vectorul de poziţie al punctului material, începînd de la

un moment inițial și pînă la un moment t, se pune în evidență și *viteza areolară*, ca derivata în raport cu timpul a funcției $A(t)$. Se găsește că în coordonate polare ea are expresia $\Omega = r^2\dot{\theta}/2$ și deci ecuația ei dimensională este $[\Omega] = L^2T^{-1}$. Dacă se cunosc coordonatele carteziene x și y ca funcții de timp, se găsește că $\Omega = (x\dot{y} - y\dot{x})/2$. Pentru un corp rigid care se rotește în jurul unei axe fixe Δ, iar poziția P a unui punct al său este determinată prin vectorul de poziție $\mathbf{r}$, cu originea pe axă, viteza lui P se obține cu ajutorul vectorului *viteză unghiulară instantanee* ω, cu suportul pe Δ, prin formula $\mathbf{v} = \omega \times \mathbf{r}$. *(Șt.G.)*

viteză generalizată ($\dot{q}_k$), derivată a unei coordonate generalizate în raport cu timpul. *(Șt.G.)*

viteză radială, componenta vitezei unui corp ceresc pe direcția care trece prin observator și acel corp, ambii fiind asimilați cu niște puncte. *(Șt.G.)*

viteze cosmice (referitoare la un corp ceresc sferic de rază R, și centru O care are o distribuție sferică a densității). — *Prima viteză cosmică* (v_I), viteza pe care ar avea-o un punct material care s-ar mișca pe o traiectorie circulară de rază R, în jurul lui O. — *A doua viteză cosmică* (v_{II}), viteza minimă ce trebuie imprimată unui punct material P, care se găsește pe suprafața corpului ceresc, pentru ca P să se îndepărteze la o distanță oricît de mare de O. — *A treia viteză cosmică* (v_{III}), viteza minimă ce trebuie imprimată lui P, care se găsește inițial pe suprafața corpului ceresc, pentru ca P să poată ieși din sistemul planetar respectiv (pentru sistemul din care face parte și Pămîntul — sistemul solar). În cazul Pămîntului $v_I = 7{,}9$ km/s, $v_{II} = 11{,}2$ km/s, $v_{III} = 16{,}7$ km/s. *(Șt.G.)*

vîrf [sl. *vruhu*] (al unei conice sau cuadrice), fiecare dintre punctele de intersecție ale conicei, respectiv, cuadricei cu axele ei de simetrie. Definiția a fost dată de Apollonius (sec. 3 î.e.n.). *(V.B.)*

Volterra, Vito (1860—1940), matematician italian. Profesor la Universitățile din Pisa, Torino și Roma. Membru al Academiei Naționale dei Lincei (Roma) și membru asociat al Academiei de Științe din Paris (1917). Lucrări de analiză matematică, fizică matematică și mecanică; este unul dintre creatorii teoriei ecuațiilor integrale și integro-diferențiale, pe care le-a aplicat apoi în biologie. A introdus noțiunea de funcțională și a contribuit la dezvoltarea analizei funcționale. Printre numeroasele memorii științifice a publicat și note biografice asupra matematicienilor italieni, precum și despre Traian Lalescu. Op. pr.: *Theory of functionals and of integral and integro-differential equations*, 1930; *Le calcul des variations*, 1932. *(V.B.)*

volum [lat. *volumen-inis*], număr pozitiv asociat unui domeniu tridimensional ca măsură a lui. Volumul unui poliedru este un număr pozitiv asociat unui poliedru, satisfăcînd următoarele axiome: a) la două poliedre egale se asociază același număr; b) suma a două poliedre disjuncte are ca volum suma volumelor acelor poliedre; c) cubului cu latură egală cu unitatea de lungime i se asociază numărul 1. Prin aplicarea acestor axiome se stabilesc formulele de calcul pentru volumele diferitelor corpuri poliedrale. Volumul unui corp nepoliedral se definește printr-un proces de aproximare cu corpuri poliedrale. Pentru determinarea volumelor corpurilor, în general, se folosește calculul integral. Unitatea de măsură pentru volume (în sistemul MKS) este metrul cub, m³.

Termenul a fost adoptat în înţelesul de „întindere a unui corp" de către J. Froissart (sec. 14). *(V.B.)*

Vrănceanu, Gheorghe (n. 1900), matematician român. Studii la Universitatea din Iaşi şi la Roma, unde l-a avut profesor pe T. Levi-Civita (doctor, 1924) şi în S.U.A., la Universităţile Harvard şi Princeton. Profesor la Universitatea din Cernăuţi (agregat din 1929, titular din 1930) şi Bucureşti (din 1939). Membru al Academiei R.S. România (din 1955; membru corespondent al Academiei Române din 1946), preşedinte al secţiei de ştiinţe matematice (din 1963). Contribuţii valoroase apreciate pe plan mondial în domeniul geometriei diferenţiale moderne, în special, privind spaţiile neolonome (introduse de el în 1926), spaţiile cu conexiune afină, spaţii Riemann, invarianţii ecuaţiilor cu derivate parţiale de ordinul al doilea (teorema lui Vrănceanu). Lucrări de teoria relativităţii generalizate. Op. pr.: *Spaţiile neolonome*, 1936; *Lecţii de geometrie diferenţială* (vol. I, 1951; vol. II, 1952; vol. III, 1960; vol. IV, 1968; ed. în lb. franceză, 1957, 1964). *(V.B.)*

W

Wallis [uǫlis], **John** (1616—1703), matematician englez. Profesor de geometrie la Oxford. Lucrarea sa *Arithmetica infinitorum*, în care definește noțiunea de limită (introducînd simbolul infinit, ∞), pregătește apariția calculului diferențial și integral. A dat o formulă sub forma unui produs infinit pentru numărul π. Contribuții în aritmetică și algebră (exponenți negativi, teoria divizibilității, sisteme de numerație, fracții zecimale, fracții continue, convenția $0! = 1$) precum și în geometrie (secțiuni conice, postulatul paralelelor). Op. pr.: *Arithmetica infinitorum*, 1655—1656; *De algebra tractatus*, 1673. *(V.B.)*

Weierstrass [vaiərştra:s], **Karl** (1815—1897), matematician german. Profesor la Berlin. Membru al Academiei de Științe din Berlin. Contribuții importante privind teoria funcțiilor de variabilă complexă, unde a introdus concepții noi în legătură cu definirea analiticității și a studiat funcții noi. Lucrări asupra integralelor și funcțiilor abeliene. A dat un exemplu celebru de funcție continuă care nu admite derivată în nici un punct. Op. pr.: *Abhandlungen aus der Funktionenlehre*, 1886. *(V.B.)*

wronskian [de la numele lui *H. Wronski*] (al funcțiilor $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$), determinantul ale cărui elemente sînt funcțiile $f_1(x)$, $f_2(x)$, ..., $f_n(x)$ și derivatele acestora pînă la ordinul $(n-1)$, într-un interval comun $[a, b]$:

$$W(f_1, \ldots, f_n) = \begin{vmatrix} f_1(x) & \ldots & f_n(x) \\ f_1'(x) & \ldots & f_n'(x) \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ f_1^{(n-1)}(x) & \ldots & f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

Utilizarea acestui determinant este legată de faptul că anularea identică într-un interval $[a, b]$ a wronskianului a n funcții reprezintă o condiție necesară ca cele n funcții să fie liniar dependente în acel interval; neanularea wronskianului a n funcții reprezintă o condiție suficientă ca cele n funcții să fie liniar independente. A fost introdus de H. Wronski (1812). *(V.B.)*

Z

zece [lat. *decem*, termen format din cuvîntul sanscrit *dasa*], număr natural reprezentat prin cifrele 10, sau, după sistemul roman, prin simbolul X (sugerînd ideea a două mîini așezate cruciș cu degetul mare răsfirat, amintind numărarea pe degete). *(V.B.)*

zero [sanscr. *sunya* „nimic, gol"], număr notat prin cifra 0. Prima formulare completă a proprietăților lui zero ca număr (deoarece la apariția lui, zeroul a reprezentat doar un semn pentru a marca golul în sistemul de numerație) se datorează indienilor Aryabhata, Sriddhara și Bhaskara (sec. 10—13). N. Chuquet (1484) l-a definit ca rezultat al scăderii la care descăzutul este egal cu scăzătorul, iar J. Dedekind (1873) i-a dat definiția (analoagă celei pentru numerele naturale) ca fiind numărul cardinal al mulțimilor echivalente cu mulțimea vidă — ceea ce a făcut ca numărul zero să fie considerat (contrar tradiției) primul număr natural. Denumirea derivă de la cuvîntul sanscrit *sunya*, folosit în numerația verbală (sec. 5), pe care arabii l-au tradus prin *șifr*. Cînd numerația indo-arabă a fost introdusă în Europa (în evul mediu) acest cuvînt a dat naștere la doi termeni diferiți, fiindcă unii traducători (în special L. Fibonacci, 1202) l-au latinizat *zephirum*, iar alții (de exemplu M. Planudes, c. 1300) l-au grecizat *tziphra*. Prin diferite transformări, pe care le-au suferit limbile romanice, cuvîntul zephirum a trecut în *zefro* și apoi în *zero*, în timp ce cuvîntul tziphra s-a definitivat în *cifra* (dar tot cu înțeles de zero, pînă în sec. 19, cînd a căpătat semnificația actuală). În formă incipientă, semnul zero redat printr-un punct, iar mai tîrziu, printr-un cerculeț apare încă în textele cuneiforme babiloniene (sec. 5 î.e.n.); introducerea sistematică a lui este o realizare a indienilor (sec. 6), ceea ce le-a permis să desăvîrșească sistemul pozițional de scriere a numerelor, folosit astăzi. În literatura matematică românească, denumirea a fost adoptată întîi de Gh. Asachi (1836). *(V.B.)*

zonă [gr. *zone* „brîu"], parte dintr-o sferă, cuprinsă între două plane paralele (fig. 197). Aria zonei sferice este dată de formula: $A = 2\pi Rh$, unde R este raza sferei, iar h înălțimea zonei (distanța dintre planele de secțiune). *(V.B.)*

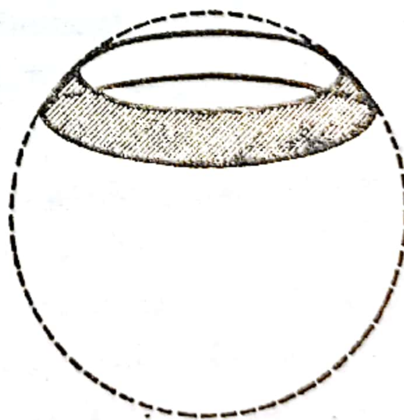


Fig. 197

BIBLIOGRAFIE SELECTIVĂ

Andonie, G. Şt. *Istoria matematicii în România*, vol. I—III, Bucureşti, 1965—1967.

André, D. *Des notations mathématiques*, Paris, 1909.

Bell, E.T. *Les grands mathématiciens*, Paris, 1951.

Bloch, O. şi Wartburg, W. *Dictionnaire etymologique de la langue française*, Paris, 1950.

Bourbaki, N. *Éléments d'histoire des mathématiques*, Paris, 1960.

Cajori, F. *A history of mathematical notations*, vol I—II, Chicago, 1928—1929.

Câmpan, Fl. *Povestea numerelor*, Bucureşti, 1965.

Froda, Alex. *Introducere în algebra modernă*, vol. I-II, Bucureşti, 1968—1970.

Iacob, Caius. *Curs de matematici superioare*, Bucureşti, 1957.

Iacob, Caius. *Mecanică teoretică*, Bucureşti, 1971.

Iuşkevici, A.P. *Istoria matematicii în evul mediu* (traducere), Bucureşti, 1963.

Kolman, E. *Istoria matematicii în antichitate* (traducere), Bucureşti, 1963.

Loria, G. *Storia delle matematiche*, Milano, 1950.

Mihăileanu, N.N. *Complemente de geometrie sintetică*, Bucureşti, 1965.

Mihoc, Gh. ş.a. *Teoria probabilităţilor şi statistica matematică*, Bucureşti, 1966.

Mugler, Ch. *Dictionnaire historique de la terminologie géométrique des Grecs*, Paris, 1958—1959.

Myller-Lebedev, V. *Lecții de algebră*, București, 1953.

Nicolescu, M., Dinculescu, N., Marcus, S. *Manual de analiză matematică*, vol. I—II, București, 1962—1964.

Popovici, Const. P. *Calculatoare cu program și teoria programării*, București, 1972.

Stoilow, S. *Teoria funcțiilor de o variabilă complexă*, vol. I, București, 1954.

Ursu, N.A. *Formarea terminologiei științifice românești*, București, 1962.

Vâlcovici, V., Bălan, Șt., Voinea, R. *Mecanică teoretică*, București, 1959.

Wieleitner, H. *Istoria matematicii* (traducere), București, 1964.



Alte lucrări de matematică
apărute în
EDITURA ENCICLOPEDICĂ ROMÂNĂ

A.I.Ostrovski. *Simple și totuși....* (trad. din lb. rusă), Col. „Orizonturi", nr. 3, 1970

G.H.Hardy. *Crezul meu? Matematica* (trad. din lb. engleză), Col. „Orizonturi", nr. 13, 1970

Anton Dumitriu. *Logica polivalentă,* Col. „Enciclopedia de buzunar", 1971

Al. Froda. *Eroare și paradox în matematică,* 1971

Gr. Moisil. *Îndoieli și certitudini,* Col. „Orizonturi", nr. 20, 1971

N.I.Vilenkin. *Excursie în teoria mulțimilor* (trad. din lb. rusă), Col. „Orizonturi", nr. 27, 1972

I. Arsac. *Informatica* (trad. din lb. franceză), Col. „Enciclopedia de buzunar", 1973

A. Rényi. *Dialog despre calculul probabilităților* (trad. din lb. maghiară), Col. „Orizonturi", nr. 53, 1973.

Bun de tipar : 19.03.1974. Coli de tipar : 20 ;
Tiraj : 53 000 ex.



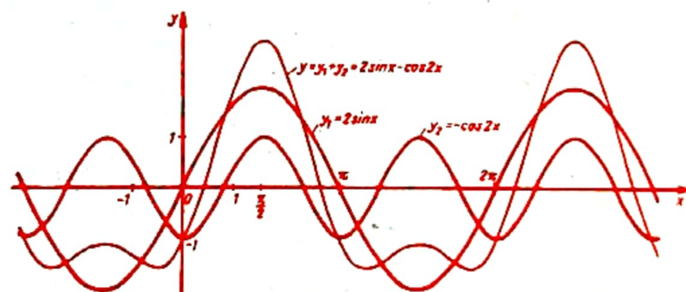
Tiparul executat sub comanda
nr. 30 217, la Combinatul Poligrafic
„Casa Scînteii“, Piața Scînteii nr. 1,
București,
Republica Socialistă România.

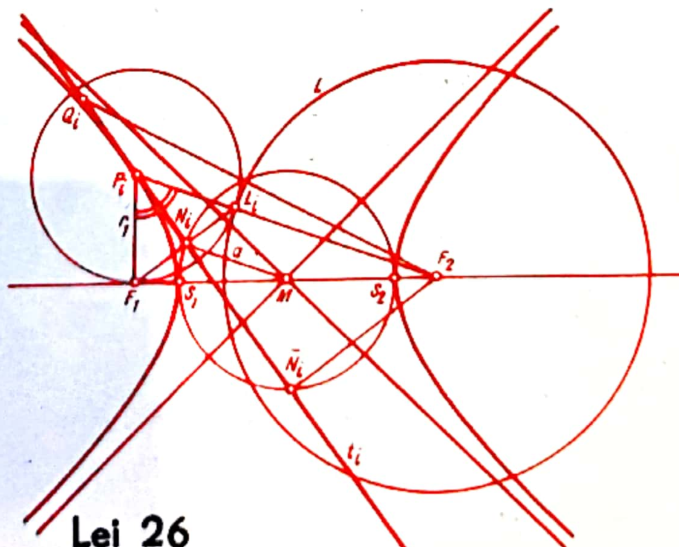
ÎN ACEEAȘI SERIE AU APĂRUT:

Dicționar de fizică
Mică enciclopedie tehnică ilustrată

VOR MAI APĂREA:

Mică enciclopedie de chimie
Dicționar de astronomie și astronautică
Dicționar de automatică-informatică
Dicționar de demografie
Dicționar de marketing
Dicționar de radio și televiziune
Dicționar practic de biologie agricolă





Lei 26

dicționar de matematici generale

ALGEBRĂ — ANALIZĂ MATEMATICĂ — ARITMETICĂ ȘI TEORIA NUMERELOR — CALCULATOARE ELECTRONICE — GEOMETRIE — MECANICĂ — TEORIA PROBABILITĂȚILOR



EDITURA ENCICLOPEDICĂ ROMÂNĂ